



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Это цифровая копия книги, хранящейся для потомков на библиотечных полках, прежде чем ее отсканировали сотрудники компании Google в рамках проекта, цель которого - сделать книги со всего мира доступными через Интернет.

Прошло достаточно много времени для того, чтобы срок действия авторских прав на эту книгу истек, и она перешла в свободный доступ. Книга переходит в свободный доступ, если на нее не были поданы авторские права или срок действия авторских прав истек. Переход книги в свободный доступ в разных странах осуществляется по-разному. Книги, перешедшие в свободный доступ, это наш ключ к прошлому, к богатствам истории и культуры, а также к знаниям, которые часто трудно найти.

В этом файле сохранятся все пометки, примечания и другие записи, существующие в оригинальном издании, как напоминание о том долгом пути, который книга прошла от издателя до библиотеки и в конечном итоге до Вас.

Правила использования

Компания Google гордится тем, что сотрудничает с библиотеками, чтобы перевести книги, перешедшие в свободный доступ, в цифровой формат и сделать их широкодоступными. Книги, перешедшие в свободный доступ, принадлежат обществу, а мы лишь хранители этого достояния. Тем не менее, эти книги достаточно дорого стоят, поэтому, чтобы и в дальнейшем предоставлять этот ресурс, мы предприняли некоторые действия, предотвращающие коммерческое использование книг, в том числе установив технические ограничения на автоматические запросы.

Мы также просим Вас о следующем.

- Не используйте файлы в коммерческих целях.
Мы разработали программу Поиск книг Google для всех пользователей, поэтому используйте эти файлы только в личных, некоммерческих целях.
- Не отправляйте автоматические запросы.
Не отправляйте в систему Google автоматические запросы любого вида. Если Вы занимаетесь изучением систем машинного перевода, оптического распознавания символов или других областей, где доступ к большому количеству текста может оказаться полезным, свяжитесь с нами. Для этих целей мы рекомендуем использовать материалы, перешедшие в свободный доступ.
- Не удаляйте атрибуты Google.
В каждом файле есть "водяной знак" Google. Он позволяет пользователям узнать об этом проекте и помогает им найти дополнительные материалы при помощи программы Поиск книг Google. Не удаляйте его.
- Делайте это законно.
Независимо от того, что Вы используете, не забудьте проверить законность своих действий, за которые Вы несете полную ответственность. Не думайте, что если книга перешла в свободный доступ в США, то ее на этом основании могут использовать читатели из других стран. Условия для перехода книги в свободный доступ в разных странах различны, поэтому нет единых правил, позволяющих определить, можно ли в определенном случае использовать определенную книгу. Не думайте, что если книга появилась в Поиске книг Google, то ее можно использовать как угодно и где угодно. Наказание за нарушение авторских прав может быть очень серьезным.

О программе Поиск книг Google

Миссия Google состоит в том, чтобы организовать мировую информацию и сделать ее всесторонне доступной и полезной. Программа Поиск книг Google помогает пользователям найти книги со всего мира, а авторам и издателям - новых читателей. Полнотекстовый поиск по этой книге можно выполнить на странице <http://books.google.com/>

lex. Zivert.

-6-1922

ОГЛАВЛЕНІЕ

Части кинетичес

§§

ГЛАВА I. Основные принципы механики
ищіяся къ свободному матерья
муса поступательно и къ кото
однородно.

1. Начало инерціи матеріи. Силы.....
2. Мѣсто приложенія силы. Силы, однородно-п
ихъ величины и направленія.....
3. Начало параллелограмма силъ, однородно-п
Силы составляющія и равнодѣйствующая. Рз
4. Силы взаимодействія. Начало равенства оди
ложныхъ силъ, приложенныхъ къ различнымъ
5. Равныя однородныя силы и силы, сообщающі
личнымъ тѣламъ.....
6. Величина силы, однородно-приложенной къ т
чинъ однородныхъ силъ, приложенныхъ ко
7. Масса тѣла.....
8. Единица массы. Единица величины силы....
9. Средняя плотность тѣла. Плотность веществ
тѣла.....
10. Количество движенія тѣла, движущагося посл
11. Основные принципы въ томъ видѣ, въ какомъ
тономъ.....
12.

ГЛАВА II. Основныя начала механики своб
точекъ.

13. Матерьяльная точка.....
14. Основныя начала въ примѣненіи къ свободны
15. Цѣль введенія понятія о матерьяльной точкѣ

АВА III. Механика свободной материальной точки.

одѣйствующая нѣсколькихъ силъ, одновременно приложенныхъ къ материальной точкѣ. Силы, взаимно уравновѣшивающіяся.....	36
дифференціальныя уравненія движенія свободной материальной точки. Примеры: 1-й и 2-й.....	41
задачи дифференціальныхъ уравненій движенія свободной материальной точки; число постоянныхъ произвольныхъ; начальное положеніе и начальная скорость материальной точки. Примеры: 3-й, 4-й.....	46
прямолинейныхъ движеній материальной точки. Примеры: 5-й, 6-й, 7-й, 8-й, 9-й, 10-й, 11-й, 12-й, 13-й, 14-й, 15-й, 16-й, 17-й.....	59
задачи объ опредѣленіи криволинейнаго движенія свободной материальной точки, въ которыхъ каждое изъ дифференціальныхъ уравненій второго порядка интегрируется отдѣльно. Примеръ 18-й.....	80
приема преобразованія дифференціальныхъ уравненій движенія свободной материальной точки.....	85
смыслъ вторыхъ частей дифференціальныхъ уравненій (110) предыдущаго параграфа. Моментъ силы, приложенной къ материальной точке, вѣрху даннаго центра и вѣрху данной оси.....	87
найти количества движенія материальной точки вѣрху даннаго центра и вѣрху данной оси. Секторныя скорости проекцій точки на плоскостяхъ координатъ.....	95
интегрированіе дифференціальныхъ уравненій (110) параграфа 21-го. Интегралы, выражающіе законъ площадей.....	101
живая сила. Живая сила. Значеніе дифференціального уравненія параграфа 21-го.....	107
живая сила или сохраненіе энергіи для одной материальной точки. Потенціальная функція. Поверхности уровня.....	110
рѣшеніе задачи о криволинейномъ движеніи свободной материальной точки подъ вліяніемъ центральной силы, имѣющей потенциалъ. Примеръ 19-й.....	118
другія формы интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія свободной материальной точки.....	125
задачи 1 — 18.....	129
задачи, въ которыхъ требуется опредѣлить относительное движеніе материальной точки по отношенію къ неизмѣняемой средѣ, имѣющей постоянное движеніе, даны силы, приложенныя къ материальной точкѣ. Примеры: 20, 21.....	149
уравненія равновѣсія свободной материальной точки. Условія устойчивости. Примеры: 22, 23, 24.....	167

АВА IV. Механика несвободной материальной точки

.....	173
уравненія свободы движенія точки поверхностью, удерживающею ее въ равновѣсіи.....	174

§§	Стр.
34. Ограниченіе свободы движенія точки поверхностью, неудерживающею ее съ одной стороны.....	176
35. Условіе, которому должно удовлетворять ускореніе точки, движущейся по данной удерживающей поверхности.....	180
36. О кривизнѣ линий, проведенныхъ по поверхности и о кривизнѣ поверхностей.....	186
37. Условіе, которому должно удовлетворять ускореніе точки, движущейся по данной неудерживающей поверхности.....	191
38.	192
39. Реакція поверхности.....	193
40. Дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки по данной удерживающей поверхности при дѣйствіи заданныхъ силъ.....	196
41. Законъ живой силы для точки, движущейся по поверхности.....	197
42. Геодезическая линія. Примѣръ 25-й.....	197
43. Геодезическая кривизна кривой линіи, проведенной по поверхности.	202
44. Примѣры рѣшенія вопросовъ о движеніи по данной удерживающей поверхности матерьяльной точки, подверженной заданнымъ силамъ. Примѣры: 26, 27.....	204
45. Реакція неудерживающей поверхности. Мѣсто схода движущейся точки съ такой поверхности.	216
46. Треніе матерьяльной точки о поверхность. Примѣръ 28-й.....	219
47. Дифференціальныя уравненія, получающіяся чрезъ проэктированіе силъ и ускоренія на направленіе скорости на нормаль къ поверхности и на бинормаль нормального сѣченія. Примѣръ 29-й.....	222
48.	224
49. Дѣйствіе матерьяльной точки на преграду. Давленіе точки на поверхность.....	225
50. Дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки, свобода движенія которой ограничена двумя пересѣкающимися поверхностями.....	226
51. Законъ живой силы для матерьяльной точки, движущейся по кривой линіи.....	229
52. Реакція кривой линіи, удерживающей матерьяльную точку на себѣ. Давленіе точки на кривую.....	229
53. Примѣры рѣшеній вопросовъ о движеніи матерьяльной точки по данной кривой линіи. Примѣры: 30, 31, 32, 33, 34, 35.....	232
54. Вопросы и задачи о движеніи несвободной матерьяльной точки, которыя могутъ быть приведены къ опредѣленію относительнаго движенія точки по отношенію къ нѣкоторой движущейся средѣ. Примѣры 36, 37, 38, 39, 40, 41.....	244
55. Положенія равновѣсія несвободной матерьяльной точки. Примѣры: 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48.....	260
56. Импульсъ силы.	282
57. Мгновенныя силы.....	285
58. Ударъ матерьяльной точки о преграждающую поверхность. Примѣры 49, 50, 51, 52.....	288

ГЛАВА V. Дифференціальныя уравненія движенія системы материальных точекъ.

Понятіе о системѣ материальныхъ точекъ. Связи. Прим. 53-й, 54-й 55-й, 56-й.....	305
Зависимость между скоростями точекъ, связанныхъ удерживающею связью.....	306
Дифференціальныя параметры связи и ихъ направленія.....	312
Разсмотрѣніе равенства (493). Примѣры 53-й, 57-й, 58-й, 59-й.....	315
Зависимость между скоростями точекъ, связанныхъ не удерживающею связью. Примѣры 54-й, 55-й, 56-й, 60-й.....	321
Совокупныя дифференціальныя уравненія движенія системы свободныхъ материальныхъ точекъ. Примѣры 61-й, 62-й, 63-й.....	325
Дифференціальныя уравненія движенія системы материальныхъ точекъ, подверженныхъ преградамъ, но не связанныхъ между собою никакими связями.....	328
Условіе, которому должны удовлетворять ускоренія точекъ, связываемыхъ какою либо связью.....	328
Совокупность реакцій связи. (Примѣры 53-й, 57-й, 58-й, 59-й).....	329
Реакція не удерживающей связи. (Примѣры 54-й, 55-й, 56-й).....	340
Совокупныя дифференціальныя уравненія движенія системы материальныхъ точекъ, связанныхъ одною связью.....	347
Совокупныя дифференціальныя уравненія движенія системы точекъ, связанныхъ нѣсколькими связями.....	349
Приведеніе совокупности (517) къ $(3n - p)$ совокупнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ съ такимъ же числомъ искомыхъ функцій времени.....	354
Координатныя параметры; число независимыхъ координатныхъ параметровъ для данной системы несвободныхъ точекъ.....	354
Дифференціальныя уравненія Лагранжа. Примѣры 64-й, 65-й, 66-й... ..	361
Гамильтонова форма дифференціальныхъ уравненій движенія.....	372
Возможныя варьяціи положеній данной системы точекъ; возможныя варьяціи координатъ и координатныхъ параметровъ.....	377
Равенство, соединяющее въ себѣ всю совокупность дифференціальныхъ уравненій движенія точекъ системы....	383
Варьяція скорости точки и скорость варьяціи движущейся точки....	390
Выводъ дифференціальныхъ уравненій Лагранжа изъ равенства (567). ..	396
Положенія равновѣсія системы материальныхъ точекъ. Уравненія равновѣсія силъ, приложенныхъ къ системѣ материальныхъ точекъ.	
Условія равновѣсія задаваемыхъ силъ.....	398
Равенство, соединяющее въ себѣ всю совокупность уравненій равновѣсія.....	399
Такъ называемыя начала: возможныхъ перемѣщеній и д'Аламбера..	400
Нѣкоторыя свѣдѣнія относительно исторіи открытія начала возможныхъ перемѣщеній и нѣкоторые способы непосредственнаго доказательства этого начала.....	406

ГЛАВА VI. Объ интегралахъ совокупны уравненій движенія системы т

83. Первые и вторые интегралы дифференціальны
данной системы точекъ; число постоянныхъ
84. Интегралы совокупности (554) дифференціалы
порядка.....

ГЛАВА VII. Законъ движенія центра инер

85. Составленіе дифференціальныхъ уравненій дв
системы матеріальныхъ точекъ.....
86. Центр инерціи системы матеріальныхъ точ
87. Законъ движенія центра инерціи системы мат
88. Нѣсколько замѣчаній относительно опредѣл
инерціи системы матеріальныхъ точекъ.....
89. Объ томъ, какъ рассматривается сложное тѣ
мы матеріальныхъ точекъ.....
90. Центр инерціи сложнаго тѣла.....
91. Опредѣленіе положенія центра инерціи слож
стей и линій. Примѣры: 67-й, 68, 69, 70, 71, 7
79, 80, 81, 82, 83, 84.....
92.....

ГЛАВА VIII. Законъ площадей.

93. Составленіе трехъ дифференціальныхъ уравн
94. Главный моментъ силъ вокругъ даннаго цен
моментовъ. Главный векторъ.....
95. Главный моментъ количествъ движенія систе
чекъ.....
96. Значеніе дифференціальныхъ уравненій (628),
97. Видъ дифференціальныхъ уравненій (628) въ
торыхъ главный моментъ реакцій равенъ нул
98. Интегралы, выражающіе законъ площадей. II
99. Законъ площадей въ относительнои движен
ныхъ точекъ по отношенію къ неизмѣняемой
пательное движеніе вѣстѣ съ центромъ инер
100. Примѣры случаевъ, въ которыхъ законы пл
Примѣры 61-й, 62-й, 85-й, 86-й.....
101. Главный моментъ количествъ движенія слож
102. Главный моментъ количествъ движенія неиз
чекъ или твердаго тѣла; проэкція его на неп
нать.....
103. Проэкція главнаго момента количествъ движи
темы точекъ на оси координатъ, неизмѣнно с
темою.....
104. Моменты инерціи.....

связь между моментами инерции вокруг осей, проходящих зъ одну и ту же точку. Эллипсоидъ инерции. Главныя оси инер-	475
связь между моментами инерции вокруг параллельныхъ осей. 480	
центральнымъ главнымъ осямъ и моментамъ инерции могутъ быть дѣлены эллипсоиды инерции во всѣхъ прочихъ точкахъ простран-	481
ственныя координаты.....	486
угловые моменты: полярные и относительно плоскостей. Эллип-	
сы: основной и гираціонный. Плечи инерціи.....	488
примѣры вычисленія моментовъ инерціи нѣкоторыхъ тѣлъ. Примѣ-	
ры: 86-й, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98.....	491
.....	500

ГЛАВА IX. Законъ живой силы.

уравненіе дифференціальнаго уравненія.....	501
и, имѣющія потенціалъ.....	501
нѣ живой силы.....	506
та задаваемыхъ силъ. Потенціальная энергія.....	507
ая сила системы равна живой силѣ движенія центра инерціи, равной съ суммою живыхъ силъ относительныхъ движеній точекъ системы по отношенію къ воображаемой неизмѣняемой средѣ, совер-	
шающей поступательное движеніе вмѣстѣ съ центромъ инерціи.....	511
ая сила движенія твердаго тѣла.....	512
.....	513

ГЛАВА X. Примѣры и задачи.

примѣръ 61-й.....	515
примѣръ 62-й, 63-й.....	517
примѣръ 64-й, 66-й.....	518
числа: 19—35.....	519

ГЛАВА XI. О движеніи твердаго тѣла.

дифференціальныя уравненія движенія свободнаго твердаго тѣла...	536
о называемое вращеніе твердаго тѣла по инерціи.....	549
связь между главными осями инерціи по отношенію къ устойчи-	
вому вращенію.....	566
поступательное движеніе по инерціи такого твердаго тѣла, централь-	
но вращающагося вокругъ центра инерціи.....	571
примѣры силъ, при дѣйствіи которыхъ свободное твердое тѣло вра-	
щается по инерціи вокругъ своего центра инерціи. Примѣры 99-й, 100-й.....	578
главный векторъ и главный моментъ силъ, приложенныхъ къ твер-	
дому тѣлу и имѣющихъ потенціалъ. Примѣры 101, 102, 103.....	574

§§	Стр
125. Элементарная работа всѣхъ задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.....	587
126. Движеніе свободнаго твердаго тѣла, къ которому приложены силы, имѣющія потенциалъ, выражаемый формулою (810); центральный эллипсоидъ инерціи тѣла есть эллипсоидъ вращенія.....	591
127. Примѣры 104-й.....	605
128. Несвободныя твердыя тѣла; число степеней свободы.....	608
129. Дифференціальныя уравненія движенія несвободнаго твердаго тѣла, имѣющаго пять степеней свободы.....	609
130. Нѣкоторые примѣры условій, ограничивающихъ одну степень свободы движенія твердаго тѣла.....	614
131. Примѣры рѣшенія вопросовъ относительно движенія тяжелыхъ тѣлъ по плоскостямъ. Примѣры 105, 106, 107, 108, 109.....	626
132. Дифференціальныя уравненія движенія твердаго тѣла, имѣющаго менѣе пяти степеней свободы.....	641
133. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки. Примѣры 110, 111, 112.....	641
134. Общий взглядъ на тѣ случаи, въ которыхъ ось симметріи тѣла совершаетъ постоянную прецессию, не имѣя нутаціи.....	645
135. Усиліе, потребное для измѣненія направленія оси симметріи тѣла, вращающагося по инерціи вокругъ этой оси.....	649
136. Приборы, служащіе для демонстраціи вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки подъ вліяніемъ силы тяжести.....	652
137. Твердое тѣло, имѣющее неподвижную точку опоры, опирается кромѣ того своею поверхностью на поверхность другаго неподвижнаго тѣла. Периметрическое вращеніе. Примѣръ 112.....	656
138. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ постоянной неподвижной оси. Дифференціальное уравненіе вращенія и выраженія реакцій связей.....	678
139. Давленія вращающагося тѣла на точки опоры его постоянной оси. Условія, при которыхъ ось твердаго тѣла можетъ быть свободною постоянною осью вращенія.....	676
140. Примѣры опредѣленія закона вращенія твердаго тѣла вокругъ постоянной оси подъ вліяніемъ данныхъ силъ. Физическій маятникъ. Примѣры 113, 114.....	679
141. Дифференціальныя уравненія движенія твердаго тѣла, содержащія проекціи количествъ движенія и ихъ моментовъ на подвижныя оси, не связанныя съ твердымъ тѣломъ, но имѣющія начало въ центрѣ инерціи его.....	684
142. Движеніе однороднаго шара по данной поверхности. Примѣры 115, 116, 117, 118.....	686
143. Дифференціальныя уравненія относительнаго движенія твердаго тѣла по отношенію къ данной неизмѣняемой средѣ, имѣющей собственное движеніе.....	700
144. Вопросы и задачи объ опредѣленіи относительнаго движенія твердаго тѣла по отношенію къ данной неизмѣняемой средѣ. Примѣры 119, 120, 121.....	704

АВА XII О составленіи дифференціальныхъ уравненій движеній гибкихъ и деформируемыхъ сплошныхъ тѣлъ. Гибкая нить

положенія, дѣлаемыя относительно силъ взаимодѣйствія между ими.....	714
ъ такихъ дифференціальныхъ уравненій для каждой части изъ которыхъ исключены величины всѣхъ внутреннихъ силъ части.....	715
съ сферы дѣйствія частичныхъ силъ.....	717
яженіе (Stress).....	719
женія проэкцій на оси координатъ главнаго вектора и главнаго ята напряженій, дѣйствующихъ на часть тѣла.....	721
ренія напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ данной поверхности. Давленія, натяженія и тангенціальныя напряженія.....	723
, приложенныя къ элементамъ объема сплошнаго тѣла.....	725
лй видъ уравненій (994).....	727
гбеніе уравненій (994) къ элементарному параллелепипеду сплошн- тѣла.....	728
гбеніе уравненій (994) къ элементарному тетраэдру.....	734
шное тѣло, имѣющее видъ весьма тонкой нити или проволоки. йная плотность. Разсчетъ силъ на единицу длины оси нити....	737
гбеніе уравненій (994, <i>a</i> , <i>b</i> , <i>c</i>) къ элементу нити.....	740
гбеніе уравненій (994, <i>d</i> , <i>e</i> , <i>f</i>) къ элементу вполнѣ гибкой нити. 741	
ненія (1015) въ примѣненіи къ гибкой безконечно-тонкой нити, оторой внѣшнія силы приложены сплошнымъ образомъ.....	744

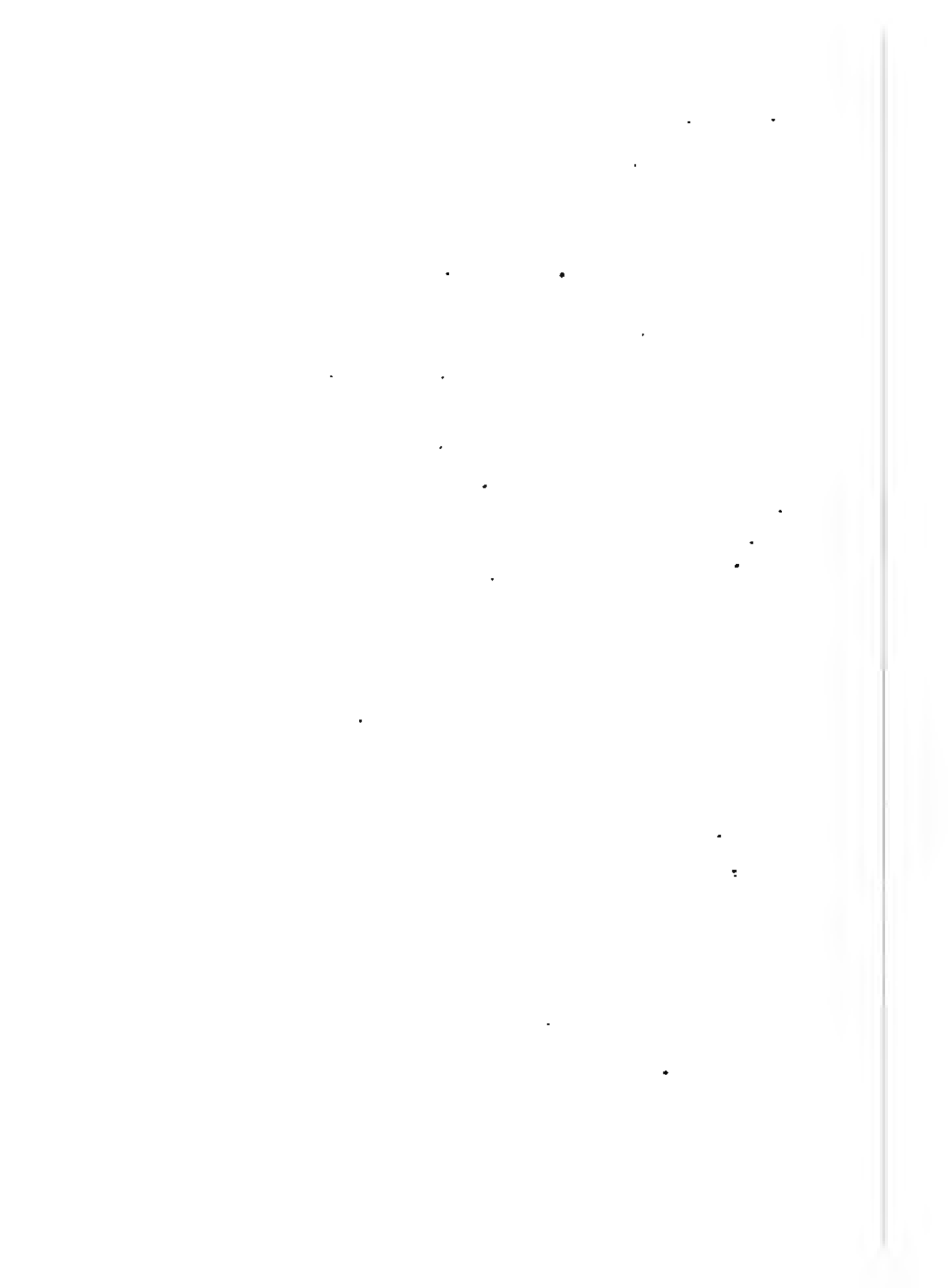
АВА XIII. О положеніяхъ равновѣсія системы матеріальныхъ точекъ, твердыхъ тѣлъ и гибкихъ нитей.

чанія относительно числа уравненій равновѣсія и числа связей. гбры 122, 123, 124.....	745
віа равновѣсія силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.....	751
віе, при которомъ совокупность силъ, приложенныхъ къ своему твердому тѣлу, можетъ быть уравновѣжена одною силою...	753
ее замѣчаніе относительно одного приѣма, употребляемаго въ эитарной статикѣ. Примѣръ 125.....	756
силъ.....	758
купность силъ, эквивалентная парѣ силъ.....	759
купность силъ, не удовлетворяющая условію (637). Приведеніе купности силъ къ каноническому виду.....	761
купность параллельныхъ силъ.....	765
ема Шалы.....	767
купность силъ, приведенную къ двумъ силамъ, привести къ каческому виду. Равновѣсіе трехъ силъ, приложенныхъ къ своему твердому тѣлу.....	769
женія равновѣсія несвободнаго твердаго тѣла. Примѣры: 126, 128, 129, 130, 131, 132.....	770

170. Положенія равновѣсія какой либо системы, подѣ силъ, имѣющихъ потенціалъ. Критеріумъ устоя
Примѣры 133, 134.....
171. Примѣры 135 — 138.
172. Веревочные многоугольники.....
173. Дифференціальныя уравненія равновѣсія гибкой
нерастяжимой нити.....
174. Общія законы относительно натяженія и кривизны
кой нерастяжимой нити, находящейся въ равно
вѣсїи о равновѣсїи гибкой нити и вопросъ
термальной точки.....
175. Примѣры вопросовъ относительно положеній въ
гибкой нерастяжимой нити Примѣры 154, 155, 1
176. Положеніе равновѣсія гибкой нерастяжимой на
данной поверхности Геометрическія линїи. Примѣ

ГЛАВА XIV. Объ ударѣ системы точекъ и связи

177. Ударъ системы свободныхъ матеріальныхъ то
чекъ 162, 163, 164.....
178. Ударъ системы матеріальныхъ точекъ, связанныхъ
связями, о связи неудерживающую. Примѣры 164
179. Дѣйствіе мгновенныхъ силъ на свободное твердое
180. Дѣйствіе мгновенной силы на твердое тѣло, на
неподвижную ось, вокругъ которой оно можетъ
удара.....
181. О соударенїи двухъ твердыхъ тѣлъ. Примѣры 164
182. Мгновенное измѣненіе живой силы системы малъ
вслѣдствіе приложенія къ нимъ мгновенныхъ си
183. Теоремы Карно.....
184. Теорема Уильяма Томсона. Примѣръ 171.....
185. Теорема Бертрана.....
186. Слѣдствія мгновеннаго уничтоженія или разрыва
удерживавшихъ покоившуюся систему въ полож



ОШИБКИ, ЗАМѢЧЕННЫЯ ВО

<i>Стр.</i>	<i>Строка со.</i>	<i>Напечатано:</i>
89	9	координатъ:
—	11	но
50	предпоследняя	$y_0' \rightarrow hy_0$
51	4 снизу	$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{dx}{dt}$
53	15	ψ_2, ψ_1, ψ_2'
71	последняя	$\sqrt{g - kx'}$
78	последняя	$2kx$
91	17	площади
101	предпоследняя	гидрографъ количества д жевія
127	10	сп-
128	15	(192)
130	10	$\pm \sqrt{2\mu}$
134	21	y'' —
165	15	$3Gm_0 \sin \alpha$
166	■	$- 2(x' \sin A +$
169	10	Положеніе
171	7	$U_s \rightarrow \partial^2 U$
172	15	$\frac{v_0^2}{2}$

ср.

Напечатано:

Должно быть:

(295 bis)

(299 bis)

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2$$

$\cos(\mathfrak{n}, N)$

и $\cos(\mathfrak{n}, N)$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2$$

привизны

кривизны

$\mu (r \sin \varphi_0) \sin \varphi_0$

$\mu^2 (r \sin \varphi_0) \sin \varphi_0$

часть проекции траекторіи
на горизонтальную плос-
кость;

проекція на горизонтальную
плоскость траекторіи, опи-
сываемой точкою въ одномъ
изъ такихъ движеній;

η^2

μ^2

$- m^2 \mu$

$- m \mu^2 s$

(380)

(389)

Буква D на чертежѣ 23 не помѣщена по ошибкѣ

тяжелой точки

точки

силъ, когда матерьяльная

силъ.

точка находится въ повоѣ.

только

только

Если

Если

отъ \mathfrak{z} равна

отъ \mathfrak{z} по t равна

$Q =$

$Q_1 =$

$K =$

$K_1 =$

$- \rho_s^2 (\theta'_s)^2$

$- \rho_s (\theta'_s)^2$

составленны,

составленныя

точки A

точки D

точки C_1

точки B_1

CD_1 и CD_1

CD_1 и CD

(а именно $- \lambda_s$)

(а именно: λ_s)

$$\frac{B_k - \mathfrak{B}_k}{M}$$

$$\frac{B_k - \mathfrak{B}_k}{M}$$

$$\frac{C_k - \mathfrak{C}_k}{M}$$

$$\frac{C_k - \mathfrak{C}_k}{M}$$

равна:

равна корню квадратному
изъ:

По ошибкѣ означена страницю 550-ю.

Въ дифференціальныхъ уравненіяхъ (762) вмѣсто $(\mathcal{L}_s)\xi$,

$(\mathcal{L}_s)\eta$, $(\mathcal{L}_s)\zeta$ должны быть $(\mathcal{L}_s)\xi$, $(\mathcal{L}_s)\eta$, $(\mathcal{L}_s)\zeta$.

Стр.	Строка св.	Напечатано:	До
544	9	$\mathfrak{H}_c - \mathfrak{G}_c$	\mathfrak{H}_c
548		Въ первой части уравненія (
		щены слѣдующіе члены:	

$$-\frac{d(A_0)\xi}{dt} \theta_\xi - \frac{d(A_0)\eta}{dt}$$

552	последняя	$\frac{2h}{G}$	$\frac{2h}{G^2}$
562	"	$-qp')_1$	$-$
564	4	$(\Omega^2 - \omega_2^2)$	$(\Omega^2$
594	12	$\sqrt{1 + \cos \beta \cos \alpha + \cos^2 \beta}$	$\sqrt{1}$
609	3 снизу	$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y_0}$	$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial z_n}$
611	2	$(\mathcal{A}_0)\xi$	$(\mathcal{A}_0$
623	III	$x_0 \sin \beta_1 \cos \mathfrak{H}_1$	x_0
—	—	$-x_0 \cos \beta_1$	—
624	3 снизу	$x_0 - xv_x$	x_0
—	предпоследняя	$x_0 - xv_x$	x_0
625	6	уголъ произвольнъ	уго
631	4 и 9	$-Mg($	—
639	18	возрастаетъ	воз
—	предпоследняя	$(y_\mu - b) \pm \lg \varphi_0$	$(y_\mu$
645	17	$\mathfrak{G}_c^2 \omega^2$	L^2
647	8	$\cos^3 \beta$	\cos
652	7 снизу	кругъ G	гру
660	1 снизу	$\cos \psi$	\cos
688	IE	Направленіе	На
—	—	опредѣляется	оп
696	10	$\frac{5}{7} R \cos \varphi$	$\frac{5}{7}$
748	18	противоположна	про
754	11 и 12	Вся вторая часть этого равен	
		комъ минусъ	
783	12	∂q_n	q_n
—	13	q_n	δq_1
784	11	$U_{12} U_{12}$	U_1
—	12	$\frac{B_{22}^2}{Q_2}$	B_2

XVI

Стр. Строка сч.	Напечатано:	Должно быть:
— 14	$-\frac{B_{2n}^2}{Q_2} - \frac{C_{2n}^2}{Q_3}$	$- B_{2n}^2 Q_2 - C_{2n}^2 Q_3$
последняя	D	D_1
12	DN	ΔN
16	CNB	CND
7 снизу	$-k\Delta\Delta f$	$k\Delta\Delta f$
—	$\Delta\Delta f$	$-\Delta\Delta f$

Кинетика *) имѣетъ цѣлью изученіе зависимости между кинематическимъ состояніемъ матеріи, обладающей предполагаемыми свойствами, и причинами, обуславливающими это состояніе.

Подъ словами: «кинематическое состояніе матеріи» мы здѣсь подразумѣваемъ видъ движенія матеріи движущейся, или положеніе и строеніе матеріи покоящейся.

Предположенія о свойствахъ, которыя мы представляемъ себѣ присущими матеріи, рождаются въ насъ путемъ наведенія, изъ знанія явленій природы, почерпаемыхъ изъ наблюденій и опытовъ.

Тѣмъ же путемъ и изъ тѣхъ же источниковъ мы составляемъ себѣ представленіе о свойствахъ причинъ такихъ кинематическихъ состояній матеріи, которыя не объясняются единственно только допущенными уже свойствами ея; такія причины мы называемъ дѣятелями или силами.

Составленные предположенія о свойствахъ матеріи и дѣтелей называются гипотезами; основываясь на нихъ, кинетика, путемъ математической дедукціи, показываетъ, въ какомъ кинематическомъ состояніи будутъ находиться данныя матерьяльныя тѣла при дѣйствіи на нихъ данныхъ дѣтелей, или обратно, опредѣляетъ, при дѣйствіи какихъ дѣтелей данныя тѣла могутъ находиться въ данномъ кинематическомъ состояніи.

*) Терминъ „кинетика“ происходитъ отъ слова $\kappaίνησις$, означающаго произведеніе движенія, между тѣмъ какъ терминъ „кинематика“ производится отъ слова $\kίνημα$, означающаго состояніе движенія.

Цѣль этихъ выводовъ кинетики есть объясненіе наблюденныхъ фактовъ на основаніи сдѣланныхъ гипотезъ, и предсказаніе фактовъ незамѣченныхъ или не наблюдавшихся.

Каждая удача въ объясненіи или въ предсказаніи фактовъ увеличиваетъ вѣроятность одной или нѣсколькихъ изъ сдѣланныхъ гипотезъ.

Тѣ изъ гипотезъ кинетики, которыя относятся ко всякой матеріи или ко всякимъ дѣтелямъ и въ несомнѣнности которыхъ мы убѣждаемся по мѣрѣ большаго ознакомленія съ явленіями, принимаются за основныя истины природы, которымъ подчинены всея явленія физическаго міра; эти гипотезы называются *основными началами или основными принципами механики*.

Изложеніе сущности тѣхъ основныхъ началъ и опредѣленій, на которыхъ основывается механика свободного тѣла, движущагося поступательно, составляетъ содержаніе первой главы.

ГЛАВА I.

Основные принципы механики и опредѣленія, относящіяся къ свободному матерьяльному тѣлу, движущемуся поступательно и къ которому силы приложены однородно.

§ 1. Начало инерціи матеріи. Силы.

Инерція есть свойство матеріи, всегда и неотъемлемо присущее ей.

Существованіе этого свойства въ матеріи мы принимаемъ, какъ одинъ изъ основныхъ принциповъ механики, который мы формулируемъ слѣдующимъ образомъ:

Основное начало А: Всякая точка матерьяльнаго тѣла имѣетъ стремленіе сохранить безъ измѣненія величину и направленіе своей скорости абсолютнаго движенія.

Всякое состояніе матерьяльнаго тѣла, при которомъ ни одна изъ точекъ его не измѣняетъ своей скорости ни по величинѣ, ни по направленію, возможно по свойству инерціи матеріи и объясняется этимъ свойствомъ; слѣдовательно:

по свойству инерціи тѣло можетъ находиться въ абсолютномъ покоѣ;

по свойству инерціи оно можетъ совершать абсолютное поступательное движеніе, при которомъ всѣ точки его движутся равномерно и прямолинейно;

кроме того, мыслимо еще безчисленное множество других движений материальнаго тѣла, при которыхъ ни одна точка тѣла не измѣняетъ ни величины, ни направленія абсолютной скорости (то есть не имѣетъ ускоренія), скорости же различныхъ точекъ различны и различно направлены; всѣ такія движения материальнаго тѣла, хотя и возможны по свойству инерціи матеріи, но необходимо сопровождаются деформациями его; мы же, въ настоящей главѣ, будемъ говорить только о такихъ состояніяхъ материальнаго тѣла, при которыхъ оно не деформируется, а потому въ разсмотрѣніе движений, сопровождающихся деформациями, не войдемъ.

Всякое такое движеніе материальнаго тѣла, при которомъ хотя одна точка тѣла имѣетъ ускореніе, или измѣняетъ свою скорость, не можетъ быть объяснено свойствомъ инерціи матеріи; измѣненіе скорости или появленіе ускоренія мы приписываемъ особымъ причинамъ, которыя мы называемъ *силами*.

Что такое силы, въ чемъ заключается сущность ихъ — мы не знаемъ; мы можемъ знать только дѣйствія, ими производимыя и состоящія въ томъ, что онѣ сообщаютъ абсолютныя ускоренія точкамъ матеріи и измѣняютъ величины и направленія ихъ скоростей; если мы замѣчаемъ, что какая-либо точка матеріи получаетъ абсолютное ускореніе, или измѣняетъ свою абсолютную скорость, то заключаемъ, что на эту точку дѣйствуютъ нѣкоторыя силы.

Ни одна точка материальнаго тѣла не можетъ получить абсолютнаго ускоренія и не можетъ измѣнить своей скорости, пока на нее не станетъ дѣйствовать какая-либо сила.

Стремленіе точекъ матеріи сохранить имѣющіяся скорости называется и во время дѣйствія на нихъ силой; каждая точка матеріи измѣняетъ свою скорость не вдругъ, но постепенно, даже при такихъ силахъ, которыя производятъ наиболѣе быстрое измѣненіе скоростей.

По прекращеніи дѣйствія силы, точка матеріи сохраняетъ ту скорость, которую она имѣла въ моментъ прекращенія дѣйствія силы.

Въ настоящей, параграфъ слѣдуетъ, что *ма-
на одну точку которая не дѣйствуютъ
е деформируется, то пребываетъ по инер-*

ции либо въ абсолютномъ покое, либо въ абсолютномъ поступательномъ движеніи, при которомъ всѣ точки его движутся равномерно и прямолинейно.

Мы будемъ называть материальное тѣло *свободнымъ*, если оно можетъ двигаться поступательно по инерціи по всевозможнымъ направленіямъ и съ какими бы то ни было скоростями.

Материальное тѣло можетъ быть свободно во всемъ неограниченномъ пространствѣ, или внутри нѣкоторой части его, на предѣлахъ которой оно встрѣчаетъ другія материальныя тѣла или вообще какія-либо препятствія, мѣшающія его поступательному движенію по инерціи въ нѣкоторыхъ направленіяхъ.

§ 2. Мѣсто приложенія силы. Силы, однородно-приложенныя къ тѣлу; ихъ величины и направленія.

Всякая сила, дѣйствующая на какое-либо материальное тѣло, имѣетъ въ немъ нѣкоторое *мѣсто приложенія*; подъ этимъ именемъ мы подразумѣваемъ тѣ части объема тѣла, всѣ точки которыхъ получаютъ ускоренія непосредственно отъ той силы, о которой идетъ рѣчь.

Ускоренія, получаемыя разными точками мѣста приложенія силы, могутъ быть неодинаковы; это можетъ зависѣть, какъ отъ свойствъ силы, такъ и отъ тѣхъ обстоятельствъ, въ которыхъ находится материальное тѣло.

Въ настоящей главѣ мы будемъ говорить только о такихъ силахъ, каждая изъ которыхъ прилагается сразу ко всѣмъ точкамъ свободного материальнаго тѣла и притомъ *сообщаетъ имъ всѣмъ одинаковыя и параллельныя ускоренія*; всякую такую силу мы будемъ называть *однородно-приложенною къ тѣлу* или просто *однородною силою*.

Примѣромъ однородныхъ силъ можетъ служить сила тяжести всякаго тѣла, сообщающая, какъ извѣстно, всѣмъ точкамъ тѣла равныя и параллельныя между собою ускоренія.

Такую однородную силу, которая сообщаетъ всѣмъ точкамъ свободного тѣла ускоренія всегда одной и той же величины и всегда параллельно неизмѣнному направленію въ пространствѣ, мы будемъ называть *постоянною однородною силою*; различныя по-

стоянныя однородныя силы, прилагаемыя къ одному и тому же материальному тѣлу, могутъ различаться величинами и направленіями сообщаемыхъ ими ускореній.

Непостоянными или переменными однородными силами мы будемъ называть такія, которыя, хотя и сообщаютъ всѣмъ точкамъ свободнаго тѣла взаимно-равныя и параллельныя ускоренія, но величины этихъ ускореній и направленія ихъ измѣняются съ теченіемъ времени.

Всякая постоянная или непостоянная однородная сила, будучи приложена къ свободному материальному тѣлу, находившемуся въ абсолютномъ покоѣ, или въ абсолютномъ поступательномъ движеніи по инерціи, необходимо сообщить этому тѣлу нѣкоторое поступательное движеніе *).

*) Весьма легко доказать, что, при сказанныхъ условіяхъ, линія, соединяющая каждыя двѣ точки тѣла, сохранить свою длину и направленіе во все время движенія тѣла.

Пусть x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 суть координаты двухъ какихъ-либо точекъ тѣла въ моментъ t , a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 —координаты ихъ въ моментъ t_0 , въ который начала дѣйствовать на тѣло однородная сила.

Такъ какъ, въ каждый моментъ дѣйствія однородной силы, ускоренія всѣхъ точекъ тѣла равны и параллельны, то:

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2}; \quad \frac{d^2y_2}{dt^2} = \frac{d^2y_1}{dt^2}; \quad \frac{d^2z_2}{dt^2} = \frac{d^2z_1}{dt^2}.$$

Помноживъ эти равенства на dt и интегрируя ихъ въ предѣлахъ отъ t_0 до t , мы получимъ:

$x'_2 - x'_1 = (x'_2)_0 - (x'_1)_0$; $y'_2 - y'_1 = (y'_2)_0 - (y'_1)_0$; $z'_2 - z'_1 = (z'_2)_0 - (z'_1)_0$;
гдѣ $(x'_2)_0$, $(y'_2)_0$, $(z'_2)_0$, $(x'_1)_0$, $(y'_1)_0$, $(z'_1)_0$ означаютъ проэкціи на оси координатъ скоростей обѣихъ точекъ въ моментъ t_0 ; такъ какъ въ этотъ моментъ всѣ точки тѣла, по предположенію, имѣютъ скорости равныя и параллельныя, то:

$$x'_2 = x'_1; \quad y'_2 = y'_1; \quad z'_2 = z'_1.$$

Помноживъ эти равенства на dt и интегрируя ихъ въ предѣлахъ отъ t_0 до t , мы получимъ:

$$x_2 - x_1 = a_2 - a_1; \quad y_2 - y_1 = b_2 - b_1; \quad z_2 - z_1 = c_2 - c_1.$$

Эти равенства и выражаютъ, что линія, соединяющая обѣ точки, сохранить свою длину и направленіе; а это можетъ быть только при поступательномъ движеніи тѣла.

Въ настоящей главѣ мы будемъ говорить только о тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ матерьяльныя тѣла, подверженныя дѣйствію однородныхъ силъ, находятся въ покоѣ или въ поступательномъ движеніи; говоря здѣсь объ ускореніи или о скорости одной изъ точекъ тѣла, мы можемъ подразумѣвать произвольную точку его, такъ какъ всѣ точки тѣла, движущагося поступательно, имѣютъ въ одинъ и тотъ же моментъ времени одинаковыя ускоренія и одинаковыя скорости; въ виду этого, для сокращенія рѣчи, вмѣсто того, чтобы говорить: «скорость и ускореніе нѣкоторой точки тѣла, движущагося поступательно», мы будемъ выражаться короче: «скорость и ускореніе тѣла».

Положимъ, что въ нашемъ распоряженіи имѣется нѣсколько однородныхъ силъ:

№ 1-й, № 2-й, № 3-й,

которыя, по нашей волѣ, могутъ быть приложены къ одному и тому же свободному матерьяльному тѣлу A , находящемуся, до приложенія къ нему силъ, въ покоѣ, или въ поступательномъ движеніи по инерціи. Предполагается, что можемъ приложить каждую изъ этихъ силъ порознь, отдѣльно отъ прочихъ, и что можемъ также, если понадобится, приложить нѣсколько изъ этихъ силъ одновременно къ тому же тѣлу A .

Прилагая къ тѣлу A каждую изъ этихъ силъ отдѣльно отъ прочихъ и наблюдая поступательное движеніе, совершаемое этимъ тѣломъ, мы можемъ, по виду движенія которой-либо изъ точекъ его, опредѣлить во всякій моментъ движенія величину и направленіе ускоренія, сообщаемого этою однородною силою всѣмъ точкамъ тѣла.

Изъ такихъ наблюденій, положимъ, окажется, что силы № 1-й, № 2-й, № 3-й, сообщаютъ тѣлу A ускоренія неодинаковой величины и неодинаковаго направленія; притомъ въ числѣ этихъ силъ могутъ оказаться какъ постоянныя, такъ и переменныя однородныя силы.

Видя такое различіе въ количественномъ отношеніи между дѣйствіями этихъ силъ на одно и то же тѣло, мы вправѣ заключить, что существуетъ нѣкоторое количественное различіе и въ самихъ силахъ.

Такъ какъ мы не знаемъ существа силъ, а только ихъ дѣйствія, то намъ приходится составлять себѣ количественное представленіе о силахъ по производимымъ ими дѣйствіямъ, то есть по тѣмъ ускореніямъ, которыя онѣ сообщаютъ свободному материальному тѣлу.

Мы представляемъ себѣ, что однородно-приложенныя ко всякому тѣлу силы имѣютъ, подобно ускореніямъ, *величины и направленія*.

Значенія этихъ понятій мы выразимъ слѣдующими опредѣленіями.

Опредѣленіе а: Подъ направленіемъ силы, однородно-приложенной къ какому-либо тѣлу, мы подразумѣваемъ то направленіе, по которому она сообщаетъ ускоренія всѣмъ точкамъ этого тѣла, когда оно свободно. Постоянная сила имѣетъ неизмѣнное направленіе въ пространствѣ.

Опредѣленіе б: Силамъ, однородно-приложеннымъ къ одному и тому же тѣлу, мы приписываемъ величины, пропорціональныя величинамъ тѣхъ ускореній, которыя онѣ порознь сообщаютъ этому тѣлу, когда оно свободно. Постоянной силѣ, однородно-приложенной къ тѣлу, мы приписываемъ постоянную величину.

По 2-му опредѣленію б численное отношеніе между величинами двухъ постоянныхъ или непостоянныхъ силъ, однородно-прилагаемыхъ къ одному и тому же тѣлу, равняется численному отношенію между величинами ускореній, сообщаемыхъ ими этому тѣлу, когда оно свободно.

Пусть силы № 1-й и № 2-й суть силы постоянныя; первая сообщаетъ тѣлу А ускореніе \dot{v}_1 по опредѣленному направленію, вторая — ускореніе \dot{v}_2 по иному направленію; на основаніи выше-сказаннаго мы заключимъ, что:

$$\frac{\text{(Величина силы № 2)}}{\text{(Величина силы № 1)}} = \frac{\dot{v}_2}{\dot{v}_1} \dots \dots \dots (1)$$

или

$$\text{(Величина силы № 2)} = \frac{\dot{v}_2}{\dot{v}_1} \text{(Велич. силы № 1)} \dots (2)$$

Относительно непостоянныхъ однородныхъ силъ намъ придется

заклѣчить, что онѣ имѣютъ величины и направленія, измѣняющіяся съ теченіемъ времени; но, въ каждый опредѣленный моментъ времени, всякая однородно-прилагаемая къ тѣлу A сила имѣетъ опредѣленное направленіе, совпадающее съ направленіемъ ускореній, сообщаемыхъ ею въ этотъ моментъ всѣмъ точкамъ этого свободнаго тѣла, и опредѣленную величину, численное отношеніе которой къ величинѣ силы № 1 равно:

$$\frac{\ddot{e}}{\ddot{e}_1},$$

гдѣ \ddot{e} есть величина ускоренія, сообщаемого сказанною силою тѣлу A въ разсматриваемый моментъ времени.

Такимъ образомъ мы составляемъ себѣ представленіе объ относительной величинѣ различныхъ силъ, однородно-прилагаемыхъ къ одному и тому же тѣлу; мы можемъ сказать, что измѣряемъ величины этихъ силъ величиною одной изъ нихъ, подобно тому, какъ мы измѣряемъ длины—единицею длины, скорости—единицею скорости и ускоренія—единицею ускоренія.

Величина каждой однородной силы, прилагаемой къ тѣлу A , выразится у насъ именованнымъ числомъ въ величинѣ той изъ нихъ, которую мы примемъ за единицу этихъ силъ; такъ, наиримѣръ, именованныя числа:

$$\frac{\ddot{e}_2}{\ddot{e}_1} \text{ (Велич. силы № 1-й); } \frac{\ddot{e}_3}{\ddot{e}_1} \text{ (Велич. силъ № 1-й)}$$

выражаютъ величины силъ № 2-й и № 3-й въ величинѣ силы № 1-й; знакъ:—(Велич. силы № 1-й) есть символъ, означающій величину силы однородно-приложенной къ тѣлу A и сообщаемой ему ускореніе \ddot{e}_1 , отношенія же:

$$\frac{\ddot{e}_2}{\ddot{e}_1}, \quad \frac{\ddot{e}_3}{\ddot{e}_1}$$

суть отвлеченныя числа.

Для болѣе краткаго обозначенія величинъ и направленій различныхъ силъ мы примемъ буквенныя обозначенія; а именно, величины силъ однородно-прилагаемыхъ къ тѣлу A мы обозначимъ слѣдующимъ образомъ:

$F1_A$ будетъ означать величину силы № 1-й сообщ. тѣлу A уск. \dot{v}_1 ,
 1 " " " " № 2-й " " A " \dot{v}_2 ,
 1 " " " " № 3-й " " A " \dot{v}_3 ,

Надо имѣть въ виду, что эти символы означаютъ именова-
 ния, единицею наименованія которыхъ служить величина,
 ражаемая однимъ изъ этихъ же символовъ, численныя же отно-
 я между величинами, изображаемыми этими символами, суть
 еченные числа или дроби:

$$\frac{F2_A}{F1_A} = \frac{\dot{v}_2}{\dot{v}_1}; \quad \frac{F3_A}{F1_A} = \frac{\dot{v}_3}{\dot{v}_1}; \quad \dots \dots \dots (3)$$

Направленія силъ условимся обозначать тѣми же самыми зна-
 и, какъ и величины силъ, подобно тому, какъ мы обозначаемъ
 ю и тою же буквою величину и направленіе ускоренія; поэтому:

$$\cos (F1_A, X), \cos (F1_A, Y), \cos (F1_A, Z)$$

ть означать косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координ-
 , направленіемъ силы № 1, однородно-приложенной къ тѣлу A .

Величины однородныхъ силъ: №№ $n, (n+1), (n+2), \dots$,
 пагающихся къ другому тѣлу B и сообщающихъ ему ускоренія
 $\dot{v}_{(n+1)}, \dot{v}_{(n+2)}, \dots$ выражаются, на основаніи опредѣленія b ,
 юлицинь одной изъ этихъ же силъ. Означимъ величины и напра-
 ія ихъ символами: $Fn_B, F(n+1)_B, (F(n+2))_B, \dots$; каждый
 этихъ символовъ, когда онъ есть знакъ величины силы, предста-
 ть нѣкоторое именовацное число, единицею наименованія кото-
 служить величина, изображаемая однимъ изъ этихъ же сим-
 въ (напримѣръ, Fn_B = велич. силы № n); численныя же от-
 нія между величинами этихъ силъ суть отвлеченныя дроби:

$$\frac{F(n+1)_B}{Fn_B} = \frac{\dot{v}_{(n+1)}}{\dot{v}_n}; \quad \frac{F(n+2)_B}{Fn_B} = \frac{\dot{v}_{(n+2)}}{\dot{v}_n}; \quad \dots \dots \dots (3 \text{ bis})$$

§ 3. Начало параллелограмма силъ, однородно-приложенныхъ къ тѣлу. Силы составляющія и равнодѣйствующая. Равновѣсіе силъ.

Въ предъидущемъ параграфѣ, говоря о дѣйствіи на свободное тѣло силъ однородно-приложенныхъ къ нему, мы предполагали, что каждая изъ нихъ можетъ быть приложена къ тѣлу или отнята отъ него по нашему желанію; при такомъ условіи мы можемъ подвергать тѣло дѣйствію каждой изъ однородныхъ силъ въ отдѣльности. Однако встрѣчаются такіа однородныя силы какъ напримѣръ силы тяжести, которыя постоянно приложены къ тѣлу и отъ вліянія которыхъ мы не въ состояніи освободить тѣло; въ такихъ случаяхъ придется нерѣдко разсматривать движеніе тѣла при дѣйствіи двухъ или нѣсколькихъ однородныхъ силъ, одновременно-приложенныхъ къ тѣлу.

Одновременное дѣйствіе нѣсколькихъ одновременно-приложенныхъ къ тѣлу силъ опредѣляется слѣдующимъ основнымъ принципомъ механики:

Основное начало *В*: Ускореніе, сообщаемое каждой точкѣ свободного тѣла нѣсколькими одновременно-приложенными къ нему однородными силами, есть геометрическая сумма *), составленная изъ тѣхъ самыхъ ускореній, которыя сообщаютъ эти силы, приложенныя въ тѣлу порознь.

Иначе говоря, это начало утверждаетъ, что каждая изъ одновременно-приложенныхъ однородныхъ силъ сообщаетъ тѣлу ускореніе той же величины и того же направленія, какъ бы она дѣйствовала отдѣльно, и что всѣ такіа ускоренія, сообщаемыя одновременно одному тѣлу, слагаются геометрически въ одно уско-

*) Въ § 32 кинематической части этой книги объяснено было значеніе геометрическаго сложенія; кромѣ того въ той части намъ случалось неоднократно говорить объ этомъ дѣйствіи, какъ въ примѣненіи къ скоростямъ, такъ и въ примѣненіи къ ускореніямъ; поэтому мы здѣсь предполагаемъ, что смыслъ этого термина совершенно понятенъ читателю.

реніе, дѣйствительно принимаемое свободнымъ тѣломъ; конечно, всѣ точки тѣла получаютъ равныя и параллельныя геометрически-сложныя ускоренія, такъ какъ всѣ приложенныя къ тѣлу силы полагаются однородными.

Ускореніе, сообщаемое свободному тѣлу нѣсколькими однородными силами, приложенными къ нему одновременно, можетъ быть цено ему одною однородною силою, которая называется *равнодействующею* этихъ силъ; эти же силы, по отношенію къ ней действующей, называются *составляющими силами*.

Выходясь на началѣ B , мы можемъ выработать правило для опредѣленія величины и направленія равнодействующей по величинамъ и направленіямъ составляющихъ силъ.

Предположимъ, что къ тѣлу A одновременно приложены однородныя

№ 2, № 3, № k ,

силъ и направленія которыхъ мы говорили въ предыдущемъ раѣ; если тѣло A свободно, то, по началу B , оно получитъ такое движеніе \dot{v} , проэкціи котораго на оси координатъ будутъ равны проэкціямъ ихъ ускореній $\dot{v}_1, \dot{v}_2, \dots \dot{v}_k$; то есть:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_1 X &= \dot{v}_1 \cos(\dot{v}_1, X) + \dot{v}_2 \cos(\dot{v}_2, X) + \dots + \dot{v}_k \cos(\dot{v}_k, X) \\ \dot{v}_1 Y &= \dot{v}_1 \cos(\dot{v}_1, Y) + \dot{v}_2 \cos(\dot{v}_2, Y) + \dots + \dot{v}_k \cos(\dot{v}_k, Y) \\ \dot{v}_1 Z &= \dot{v}_1 \cos(\dot{v}_1, Z) + \dot{v}_2 \cos(\dot{v}_2, Z) + \dots + \dot{v}_k \cos(\dot{v}_k, Z) \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

Ускоренія $\dot{v}_1, \dot{v}_2, \dots \dot{v}_k$ суть тѣ самыя, которыя сообщаются свободному тѣлу A силами № 2, № 3, № k въ отдѣльности; поэтому:

$$\dot{v}_2 = \frac{F_2}{F_1} \dot{v}_1, \quad \dot{v}_3 = \frac{F_3}{F_1} \dot{v}_1, \dots \dots \dots \dot{v}_k = \frac{F_k}{F_1} \dot{v}_1, \dots (5)$$

направленія ихъ совпадаютъ съ направленіями этихъ силъ.

$$\left. \begin{aligned} \cos(\dot{v}_1, X) &= \cos(F_2, X), \quad \cos(\dot{v}_2, X) = \cos(F_3, X), \\ \cos(\dot{v}_1, Y) &= \cos(F_2, Y), \quad \cos(\dot{v}_3, Y) = \cos(F_3, Y), \\ \cos(\dot{v}_1, Z) &= \cos(F_2, Z), \quad \cos(\dot{v}_3, Z) = \cos(F_3, Z), \end{aligned} \right\} ; \dots (6)$$

слѣдовательно, можно представить равенства (4) слѣдующимъ образомъ:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} \cos(\dot{v}X) &= \frac{\dot{v}_1}{F1_A} (F2_A \cos(F2_A, X) + \dots + Fk_A \cos(Fk_A, X)) \\ \dot{v} \cos(\dot{v}Y) &= \frac{\dot{v}_1}{F1_A} (F2_A \cos(F2_A, Y) + \dots + Fk_A \cos(Fk_A, Y)) \\ \dot{v} \cos(\dot{v}Z) &= \frac{\dot{v}_1}{F1_A} (F2_A \cos(F2_A, Z) + \dots + Fk_A \cos(Fk_A, Z)) \end{aligned} \right\} . (7)$$

Ускореіе \dot{v} можетъ быть сообщено свободному тѣлу A одною однородно-приложенною къ нему силою, направленіе которой совпадаетъ съ направленіемъ \dot{v} и величина которой равна:

$$F_A = \frac{\dot{v}}{\dot{v}_1} F1_A; \dots \dots \dots (8)$$

эта сила F_A и есть равнодѣйствующая составляющихъ однородныхъ силъ: $F2_A, F3_A, \dots Fk_A$.

Такъ какъ, по нашему знакоположенію, знакъ F_A служить для обозначенія не только величины силы, но еще и ея направленія, то:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\dot{v}X) &= \cos(F_A, X) \\ \cos(\dot{v}Y) &= \cos(F_A, Y) \\ \cos(\dot{v}Z) &= \cos(F_A, Z) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

На основаніи (8) и (9), изъ равенствъ (7) слѣдуютъ равенства.

$$\left. \begin{aligned} F_A \cos(F_A, X) &= F2_A \cos(F2_A, X) + F3_A \cos(F3_A, X) + \dots \\ &\dots + Fk_A \cos(Fk_A, X) \\ F_A \cos(F_A, Y) &= F2_A \cos(F2_A, Y) + F3_A \cos(F3_A, Y) + \dots \\ &\dots + Fk_A \cos(Fk_A, Y) \\ F_A \cos(F_A, Z) &= F2_A \cos(F2_A, Z) + F3_A \cos(F3_A, Z) + \dots \\ &\dots + Fk_A \cos(Fk_A, Z) \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

выражающія величину и направленіе равнодѣйствующей въ величинахъ и направленіяхъ составляющихъ силъ.

Величины и направленія силъ, однородно-прилагаемыхъ къ тѣлу, можно изображать длинами, откладываемыми по направленіямъ силъ отъ какой-либо одной и той же точки тѣла; каждая длина должна быть во столько разъ болѣе единицы длины, во сколько разъ величина изображаемой ею силы болѣе величины той силы, которую мы приняли за единицу силъ, прилагаемыхъ къ этому тѣлу.

Изображая силы длинами, мы можемъ поступать съ ними какъ съ ускореніями, то есть проектировать ихъ на направленія или на плоскости и производить надъ ними геометрическія сложенія и вычитанія.

Проекцію силы F_A на ось X мы называемъ силу, имѣющую величину: $F_A \cos (F_A X)$, и направленную параллельно положительной или отрицательной оси X , смотря потому, имѣетъ ли \cos положительную или отрицательную величину.

Проекція силы F_A на ось X изображается проекціею на ту же ось длины, представляющей эту силу.

Каждое изъ равенствъ (10) выражаетъ, что проекція на одну изъ осей координатъ равнодѣйствующей F_A равна суммѣ проекцій составляющихъ силъ: $F_2A, F_3A, \dots F_kA$.

Изъ этого слѣдуетъ, что длины, изображающія силы $F_A, F_2A, F_3A, \dots F_kA$ имѣютъ такія величины и направленія, что изъ линій, равныхъ и параллельныхъ имъ, можно составить замкнутый многоугольникъ.

Слѣдовательно, *длина, изображающая равнодѣйствующую F_A , есть геометрическая сумма длинъ, изображающихъ составляющія силы: $F_2A, F_3A, \dots F_kA$.*

Если къ тѣлу одновременно приложены только двѣ однородныя силы, то равнодѣйствующая ихъ изобразится діагональю параллелограмма, стороны котораго изображаютъ величины и направленія приложенныхъ къ тѣлу силъ.

Построеніе длины, изображающей равнодѣйствующую нѣсколькихъ силъ, можно сдѣлать послѣдовательнымъ образомъ: сначала построить, по правилу параллелограмма, равнодѣйствующую двухъ изъ приложенныхъ къ тѣлу силъ, затѣмъ, на полученной длинѣ и на длинѣ, изображающей третью силу, построить новый параллелограммъ, діагональ котораго изобразитъ равнодѣйствующую трехъ силъ, и т. д.; такимъ образомъ опредѣленіе величины и направленія равнодѣйствующей нѣсколькихъ однородно-приложенныхъ къ тѣлу силъ сводится на послѣдовательное примѣненіе правила параллелограмма; вслѣдствіе этого основное начало B называютъ *началомъ параллелограмма силъ*.

Если равнодѣйствующая однородныхъ силъ, одновременно приложенныхъ къ одному и тому же тѣлу, равна нулю, то тогда тѣло не получаетъ отъ совокупнаго дѣйствія ихъ никакого ускоренія; въ такихъ случаяхъ говорятъ, что *силы взаимно-уравновѣшиваются или находятся въ равновѣсїи*.

Свободное матерьяльное тѣло, къ которому одновременно приложено нѣсколько однородныхъ взаимно-уравновѣшивающихся силъ, если не деформируется, то пребываетъ по инерціи либо въ абсолютномъ покоѣ, либо въ абсолютномъ поступательномъ движеніи, при которомъ всѣ точки его движутся равномерно и прямолинейно.

Равновѣсіе однородныхъ силъ: $F1_A, F2_A, \dots, Fp_A$, одновременно приложенныхъ къ тѣлу A , выражается аналитически равенствами:

$$\left. \begin{aligned} F1_A \cos(F1_A, X) + F2_A \cos(F2_A, X) + \dots + Fp_A \cos(Fp_A, X) &= 0 \\ F1_A \cos(F1_A, Y) + F2_A \cos(F2_A, Y) + \dots + Fp_A \cos(Fp_A, Y) &= 0 \\ F1_A \cos(F1_A, Z) + F2_A \cos(F2_A, Z) + \dots + Fp_A \cos(Fp_A, Z) &= 0 \end{aligned} \right\} (11)$$

которыя могутъ быть замѣнены символическимъ равенствомъ:

$$\overline{F1}_A + \overline{F2}_A + \overline{F3}_A + \dots + \overline{Fp}_A = 0, \dots \dots (12)$$

выражающимъ, что геометрическая сумма длинъ, изображающихъ уравновѣшивающіяся силы, равна нулю.

Точно также равновѣсіе однородныхъ силъ № n , № r , № s , ... № q , одновременно приложенныхъ къ свободному тѣлу B , выражается слѣдующимъ символическимъ равенствомъ:

$$\overline{Fn}_B + \overline{Fr}_B + \overline{Fs}_B + \dots + \overline{Fq}_B = 0, \dots \dots (13)$$

§ 4. Силы взаимодѣйствія. Начало равенства однородныхъ и противоположныхъ силъ взаимодѣйствія. Отношеніе между величинами однородныхъ силъ, приложенныхъ къ различнымъ тѣламъ.

На основаніи началъ и опредѣленій, приведенныхъ въ предыдущихъ параграфахъ, мы измѣряемъ численныя отношенія между величинами однородныхъ силъ, прилагаемыхъ къ одному и тому же тѣлу.

Теперь мы приведемъ начало, на основаніи котораго мы измѣряемъ отношенія между величинами однородныхъ силъ, приложенныхъ къ разнымъ тѣламъ; это начало относится къ силамъ взаимно-дѣйствія между тѣлами и опредѣляетъ понятіе о равныхъ однородныхъ силахъ, приложенныхъ къ двумъ разнымъ тѣламъ.

Изученіе свойствъ тѣхъ силъ, дѣйствіемъ которыхъ объясняются явленія природы, показало, что величина и направленіе всякой имъ, приложенной къ какому-либо матеріальному тѣлу A , падая въ опредѣленной зависимости отъ положенія, занимаемаго отношенію къ тѣлу A и некоторымъ тѣломъ B , въ которомъ къ будто бы заключается источникъ силы, приложенной къ A ; одновременно съ силою, приленною къ A и имѣющею своимъ источникомъ тѣло B , наблюдается сила, приложенная къ B и имѣющая своимъ источникомъ тѣло A .

Эти одновременныя силы, дѣйствующія между тѣлами, называются *силами взаимодѣйствія* между ними.

Всѣ силы природы суть силы взаимодѣйствія между тѣлами.

Между тѣлами конечныхъ размѣровъ, находящимися въ ко-
нечныхъ разстояніяхъ одно отъ другого, силы взаимодѣйствія
ваютъ по большей части силами неоднородно-приложенными къ
нимъ; чѣмъ меньше размѣры тѣлъ и чѣмъ больше разстоянія
вдѣ ними, тѣмъ ближе подходятъ эти силы къ однородности.

Представимъ себѣ, что имѣемъ такіа тѣла, между которыми
имодѣйствія суть силы однородныя, такъ что къ тѣлу A при-
жена однородная сила, величина и направленіе которой зависятъ
ь относительнаго положенія тѣла B по отношенію къ тѣлу A ,
въ то же время къ тѣлу B прижена однородная сила, вели-
на и направленіе которой зависятъ отъ положенія тѣла A по
ошенію къ тѣлу B .

Такія силы взаимодѣйствія между двумя тѣлами мы пред-
агаемъ равными между собою, если направленія ихъ прямо-
гвоположимъ; это предположеніе составляетъ сущность одного
начала механики, которое мы выразимъ такъ:

Основное начало *C*. Если взаимодействия между двумя тѣлами суть силы однородно-приложенныя къ нимъ и прямо-противоположныя одна другой, то эти силы равны по величинѣ.

Принявъ это начало, мы можемъ опредѣлить численныя отношенія между величинами какихъ-либо однородныхъ силъ, приложенныхъ къ тѣламъ *A* и *B*, если взаимодействия между этими тѣлами суть силы однородныя и прямопротивоположныя хотя бы при нѣкоторомъ одномъ только опредѣленномъ относительномъ положеніи ихъ.

Положимъ, что эти силы взаимодействия сообщаютъ: тѣлу *A* ускореніе \dot{v}_{B_A} и тѣлу *B* ускореніе \dot{v}_{A_B} .

Пусть F^1_A, F^2_A, \dots означаютъ, по прежнему, величины однородныхъ силъ, прилагаемыхъ къ тѣлу *A* и сообщающихъ ему ускоренія $\dot{v}_1, \dot{v}_2, \dots$; величины этихъ силъ могутъ быть сравнены, на основаніи опредѣленія *b*, съ величиною силы, сообщающей тѣлу *A* ускореніе \dot{v}_{B_A} ; означимъ черезъ f_{B_A} величину этой силы; будемъ имѣть равенства:

$$\frac{f_{B_A}}{F^1_A} = \frac{\dot{v}_{B_A}}{\dot{v}_1}, \frac{f_{B_A}}{F^2_A} = \frac{\dot{v}_{B_A}}{\dot{v}_2}, \dots \quad (14)$$

Пусть, далѣе, $F^n_B, F^{(n+1)}_B, \dots$ означаютъ величины силъ однородно-прилагаемыхъ къ тѣлу *B* и сообщающихъ ему ускоренія $\dot{v}_n, \dot{v}_{(n+1)}, \dots$; означимъ черезъ f_{A_B} величину силы, сообщающей тому же тѣлу ускореніе \dot{v}_{A_B} ; подобно тому, какъ и для тѣла *A*, будемъ имѣть равенства:

$$\frac{f_{A_B}}{F^n_B} = \frac{\dot{v}_{A_B}}{\dot{v}_n}, \frac{f_{A_B}}{F^{(n+1)}_B} = \frac{\dot{v}_{A_B}}{\dot{v}_{(n+1)}}, \dots \quad (15)$$

Изъ рядовъ равенствъ (14) и (15), принявъ во вниманіе, что, на основаніи начала *C*:

$$f_{B_A} = f_{A_B},$$

мы получимъ слѣдующія выраженія численныхъ отношеній между величинами однородныхъ силъ, приложенныхъ къ тѣламъ *B* и *A*:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Fn_B}{F1_A} &= \frac{\dot{v}_n(\dot{v}_{BA})}{\dot{v}_1(\dot{v}_{AB})}; \quad \frac{Fn_B}{F2_A} = \frac{\dot{v}_n(\dot{v}_{BA})}{\dot{v}_2(\dot{v}_{AB})}; \dots\dots\dots \\ \frac{F(n+1)_B}{F1_A} &= \frac{\dot{v}_{(n+1)}(\dot{v}_{BA})}{\dot{v}_1(\dot{v}_{AB})}; \quad \frac{F(n+1)_B}{F2_A} = \frac{\dot{v}_{(n+1)}(\dot{v}_{BA})}{\dot{v}_2(\dot{v}_{AB})}; \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

Отсюда видно, что численное отношение между величинами двух однородных сил, одна из которых приложена къ тѣлу *B*, а другая къ тѣлу *A*, получается чрезъ умноженіе численнаго отношенія между величинами ускореній, сообщаемыхъ этими силами, на постоянную для этой пары тѣлъ дробь:

$$\frac{\dot{v}_{BA}}{\dot{v}_{AB}}, \dots\dots\dots (17)$$

которая представляетъ отношеніе между ускореніями, сообщаемыми тѣламъ *A* и *B* силами взаимнодѣйствія между ними, однородными и противоположными, а потому и равными между собою.

§ 5. Равныя однородныя силы и силы, сообщающія равныя ускоренія различнымъ тѣламъ.

Двѣ однородныя силы, приложенныя къ одному и тому же тѣлу, имѣютъ равныя величины, если равны ускоренія, сообщаемыя ими этому тѣлу.

Двѣ же однородныя силы, приложенныя къ разнымъ тѣламъ и сообщающія имъ одинаковыя ускоренія, вообще говоря, не равны между собою; изъ равенствъ (16) видно, что отношеніе между величинами G_B и G_A силъ, сообщающихъ тѣламъ *B* и *A* ускореніе \dot{v} , равно дроби (17).

$$\frac{G_B}{G_A} = \frac{\dot{v}_{BA}}{\dot{v}_{AB}} \dots\dots\dots (18)$$

Для того, чтобы величина Φ_B однородной силы, приложенной къ тѣлу *B* и сообщающей ему ускореніе \dot{V}_B , равнялась величинѣ Φ_A однородной силы, приложенной къ тѣлу *A* и сообщающей ему уско-

рение \dot{V}_A , необходимо, чтобы величина Φ_B была во столько разъ болѣе величины \dot{f}_{AB} , во сколько разъ Φ_A болѣе \dot{f}_{BA} ; для этого ускоренія \dot{V}_A и \dot{V}_B должны удовлетворять слѣдующему равенству:

$$\frac{\dot{V}_B}{\dot{f}_{AB}} = \frac{\dot{V}_A}{\dot{f}_{BA}},$$

которое можно представить такъ:

$$\frac{\dot{V}_A}{\dot{V}_B} = \frac{\dot{f}_{BA}}{\dot{f}_{AB}} \dots \dots \dots (19)$$

Слѣдовательно: *дѣя силы, одна изъ которыхъ однородно-приложена къ тѣлу A, а другая къ тѣлу B, имѣютъ равныя величины, если отношеніе между ускореніями, сообщаемыми ими тѣламъ A и B, равняется дроби (17).*

Кромѣ того замѣтимъ, что дробь (17), которую мы означимъ черезъ $\mu(BA)$, можетъ быть представлена: 1) какъ отношеніе между ускореніями, сообщаемыми тѣламъ A и B какими-либо равными между собою однородными силами, приложенными къ этимъ тѣламъ, 2) какъ отношеніе между величинами однородныхъ силъ, приложенныхъ къ тѣламъ B и A и сообщающихъ имъ равныя ускоренія.

$$\mu(BA)^* = \frac{\dot{f}_{BA}}{\dot{f}_{AB}} = \frac{\dot{V}_A}{\dot{V}_B} = \frac{G_B}{G_A} \dots \dots \dots (20)$$

§ 6. Величина силы однородно-приложенной къ тѣлу, равна суммѣ величинъ однородныхъ силъ, приложенныхъ ко всѣмъ частямъ тѣла.

Пусть имѣемъ нѣкоторое тѣло K.

Положимъ, что для сообщенія ему ускоренія \dot{v} надо приложить къ нему однородную силу, имѣющую величину G_K .

*) Порядокъ размѣщенія буквъ B и A въ символѣ $\mu(BA)$ слѣдующій: сначала поставленъ знакъ того тѣла, ускореніе котораго находится въ знаменателѣ; здѣсь это—тѣло B, ускореніе котораго: \dot{f}_{AB} или \dot{V}_B .

Если отдѣлимъ отъ тѣла нѣкоторую часть a , то, для сообщенія этой части ускоренія той же величины \dot{v} , надо будетъ однородно приложить къ ней силу, имѣющую величину G_a , меньшую G_K .

Раздѣлимъ тѣло K на части: $a, b, c, \dots h$ и опредѣлимъ величины $G_a, G_b, G_c, \dots G_h$ однородныхъ силъ, сообщающихъ этимъ частямъ ускореніе той же величины \dot{v} .

Естественно допустить, что когда всѣ части $a, b, c, \dots h$ собраны вмѣстѣ, образуя тѣло K , которое подвержено силѣ G_K , сообщающей ему ускореніе \dot{v} , то тогда къ части a однородно приложена по тому же направленію сила G_a , къ части b —сила G_b , къ части c —сила G_c, \dots къ части h —сила G_h и что величина силы G_K равняется суммѣ величинъ силъ, приложенныхъ къ частямъ $a, b, c, \dots h$.

Какъ ни естественно это допущеніе, но оно не вытекаетъ изъ приведенныхъ выше началъ и опредѣленій; а потому мы должны поставить себѣ на видъ, что, дѣлая его, мы вводимъ слѣдующее начало:

Основное начало D . Величина однородной силы, сообщающей тѣлу какое-либо ускореніе, равняется суммѣ величинъ однородныхъ силъ того же направленія, сообщающихъ то же самое ускореніе частямъ тѣла, взятымъ въ отдѣльности.

На основаніи этого начала:

$$G_K = G_a + G_b + G_c + \dots + G_h, \dots \dots \dots (21)$$

гдѣ $G_K, G_a, G_b, G_c, \dots G_h$ суть величины однородныхъ силъ одного и того же направленія, сообщающихъ тѣлу K и частямъ его: $a, b, c, \dots h$, взятымъ въ отдѣльности, ускореніе \dot{v} .

Изъ этого слѣдуетъ, что:

$$\mu(KA) = \mu(aA) + \mu(bA) + \mu(cA) + \dots + \mu(hA), \dots (22)$$

потому что

$$\mu(KA) = \frac{G_K}{G_A}; \quad \mu(aA) = \frac{G_a}{G_A}; \quad \dots; \quad \mu(hA) = \frac{G_h}{G_A},$$

гдѣ G_A есть величина однородной силы, сообщающей тѣлу A ускореніе \dot{v} .

§ 7. Масса тѣла.

Если для двухъ какихъ-либо тѣлъ A и B отношеніе $\mu(BA)$ не равно единицѣ, то это означаетъ, что способность этихъ тѣлъ къ воспринятію дѣйствія однородныхъ силъ неодинакова; равныя силы сообщаютъ имъ не равныя ускоренія и для сообщенія имъ равныхъ ускореній должно приложить къ нимъ неодинаковыя силы.

Съ другой стороны мы знаемъ, что матерьяльное тѣло, находящееся въ поступательномъ движеніи, имѣетъ, по свойству инерціи, *стремленіе* сохранять величину и направленіе своей скорости абсолютнаго движенія; такое стремленіе мы будемъ называть *инертностью* тѣла.

Инертность тѣла есть свойство противоположное способности его воспринимать дѣйствіе однородныхъ силъ: чѣмъ больше инертность тѣла, тѣмъ меньше вышеупомянутая способность, и обратно.

Слѣдовательно, инертность двухъ тѣлъ A и B неодинакова, если $\mu(BA)$ не равно единицѣ; большею инертностью обладаетъ то изъ этихъ двухъ тѣлъ, которое получаетъ меньшее ускореніе при той же величинѣ приложенной силы и которое требуетъ большей силы для сообщенія ему ускоренія, одинаковаго съ другимъ тѣломъ.

Поэтому, отношеніе между величинами инертностей тѣлъ B и A полагаютъ равнымъ дроби $\mu(BA)$, то есть равнымъ отношенію величинъ G_B и G_A однородныхъ силъ, сообщающихъ равныя ускоренія этимъ тѣламъ, или отношенію величинъ \dot{V}_A и \dot{V}_B ускореній, сообщаемыхъ тѣламъ A и B однородными силами, равными между собою.

Чѣмъ больше инертность тѣла, тѣмъ больше въ немъ того, что обладаетъ свойствомъ инерціи, то есть матеріи; поэтому, по величинѣ инертности тѣла судятъ о количествѣ заключающейся въ немъ матеріи, полагая, что $\mu(BA)$ есть отношеніе количества матеріи тѣла B къ количеству матеріи тѣла A .

Количество матеріи тѣла называется *массою* его.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ С. ОТНОШЕНИЕ МАСС ДВУХ ТѢЛ ОБРАТНО ПРОПОРЦИОНАЛЬНО ОТНОШЕНИЮ УСКОРЕНІЙ, СООБЩАЕМЫХЪ ЭТИМЪ ТѢЛАМЪ ОДНОРОДНЫМИ И ПРЯМОПРОТИВПОЛОЖНЫМИ СИЛАМИ ВЗАИМОДѢЙСТІЯ МЕЖДУ НИМИ, ИЛИ ВОООЩЕ КАКИМИ БЫ ТО НИ БЫЛО РАВНЫМИ МЕЖДУ СОБОЮ СИЛАМИ, ОДНОРОДНО-ПРИЛОЖЕННЫМИ КЪ ЭТИМЪ ТѢЛАМЪ.

Видѣтъ съ тѣмъ ОТНОШЕНИЕ МАСС ДВУХЪ ТѢЛ РАВНО ОТНОШЕНИЮ ВЕЛИЧИНЪ ОДНОРОДНЫХЪ СИЛЪ, СООБЩАЮЩИХЪ РАВНЫЯ УСКОРЕНІЯ ЭТИМЪ ТѢЛАМЪ.

$$\frac{m_B}{m_A} = \mu(BA) = \frac{\dot{v}_A}{\dot{v}_B} = \frac{G_B}{G_A}, \dots\dots\dots (23)$$

гдѣ m_B и m_A означаютъ массы тѣлъ B и A .

Означимъ черезъ $m_K, m_a, m_b, m_c, \dots m_h$ массы тѣлъ K и астей его: $a, b, c, \dots h$; на основаніи послѣдняго опредѣленія, равенство (22) можетъ быть представлено подѣ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{m_K}{m_A} = \frac{m_a}{m_A} + \frac{m_b}{m_A} + \frac{m_c}{m_A} + \dots + \frac{m_h}{m_A}$$

отсюда слѣдуетъ:

$$m_K = m_a + m_b + m_c + \dots + m_h, \dots\dots\dots (24)$$

о есть: масса тѣла равна суммѣ массъ всѣхъ частей его; это даетъ намъ право говорить, что масса тѣла, понятіе о которой составляется, на основаніи опредѣленія с, по величинѣ инертности тѣла, есть количество матеріи, заключающейся въ тѣлѣ.

Послѣ сказаннаго въ послѣднихъ параграфахъ, численное отношеніе между величинами F_B и F_A однородныхъ силъ, приложенныхъ къ тѣламъ B и A и сообщающихъ имъ ускоренія \dot{v}_B и \dot{v}_A , выразится такъ:

$$\frac{F_B}{F_A} = \frac{m_B \dot{v}_B}{m_A \dot{v}_A}, \dots\dots\dots (25)$$

о есть: численное отношеніе между величинами двухъ однородныхъ силъ, одна изъ которыхъ приложена къ тѣлу B , а

другая къ тѣлу A , получается чрезъ умноженіе численнаго отношенія между величинами ускореній, сообщаемыхъ этими силами, на численное отношеніе массъ тѣлъ.

§ 8. Единица массы. Единица величины силы.

Изъ формулы (25) видно, что для измѣренія величинъ силъ надо измѣрять ускоренія и массы.

Измѣреніе массы какого либо тѣла имѣетъ цѣлью опредѣлить, въ какомъ численномъ отношеніи находится масса тѣла къ единицѣ массы.

Въ научныхъ изслѣдованіяхъ чаще всего употребляются французскія единицы массы: килограммъ, граммъ, миллиграммъ. Килограммъ есть масса, равная массѣ платинового цилиндра, хранящагося въ государственномъ архивѣ Франціи и извѣстнаго подъ именемъ: le kilogramme prototype en platine des Archives; при изготовленіи его имѣлось въ виду сдѣлать массу его равною массѣ кубическаго дециметра чистой воды, имѣющей температуру 4° Цельсія и находящейся подъ нормальнымъ *) атмосфернымъ давленіемъ; но, по наблюденіямъ Купфера и изслѣдованіямъ W. H. Miller'a, масса кубическаго дециметра воды при вышесказанныхъ температурѣ и давленіи равна 1000013 миллиграммовъ, то есть на 13 миллиграммовъ болѣе массы килограмма.

Русскій фунтъ есть масса 25,01893 кубическихъ дюймовъ воды, имѣющей температуру $13,5^{\circ}$ Реомюра; русскій фунтъ = 409,497 граммовъ и килограммъ = 2,442022 фунта.

Англійскій new **) standard pound, заключающій 7000 грановъ = 453,59265 граммовъ и килограммъ = 2,2046212 n. st. pound = 15432,34874 грановъ.

Измѣреніе массъ дѣлается при помощи приборовъ, назначеніе которыхъ состоитъ въ томъ, чтобы убѣдиться въ равенствѣ массъ

*) Подъ нормальнымъ атмосфернымъ давленіемъ подразумѣвается здѣсь давленіе, производимое атмосферою на широтѣ Парижа и на уровнѣ моря, когда барометръ стоитъ на 760 миллиметрахъ ртутнаго столба, приведеннаго къ 0° Цельсія.

**) Съ 1855 года.

двухъ тѣлъ по равенству величинъ силъ тяжести, приложенныхъ къ этимъ тѣламъ; употребительнѣйшій и точнѣйшій приборъ этого рода — рычажные равноплечные вѣсы.

Слѣдуетъ замѣтить, что теорія всѣхъ такихъ приборовъ основывается, между прочимъ, на началѣ равенства и противоположности силъ взаимодѣйствія между малѣйшими частицами тѣлъ.

Кромѣ вѣсовъ надо имѣть еще и разновѣсы, изъ гирь котораго можно составить массу какой угодно величины, заключающейся въ предѣлахъ прочности и чувствительности вѣсовъ.

Самое измѣреніе данной массы заключается въ опредѣленіи суммы массъ гирь, уравновѣшивающихъ эту массу на вѣсахъ.

Такимъ образомъ мы опредѣляемъ численное отношеніе между данною массою m и единицею массы; поэтому m выражается именовавшимся числомъ, напримѣръ:

масса кубическ. сантиметра ртути, имѣющей температуру 0° по Цельзію =

$$13,59618.(\text{грамм.})=0,01359618 \text{ (килогр.)};$$

$$\text{масса земли}=6,14 \cdot 10^{27}.(\text{грамм.})=6,14 \cdot 10^{24}.(\text{килогр.})$$

За единицу величинъ силъ принимается величина силы, однородно-приложенной къ тѣлу, масса котораго равна единицѣ массы, и сообщаящей ему ускореніе, равное единицѣ ускореній.

Положивъ въ равенствѣ (25): $m_A = (\text{ед. масс.})$, $\dot{v}_A = (\text{ед. ускор.})$, мы получимъ:

$$\frac{F_B}{(\text{ед. силы})} = \frac{m_B}{(\text{ед. массы})} \frac{\dot{v}_B}{(\text{ед. ускорен.})}, \dots\dots\dots (26)$$

то есть: отвѣченное число, показывающее, во сколько разъ величина силы, однородно-приложенной къ тѣлу B и сообщаящей ему ускореніе \dot{v}_B , болѣе единицы силы, равняется произведенію двухъ другихъ отвѣченныхъ чиселъ, одно изъ которыхъ выражаетъ отношеніе между массою тѣла и единицею массы, а другое есть отношеніе ускоренія \dot{v}_B къ единицѣ ускоренія.

Если же мы примемъ, что единица силы равна произведенію изъ единицы массы на единицу ускоренія:

$$(\text{ед. силы}) = (\text{ед. массы}) \cdot (\text{ед. ускорен.}), \dots \dots \dots (27)$$

то тогда, вмѣсто равенства (26), будемъ имѣть слѣдующее равенство:

$$F_B = m_B \dot{v}_B, \dots \dots \dots (28)$$

которое имѣетъ тотъ же самый смыслъ, что и равенство (26), но выражаетъ величину силы именованнымъ числомъ въ величинѣ единицы силы.

Единица силы, или, вѣрнѣе, единица величинъ силъ, есть единица сложная, величина которой опредѣляется величинами единицъ длины, времени и массы; символъ ея величины—слѣдующій:

$$(\text{ед. силы}) = \frac{(\text{ед. массы}) (\text{ед. длины})}{(\text{ед. времени})^2} \dots \dots \dots (29)$$

По предложенію образовавшейся при Британскомъ Обществѣ поощренія наукъ особой комиссіи для выбора и наименованія единицъ величинъ, встрѣчающихся въ математической физикѣ *), принята система сложныхъ единицъ, основанная на слѣдующихъ простыхъ единицахъ:

величина единицы длины: сантиметръ,
 величина единицы времени: секунда среднего времени,
 величина единицы массы: граммъ.

Единицу силы, основанную на этихъ единицахъ длины, времени и массы, предложено называть: динаму (отъ греческаго слова: δύναμις), или, сокращенно: дине; мы будемъ называть ее диною.

Дина есть величина силы, которая, будучи однородно приложена къ покоящемуся грамму, заставляетъ каждую точку его пройти 0,5 сантиметра въ первую секунду.

$$\text{Дина} = \frac{(\text{граммъ}) \cdot (\text{сантиметръ})}{(\text{секунда})^2} \dots \dots \dots (30)$$

*) Committee for the Selection and Nomenclature of Dynamical and Electrical Units; эта комиссія образовалась въ 1874 году изъ слѣдующихъ лицъ: W. Thomson, Profess. Foster, J. C. Maxwell, G. J. Stoney, Fleeming Jenkin, Dr. Siemens, Mr. F. Bramwell, Profess. Everett.

ъ житейской практикѣ выражаютъ величины силъ въ кило-
гахъ, пудахъ, фунтахъ и проч., причемъ подъ этими име-
понимаютъ вѣсъ этихъ массъ; конечно, выражалась такимъ
мъ, не даютъ точнаго понятія о величинѣ силъ, такъ какъ
одной и той же массы различенъ въ разныхъ мѣстахъ земли;
вѣсъ одного килограмма подъ широтою λ и на высотѣ h
метровъ надъ уровнемъ океана равенъ:

$$1000 \cdot (\text{граммъ}) \cdot g^* = \\ 30,6056 - 2,5028 \cos 2\lambda - 0,000003h \cdot 1000 \cdot (\text{динам.})$$

дина есть сила довольно малой величины (такъ что, напр., вѣсъ
1 килограмма на экваторѣ равняется 980605 динамъ слишкомъ),
по комиссія предложила употребленіе придаточныхъ словъ:

deca	hecto	kilo	mega
бозначенія: 10	100	1000	1000000 единицъ;

мѣръ, килодина и мегадина суть тысяча и миллионъ дина;
килограмма на экваторѣ почти равенъ одной мегадинѣ.
для выраженія долей единицы:

0,1	0,01	0,001	0,000001
-----	------	-------	----------

имены терминны:

deci	centi	milli	micro.
------	-------	-------	--------

вѣсъ русскаго фунта въ С.-Петербургѣ (гдѣ $g = 981,85$):

$$4,02 \cdot 10^5 (\text{дин.}).$$

вѣсъ англійскаго новаго фунта (полагая $g = 981 \frac{\text{сант.}}{(\text{сек.})^2}$):

$$4,45 \cdot 10^5 (\text{дин.}).$$

9. Средняя плотность тѣла. Плотность вещества въ любой точкѣ тѣла.

величина отношенія между массою тѣла и величиною его объема
называется *среднею плотностью тѣла*.

Величина g приведена на стр. 236 кинематич. части, въ выноскѣ.

Величина единицы плотности выражается слѣдующимъ символомъ:

$$(\text{единица плотности}) = \frac{(\text{ед. массы})}{(\text{ед. длины})^3}.$$

Средняя плотность тѣла равна единицѣ плотности, если масса его во столько разъ болѣе единицы массы, во сколько разъ объемъ его болѣе единицы объема.

Если всякая, даже самая мельчайшая, часть тѣла имѣетъ ту же самую среднюю плотность, какъ и цѣлое тѣло, то такое тѣло называется *тѣломъ однородной плотности*; величину средней плотности такого тѣла называютъ *плотностью* его.

$$\text{Плотность воды при } 4^{\circ}\text{C} = 1,000013 \frac{(\text{граммъ.})}{(\text{сантиметр.})^3}.$$

Когда плотность σ однороднаго вещества извѣстна, то масса объема V этого вещества опредѣлится чрезъ умноженіе V на σ .

Для вещества неоднородной плотности, средняя плотность части тѣла будетъ имѣть различную величину, смотря по величинѣ взятой части.

Положимъ, что мы беремъ все болѣе и болѣе уменьшающіяся части тѣла, заключающія въ себѣ одну и ту же точку его: m ; пусть Δm есть масса, ΔO —объемъ нѣкоторой такой части.

По мѣрѣ уменьшенія Δm , средняя плотность:

$$\frac{\Delta m}{\Delta O}$$

приближается къ нѣкоторому предѣлу, который называется *плотностью вещества въ точкѣ m* .

Слѣдовательно, *плотность матеріи въ точкѣ m тѣла есть средняя плотность безконечно малаго объема dO , заключающаго точку m внутри себя или на своей поверхности*:

$$\sigma = \frac{dm}{dO}, \dots\dots\dots (31)$$

гдѣ dm есть масса объема dO , а σ плотность матеріи въ точкѣ m . Для тѣла неоднородной плотности σ есть функція координатъ точки m .

Масса всего тѣла выразится интеграломъ:

$$M = \int \int \int \rho dO,$$

взятымъ по всему объему тѣла.

§ 10. Количество движенія тѣла, движущагося поступательно.

Произведеніе изъ скорости тѣла, движущагося поступательно на его массу, называется *количествомъ движенія* (Quantitas motus. Quantité de mouvement. Bewegungsgrösse. The momentum) этого тѣла; оно измѣряется слѣдующею единицею:

$$(\text{единица колич. движ.}) = \frac{(\text{ед. массы}) (\text{ед. длины})}{(\text{ед. времени})}.$$

Подобно однородной силѣ, количество движенія можетъ быть изображено длиною, отложенною отъ какой-либо точки тѣла по направленію скорости; эта длина должна быть во столько разъ болѣе единицы длины, во сколько разъ количество движенія тѣла болѣе единицы количествъ движенія.

Подъ *измѣненіемъ количества движенія* тѣла въ теченіе промежутка времени отъ момента t до другого момента t_1 мы будемъ подразумѣвать геометрическую разность между количествами движенія mv_1 и mv тѣла въ моменты t_1 и t , то есть такое количество движенія, которое нужно геометрически сложить съ mv для того, чтобы получить mv_1 .

Тогда формулѣ (28) можно дать слѣдующее толкованіе:

Величина силы, однородно-приложенной къ тѣлу, движущемуся поступательно, измѣряется отношеніемъ измѣненія количества движенія тѣла въ теченіе бесконечно-малаго промежутка времени къ величинѣ самаго промежутка.

§ 11. Основные принципы въ томъ видѣ, въ какомъ и приведены Ньютономъ.

Честъ открытія начала инерціи и начала параллелограмма силъ въ измѣненіи къ движенію, производимому силами, приписываютъ Галилею

(1564—1642), который высказалъ эти начала и примѣнилъ ихъ къ объясненію движенія брошенныхъ тяжелыхъ тѣлъ въ своемъ сочиненіи: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, изданномъ впервые въ Лейденѣ въ 1638 году.

Повидимому, можетъ показаться страннымъ, что начало инерціи было открыто сравнительно недавно, между тѣмъ, какъ дошедшія до насъ сочиненія Архимеда *), относящіяся къ ученію о равновѣсіи силъ, свидѣлствуютъ о высокомъ состояніи статики еще у древнихъ; такая отсталость ученія о движущемъ дѣйствіи силъ объясняется долгимъ преобладаніемъ философіи Аристотеля, по ученію котораго самое совершенное и начальное движеніе есть круговое.

Изложеніе основныхъ началъ механики въ томъ видѣ, въ какомъ они примѣняются и до сихъ поръ, было сдѣлано Исаакомъ Ньютономъ (1642—1727) въ его книгѣ: *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, изданной въ первый разъ въ 1687 году, то есть 49 лѣтъ спустя послѣ перваго изданія *Discorsi*. Ньютонъ высказываетъ основныя начала въ видѣ трехъ „законовъ движенія“ (*Axiomata, sive Leges Motus*), но предпосылаетъ имъ нѣсколько опредѣленій (*Definitiones*) и кромѣ того присоединяетъ къ нимъ примѣчанія (*Corollaria*). Мы приведемъ здѣсь эти „законы движенія“ и нѣкоторыя изъ опредѣленій въ томъ видѣ, какъ они помѣщены въ *Principia*, но въ иномъ порядкѣ.

Въ первомъ опредѣленіи Ньютонъ даетъ понятіе о количествѣ матеріи тѣла, какъ о произведеніи плотности тѣла на его объемъ; второе опредѣленіе слѣдующее:

Definitio II. Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex velocitate et quantitate materiae conjunctim.

(Количество движенія измѣряется совокупно скоростью и количествомъ матеріи).

Начало инерціи выражается первымъ изъ „законовъ движенія“ совместно съ опредѣленіемъ III-мъ.

Lex. I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi

*) Архимедъ жилъ въ III вѣкѣ до Р. Х. (родился вѣроятно около 287 г., умеръ въ 212 г. до Р. Х.); изъ сочиненій его до насъ дошли слѣдующія:

1) Объ опредѣленіи центровъ инерціи тѣлъ разнаго вида: Ἐπιστῆμων ἰσορροπικῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων.

2) Теорія рычага: *de Aequiponderantibus*.

3) Гипростатика: *de iis quae vehuntur in aqua*, восстановленное *Commentum* въ 1565 г.

uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

(Каждое тѣло пребываетъ въ своемъ состояніи покоя или равномернаго прямолинейнаго движенія, если дѣйствующія на него силы не принуждаютъ его измѣнить такое состояніе).

Въ опредѣленіи III-мъ говорится, что тѣло, предоставленное себѣ, имѣетъ стремленіе къ сохраненію своего состоянія покоя или равномернаго прямолинейнаго движенія вслѣдствіе свойства присущаго матеріи и называемаго: *inertia materiae*.

Силѣ дается слѣдующее опредѣленіе:

Definitio IV. Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

(Приложенная сила есть производимое на тѣло принужденіе къ измѣненію его состоянія покоя или равномернаго прямолинейнаго движенія).

Второй „законъ движенія“ говоритъ о величинѣ дѣйствія, производимаго силою, причемъ предполагается, что представленія о величинѣ силы и о направленіи ея понятны сами по себѣ; „законъ“ этотъ выраженъ въ очень сжатой формѣ:

Lex. II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

(Измѣненіе движенія пропорціонально приложенной движущей силѣ и происходитъ по той прямой линіи, по которой дѣйствуетъ сила).

Эту фразу слѣдуетъ понимать такъ:

Измѣненіе количества движенія (см. § 10) пропорціонально величинѣ приложенной движущей силы и направлено вдоль по ней.

Начало параллелограмма силъ высказано въ слѣдующемъ примѣчаніи:

Corollarium I. Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.

(При совокупномъ дѣйствіи двухъ силъ тѣло описываетъ діагональ параллелограмма въ теченіе того же времени, какъ и стороны параллелограмма при дѣйствіи силъ порознь).

Третій „законъ“—слѣдующій:

Lex. III. Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

(Всякому дѣйствію соответствуетъ противодействие, равное и противоположное; то есть дѣйствія двухъ тѣлъ одно на другое всегда равны и направлены противоположно).

§ 12. Говоря о материальномъ тѣлѣ, подверженномъ дѣйствию однородно-приложенныхъ къ нему силъ и находящемуся, либо въ абсолютномъ поступательномъ движеніи, либо въ абсолютномъ покоѣ, мы не имѣли надобности упоминать ни о формѣ тѣла, ни объ его размѣрахъ, ни о плотности вещества его; въ разсужденіяхъ, приведенныхъ въ §§ 1—9, говорилось только о движеніи и ускореніи которой-либо изъ точекъ тѣла и объ его массѣ.

Распределеніе массы вокругъ той точки поступательно-движущагося тѣла, на движеніе которой мы обращаемъ вниманіе, можетъ быть какое угодно; мы можемъ даже вообразить себѣ, что вся масса тѣла сосредоточена въ этой точкѣ.

Масса, сосредоточенная въ одной геометрической точкѣ, есть воображаемый предметъ, извѣстный подъ именемъ *матерьяльной точки* и имѣющій существенное значеніе въ аналитической механикѣ, какъ будетъ объяснено въ концѣ слѣдующей главы.

ГЛАВА II.

Основныя начала механики свободныхъ матерьяльныхъ точекъ.

§ 13. Матерьяльная точка.

Матерьяльная точка есть масса, которую мы воображаемъ себѣ сосредоточенною въ одной геометрической подвижной точкѣ.

Матерьяльная точка вполне свободна, если она можетъ имѣть какую угодно скорость по какому угодно направленію и притомъ скорость ея не зависитъ отъ скоростей какихъ-либо другихъ матерьяльныхъ точекъ.

§ 14. Основныя начала въ примѣненіи къ свободной матерьяльной точкѣ.

Основныя начала, изложенныя въ предыдущей главѣ, примѣняются къ матерьяльной точкѣ въ слѣдующемъ видѣ:

Основное начало 1-е. Всякая материальная точка, по свойству инерции материи, стремится сохранить ту абсолютную скорость, которую она имеет.
(Начало инерции материальной точки)

Пока на нее не действуют никакие силы, она действительно сохраняет свою абсолютную скорость; если последняя равна нулю, то точка остается в абсолютном покое; если эта скорость не равна нулю, то точка совершает абсолютное движение по прямой линии равномерно.

Каждой силе, действующей на материальную точку, мы приписываем:

- а) *мѣсто приложения*, которое есть сама материальная точка,
 - б) *направление*,
 - в) *величину*, измѣряемую в единицахъ силы (см. § 8, (29));
- представленіе о силѣ приложенной къ материальной точкѣ составляется изъ совокупности этихъ трехъ понятій.

Основное начало 2-е. Ускорение, сообщаемое свободной материальной точкѣ силою, приложенною къ ней, имѣетъ направленіе этой силы и равно величинѣ силы, дѣленной на массу материальной точки.

Основное начало 3-е. Ускорение, сообщаемое свободной материальной точкѣ нѣсколькими одновременно приложенными къ ней силами, есть геометрическая сумма, составленная изъ тѣхъ самыхъ ускореній, которыя сообщаютъ эти силы, приложенныя къ материальной точкѣ порознь.
(Начало параллелограмма силъ)

Эти три начала необходимы и достаточны для того, чтобы, основываясь на нихъ, изложить механику свободныхъ материальныхъ точекъ; первое начало опредѣляетъ свойство, которое мы приписываемъ материальной точкѣ; два послѣдніа начала опредѣляютъ дѣйствіе, производимое на материальную точку силами, приложенными къ ней.

§ 15. Цѣль введенія понятія о матеріальной точкѣ въ механику.

Въ концѣ предыдущей главы было высказано, что, рассматривая движеніе матеріальной точки, мы смотримъ на нее, какъ на представительницу поступательнаго движенія нѣкотораго тѣла, масса котораго, равная массѣ матеріальной точки, распредѣлена какинъ бы то ни было образомъ вокругъ той точки, движеніе которой мы рассматриваемъ; притомъ силы, которыя мы предполагаемъ приложенными къ матеріальной точкѣ, должны быть приложены къ тѣлу однородно.

Понятно, что только для этого не стоило бы вводить въ механику понятіе о матеріальной точкѣ, если бы не имѣлось въ виду дать ей болѣе обширной и существенной роли.

Наиболѣе важныя слѣдствія проистекаютъ изъ того обстоятельства, что матеріальная точка, подобно геометрической, не имѣетъ размѣровъ.

Поэтому, говоря о матеріальной точкѣ, мы избѣгаемъ необходимости входить въ какія-либо разсужденія относительно вращательнаго движенія массы, сосредоточенной въ точкѣ; мы даже не можемъ говорить о вращательномъ движеніи точки, то есть того, что не имѣетъ размѣровъ.

По той же причинѣ терминъ: «однородно-приложенная сила» теряетъ значеніе, если рѣчь идетъ о силѣ, приложенной къ матеріальной точкѣ.

Назначеніе матеріальной точки въ механикѣ состоитъ въ томъ, чтобы замѣнять собою такія тѣла или части тѣла, размѣрами которыхъ мы пренебрегаемъ сравнительно съ длинами, рассматриваемыми въ вопросѣ.

Такъ, напримѣръ, въ тѣхъ вопросахъ, въ которыхъ тѣла рассматриваются какъ собранія частицъ и въ которыхъ нѣтъ надобности принимать въ разсчетъ форму и размѣры частицъ, каждую частицу мы воображаемъ себѣ замѣненной матеріальной точкою, масса которой равна массѣ частицы.

Точно также, въ тѣхъ вопросахъ небесной механики, въ которыхъ нѣтъ надобности принимать въ разсчетъ вращательныхъ

движеній свѣтилаъ вокругъ ихъ осей и можно пренебречь размѣрами тѣлъ по отношенію ко взаимнымъ разстояніямъ между ними, каждое свѣтило замѣняется матеріальною точкою, масса которой равна массѣ свѣтила.

Мы увидимъ далѣе, что даже тогда, когда матеріальныя тѣла принимаются сплошными, намъ приходится, для рѣшенія какихъ-либо кинетическихъ вопросовъ относительно этихъ тѣлъ, или замѣнять каждое тѣло нѣкоторою системою матеріальныхъ точекъ, или основываться въ нашихъ разсужденіяхъ на результатахъ, полученныхъ въ механики системы матеріальныхъ точекъ.

По этимъ причинамъ мы прежде всего должны изложить механику матеріальныхъ точекъ и системъ матеріальныхъ точекъ, что составляетъ содержаніе этой книги.

ГЛАВА III.

Механика свободной матеріальной точки.

§ 16. Равнодѣйствующая нѣсколькихъ силъ, одновременно-приложенныхъ къ матеріальной точкѣ. Силы, взаимно уравновѣшивающіяся.

Механика свободной матеріальной точки основывается на трехъ новыхъ началахъ, выраженныхъ въ § 14-мъ предыдущей главы.

Все, сказанное въ § 3 первой главы относительно однородныхъ силъ, одновременно-приложенныхъ къ одному и тому же матеріальному тѣлу, примѣняется къ силамъ, одновременно-приложеннымъ къ одной матеріальной точкѣ.

Равнодѣйствующею нѣсколькихъ силъ, одновременно-приложенныхъ къ матеріальной точкѣ, называется такая сила, которая на сообщаетъ точкѣ то же самое ускореніе (той же величины того же направленія), какое сообщаютъ ей одновременно-приложенныя силы всѣ вмѣстѣ.

Силы, одновременно-приложенныя къ одной матерьяльной точкѣ, называются *составляющими силами*.

Если ускореніе, сообщаемое матерьяльной точкѣ нѣсколькими одновременно-приложенными къ ней силами, равно нулю, то приложенныя силы называютъ *взаимно-уравновѣшивающимися*, или *силами находящимися въ равновѣсіи*.

Если силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ, находятся въ равновѣсіи въ теченіе конечнаго промежутка времени, то, въ теченіи этого промежутка, матерьяльная точка будетъ находиться въ покоѣ, или въ равномерномъ прямолинейномъ движеніи по инерціи.

Каждую силу, приложенную къ матерьяльной точкѣ, можно изобразить длиною, отложенною по направленію силы отъ точки приложенія ея и заключающею столько единицъ длины, сколько въ изображаемой силѣ заключается единицъ силы.

Длины, изображающія различныя силы, прилагаемыя къ одной и той же матерьяльной точкѣ, будутъ пропорціональны длинамъ, изображающимъ ускоренія, сообщаемыя этими силами этой точкѣ.

Длина, изображающая равнодѣйствующую нѣсколькихъ составляющихъ силъ, будетъ имѣть величину и направленіе геометрической суммы длинъ, изображающихъ составляющія силы.

Пусть F означаетъ величину какой-либо силы, приложенной къ нѣкоторой матерьяльной точкѣ; углы, составляемые направлениемъ ея съ положительными направленіями осей координатъ X, Y, Z , означимъ черезъ $(F, X), (F, Y), (F, Z)$.

Величины:

$$F \cos (F, X), F \cos (F, Y), F \cos (F, Z)$$

называются *проекціями силы F на оси координатъ X, Y, Z* ; онѣ изображаются проекціями на тѣ же оси длины, изображающей силу F .

Такъ какъ проекція на какое-либо направленіе длины, изображающей равнодѣйствующую силу, равняется суммѣ проекцій длинъ, изображающихъ составляющія силы, то отсюда слѣдуетъ, что *проекція на какое-либо направленіе равнодѣйствующей нѣсколькихъ*

составляющих силъ, приложенныхъ къ матеріальной точкѣ, равна суммѣ прожцій составляющихъ силъ на то же направление.

Пусть $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k$ суть величины составляющихъ силъ, а F —величина ихъ равнодѣйствующей; прожціи ихъ на оси координатъ удовлетворяютъ слѣдующимъ равенствамъ:

$$\left. \begin{aligned} F \cos(F, X) &= F_1 \cos(F_1, X) + F_2 \cos(F_2, X) + \dots \\ &\quad \dots + F_k \cos(F_k, X) \\ F \cos(F, Y) &= F_1 \cos(F_1, Y) + F_2 \cos(F_2, Y) + \dots \\ &\quad \dots + F_k \cos(F_k, Y) \\ F \cos(F, Z) &= F_1 \cos(F_1, Z) + F_2 \cos(F_2, Z) + \dots \\ &\quad \dots + F_k \cos(F_k, Z) \end{aligned} \right\}, \dots (32)$$

которыя могутъ быть замѣнены слѣдующимъ символическимъ равенствомъ:

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_k \dots \dots \dots (33)$$

Отсюда, напримѣръ для случая трехъ составляющихъ силъ G, H, K , не лежащихъ въ одной плоскости, слѣдуетъ:

$$F^2 = G^2 + H^2 + K^2 + 2HK \cos(H, K) + 2KG \cos(K, G) + 2GH \cos(G, H),$$

то есть, что равнодѣйствующая представляется діагональю параллелоипеда, построеннаго на сторонахъ, представляющихъ составляющія силы.

Если

$$K = 0,$$

то:

$$F = \sqrt{G^2 + 2GH \cos(G, H) + H^2};$$

равнодѣйствующая двухъ составляющихъ силъ представляется діаго-

налю параллелограмма, построенного на сторонахъ, изображающихъ составляющія силы.

Если G направлена по оси X , H —по оси Y , K —по оси Z , то равнодѣйствующая будетъ представляться діагональю прямоугольнаго параллелепипеда, построеннаго на этихъ составляющихъ силахъ, параллельныхъ осямъ координатъ; изъ чего слѣдуетъ, что проекція какой-либо силы на оси прямоугольныхъ координатъ суть вмѣстѣ съ тѣмъ и составляющія этой силы по этимъ осямъ.

Для косоугольныхъ прямолинейныхъ координатъ проекція какой-либо силы на эти оси не равны составляющимъ ея по этимъ осямъ; пусть G есть составляющая силы F по оси X , H —составляющая по оси Y , K —составляющая по оси Z ; проектируя силу F и составляющія ея на направления осей X , Y , Z , получимъ равенства:

$$\left. \begin{aligned} F \cos (F, X) &= G + H \cos (Y, X) + K \cos (Z, X) \\ F \cos (F, Y) &= G \cos (X, Y) + H + K \cos (Z, Y) \\ F \cos (F, Z) &= G \cos (X, Z) + H \cos (Y, Z) + K \end{aligned} \right\} \dots (34)$$

Для равновѣсія силъ F_1, F_2, \dots, F_r , приложенныхъ къ матеріальной точкѣ, необходимо, чтобы сумма проекцій этихъ силъ на всякое направление равнялась нулю; а для этого достаточно, чтобы равнялись нулю суммы проекцій ихъ на три какія-либо направленія, не лежащія въ одной плоскости, напримѣръ на оси координатъ.

Символически, эти условія можно изобразить равенствомъ:

$$\overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} + \dots + \overline{F_r} = 0 \dots \dots \dots (35)$$

Примѣчаніе. Въ послѣдующихъ параграфахъ очень часто придется пользоваться формулами, заключающими выраженія проекцій силъ, приложенныхъ къ матеріальнымъ точкамъ, на координатныя оси различныхъ координатныхъ системъ.

По большей части приходится пользоваться ортогональными координатными системами, то есть такими, координатныя линіи которыхъ пересекаются взаимно-перпендикулярно; таковы: прямо-

линейная система координатъ съ прямоугольными осями, сферическая система и кругово-цилиндрическая система координатъ.

Для краткости формулъ мы условимся обозначать проеэкціи силъ на координатныя оси тѣми же буквами, которыми обозначаемъ самыя оси, но съ надлежащими значками; напримѣръ, проеэкціи силъ F_1, F_2, \dots, F_k на оси X, Y, Z мы будемъ обозначать такъ:

$$X_1, X_2, \dots, X_k$$

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_k$$

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_k,$$

а проеэкціи на тѣ же оси равнодѣйствующей F этихъ силъ такъ:

$$X = F \cos (F, X) = X_1 + X_2 + \dots + X_k$$

$$Y = F \cos (F, Y) = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k$$

$$Z = F \cos (F, Z) = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_k.$$

Проекціи какой-либо силы F_k на оси X, Y, Z , неизмѣнно-связанныя съ какою-либо неизмѣняемою средою, мы будемъ обозначать такъ:

$$X_k = F_k \cos (F_k, X)$$

$$Y_k = F_k \cos (F_k, Y)$$

$$Z_k = F_k \cos (F_k, Z).$$

Проекціи той же силы на координатныя оси α, β, γ сферической или кругово-цилиндрической системы координатъ мы будемъ обозначать такъ:

$$A_k = F_k \cos (F_k, \alpha)$$

$$B_k = F_k \cos (F_k, \beta)$$

$$C_k = F_k \cos (F_k, \gamma).$$

Такъ какъ во всякой ортогональной системѣ три координатныя оси всякой точки взаимно-перпендикулярны, то проекціи силы на эти оси суть вмѣстѣ съ тѣмъ и составляющія ея по нимъ.

Въ косоугольной прямолинейной системѣ координатъ, также какъ и во всякой криволинейной косоугольной системѣ, подобнаго равенства не существуетъ; означая черезъ X, Y, Z направленія осей прямолинейной косоугольной системы, мы будемъ тогда подъ знаками: Xk, Yk, Zk подразумѣвать *составляющія по этимъ осямъ силы Fk* .

§ 17. Дифференціальныя уравненія движенія свободной матерьяльной точки.

На основаніи приведенныхъ въ § 14 основныхъ началъ, ускореніе свободной матерьяльной точки, масса которой равна m и къ которой приложены силы: $F1, F2, \dots Fk$, должно быть равно величинѣ равнодѣйствующей этихъ силъ, дѣленной на массу точки, и должно быть направлено по равнодѣйствующей; это выражается слѣдующими равенствами:

а) въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X1 + X2 + \dots + Xk \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y1 + Y2 + \dots + Yk \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z1 + Z2 + \dots + Zk \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots (36)$$

б) въ кругово-цилиндрическихъ координатахъ:

$$\left. \begin{aligned} m \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) &= A1 + A2 + \dots + Ak \\ \frac{m}{\rho} \frac{d}{dt} \left(\rho^2 \frac{d\theta}{dt} \right) &= B1 + B2 + \dots + Bk \\ m \frac{d^2s}{dt^2} &= \Gamma1 + \Gamma2 + \dots + \Gammak \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots (37)$$

с) въ сферическихъ координатахъ:

$$\left. \begin{aligned} m \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - r \sin^2 \varphi \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right) &= A \\ m \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) - r \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right) &= B \\ \frac{m}{r \sin \varphi} \frac{d}{dt} \left(r^2 \sin^2 \varphi \frac{d\psi}{dt} \right) &= \Gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (38)$$

Каждое изъ этихъ равенствъ выражаетъ, что проекція на одну изъ координатныхъ осей равнодѣйствующей F равняется, помноженной на массу, проекціи ускоренія на ту же ось.

д) Въ прямолинейныхъ *косугольных* координатахъ равенства:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y; \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z$$

выражаютъ, что *составляющія* по осямъ координатъ силы F равняются, помноженнымъ на массу, *составляющимъ* ускоренія.

е) Проекція равнодѣйствующей на бинормаль *) траекторіи, описываемой матеріальною точкою, должна быть равна нулю, проекціи же ея на направленіе скорости и на направленіе радіуса кривизны траекторіи должны быть пропорціональны соответствующимъ проекціямъ ускоренія; а именно:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F \cos(Fv) \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F \cos(F\rho) \\ 0 &= F \cos(Fb) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (39)$$

Если извѣстно движеніе матеріальной точки, то, зная массу ея, мы можемъ, пользуясь вышеприведенными совокупностями равенствъ,

*) Бинормаль или вторая главная нормаль перпендикулярна къ плоскости кривизны.

опредѣлить для всякаго момента движенія величину и направленіе равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ матеріальной точкѣ.

На этомъ основаніи могутъ быть рѣшены, напримѣръ, слѣдующіе вопросы.

Примѣръ 1-й. Тяжелая матеріальная точка описываетъ окружность радіуса R , находящуюся въ вертикальной плоскости; скорость точки постоянна. Определить величину и направленіе той силы, которая, слагаясь съ вѣсомъ матеріальной точки, заставляетъ ее совершать такое движеніе.

Возьмемъ центръ окружности за начало координатъ, ось Y направимъ вертикально внизъ, ось X — горизонтально въ плоскости круга.

Движеніе точки по окружности радіуса R , съ постоянною скоростью a , выражается въ прямоугольныхъ координатахъ, такъ:

$$x = R \cos\left(\frac{a}{R}t\right); \quad y = R \sin\left(\frac{a}{R}t\right);$$

проекціи силъ тяжести на оси X и Y суть:

$$X_1 = 0; \quad Y_1 = mg;$$

проекціи же другой силы опредѣлятся изъ уравненій (36) и окажутся имѣющими слѣдующія величины:

$$X_2 = -m \frac{a^2}{R^3} x; \quad Y_2 = -m \frac{a^2}{R^3} y - mg = -m \frac{a^2}{R^3} \left(y + \frac{gR^3}{a^2}\right).$$

Изъ этихъ выраженій видно, что сила F_2 постоянно направлена къ точкѣ C , находящейся на отрицательной оси Y въ разстояніи $g \frac{R^3}{a^2}$ отъ начала координатъ; величина же этой силы равна:

$$F_2 = m \frac{a^2}{R^3} \overline{MC},$$

гдѣ \overline{MC} есть разстояніе между матеріальною точкою M и точкою C .

Примѣръ 2-й. Матеріальная точка совершаетъ слѣдующее движеніе:

$$x = ae^{-kt} \cos \omega t, \quad y = be^{-kt} \sin \omega t,$$

находясь подъ вліяніемъ двухъ силъ: F_1 , направленной къ началу координатъ, и F_2 , направленной по касательной къ траекторіи. Требуется определить эти силы.

Окажется, что:

$$F_1 = m(\omega^2 + k^2) \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$F_2 = 2kmv$$

и что сила F_2 направлена противоположно скорости.

Слѣдовательно, первая сила есть притяженіе, пропорціональное разстоянію точки отъ начала координатъ, вторая же сила пропорціональна скорости точки и направлена противоположно скорости.

Величина и направленіе силы, приложенной къ матеріальной точкѣ, могутъ измѣняться:

- а) съ измѣненіемъ положенія матеріальной точки въ пространствѣ,
- б) въ той же точкѣ пространства съ теченіемъ времени;
- в) кромѣ того, они могутъ зависѣть отъ величины и направленія скорости матеріальной точки.

(Такъ, напримѣръ, сила притяженія, дѣйствующая по закону тяготѣнія на какую-либо матеріальную точку со стороны однороднаго шара, имѣетъ величину, обратно пропорціональную квадрату разстоянія точки до центра шара; направлена же эта сила къ центру шара. Если шаръ сохраняетъ неподвижное положеніе въ пространствѣ, то сила притяженія имъ матеріальной точки будетъ функціею только координатъ точки.

Если же центръ шара будетъ совершать какое-либо движеніе въ пространствѣ, то сила притяженія его въ каждой точкѣ пространства будетъ измѣняться съ теченіемъ времени.

Примѣрами силъ, зависящихъ отъ скоростей, могутъ служить сопротивленія жидкостей и газовъ движенію погруженныхъ въ нихъ тѣлъ; такія силы называются *сопротивленіями среды*; измѣненіи къ матеріальной точкѣ, сопротивленіе среды въ нѣкоторыхъ случаяхъ принимаютъ противоположныиъ скорости и зависящихъ отъ скорости точки и плотности среды).

Обще говоря, силы, приложенныя къ матеріальной точкѣ, въкоторыя функціи времени, координатъ точки и скорости ея. этому вторыя части равенствъ (36) суть вѣкторныя функціи i , координатъ x, y, z и проецій скорости на оси координатъ;

а слѣдовательно, эти равенства суть три совокупныя дифференціальныя уравненія второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= \Phi_1 \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= \Phi_2 \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= \Phi_3 \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (40)$$

(Φ_1, Φ_2, Φ_3 означаютъ нѣкоторыя функціи величинъ, заключенныхъ въ скобкахъ)

Эти уравненія называются *дифференціальными уравненіями движенія матеріальной точки, выраженными въ прямоугольных координатахъ*.

Если вторыя части равенствъ (37) будутъ выражены въ функціяхъ времени, кругово-цилиндрическихъ координатъ ρ, θ, z , и ихъ производныхъ по времени: ρ', θ', z' , то будемъ имѣть дифференціальныя уравненія движенія матеріальной точки въ кругово-цилиндрическихъ координатахъ:

$$\left. \begin{aligned} m \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) &= \Theta_1 \left(t, \rho, \theta, z, \frac{d\rho}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \\ \frac{m d \left(\rho^2 \frac{d\theta}{dt} \right)}{\rho} &= \Theta_2 \left(t, \rho, \theta, z, \frac{d\rho}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= \Theta_3 \left(t, \rho, \theta, z, \frac{d\rho}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots (41)$$

гдѣ $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ означаютъ нѣкоторыя функціи величинъ, заключенныхъ въ скобкахъ.

Подобнымъ образомъ будемъ имѣть дифференціальныя уравненія движенія матеріальной точки въ сферическихъ координатахъ, если вторыя части равенства (38) будутъ выражены функціями сферическихъ координатъ и ихъ производныхъ по времени.

Если вторыя части равенствъ (39) будутъ выражены функціями времени, скорости и величинъ, опредѣляющихъ положеніе точки въ

пространствѣ, то эти равенства будутъ представлять собою особый видъ дифференціальныхъ уравненій движенія матеріальной точки.

Вообще дифференціальные уравненія движенія свободной матеріальной точки могутъ быть представлены подѣ весьма различнымъ видою, но какъ бы они ни были представлены, она *суть аналитическія выраженія того, что ускореніе матеріальной точки имѣетъ направленіе и равно дѣленной на массу величинѣ равнодѣйствующей приложенныхъ къ точкѣ силъ, выражаемыхъ нѣкоторыми функциями времени, скорости и величинъ, опредѣляющихъ положеніе матеріальной точки въ пространство.*

§ 18. Интегралы дифференціальныхъ уравненій движенія свободной матеріальной точки; число постоянныхъ произвольныхъ; начальное положеніе и начальная скорость матеріальной точки.

Если извѣстны силы, приложенныя къ матеріальной точкѣ данной массы, въ функціяхъ времени, скорости и величинъ, опредѣляющихъ положеніе точки въ пространствѣ, и требуется опредѣлить движеніе, совершаемое матеріальною точкою подѣ вліяніемъ этихъ силъ, то надо сначала выбрать систему координатъ, наиболѣе удобную для рѣшенія вопроса, и составить дифференціальные уравненія движенія точки въ этихъ координатахъ.

Напримѣръ:

Примѣръ 3-й. Матеріальная точка движется въ однородной средѣ, оказывающей сопротивленіе движенію, пропорціональное первой степени скорости; каждая изъ трехъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей координатъ притягиваетъ матеріальную точку съ силою, перпендикулярною къ плоскости и пропорціональною первой степени разстоянія отъ нея. Пусть m , λm , μm , νm суть коэффициенты: сопротивленія среды и притяженій перпендикулярныхъ къ плоскостямъ YZ , ZX , XU . Требуется опредѣлить движеніе.

Дифференціальныя уравненія движенія, съ составленія которыхъ начинается процессъ рѣшенія вопроса, мы напишемъ въ этомъ случаѣ въ прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатахъ.

Сопротивленіе движенію, равное $2k\dot{x}$, направлено противоположно скорости, поэтому проекція его на ось X равна: $-2mk\dot{x}$.

Изъ трехъ притяженій одно параллельно оси X и направлено въ отрицательную сторону ея, если $X > 0$; два другія притяженія перпендикулярны къ этой оси.

Поэтому одно изъ дифференціальныхъ уравненій движенія будетъ слѣдующее:

$$mx'' = -2mkx' - m\lambda x;$$

а два другія:

$$my' = -2mky' - m\mu y; \quad mz' = -2mkz' - m\nu z.$$

Для большей опредѣлительности изложенія мы будемъ предполагать, что дифференціальныя уравненія составлены въ прямоугольныхъ координатахъ; но все, что будетъ здѣсь сказано, можетъ быть примѣнено съ весьма незначительными измѣненіями ко всякимъ другимъ координатамъ.

Составленные дифференціальныя уравненія должны послужить для опредѣленія функцій $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, опредѣляющихъ координаты движущейся точки для всякаго момента опредѣляемаго движенія.

Эти функціи должны удовлетворять дифференціальнымъ уравненіямъ для всякаго момента движенія, обращая ихъ въ тождества; то есть функція времени, заключающаяся во второй части каждаго изъ тождествъ:

$$mf_1'(t) = \Phi_1(t, f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$$

$$mf_2'(t) = \Phi_2(t, f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$$

$$mf_3'(t) = \Phi_3(t, f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$$

должна быть тождественна съ функціею времени, заключающеюся въ первой части его.

Для опредѣленія функцій f_1 , f_2 , f_3 мы можемъ пользоваться составленными дифференціальными уравненіями и всѣми равенствами, изъ нихъ получаемыми.

Дифференціальныя уравненія даютъ намъ только выраженія вторыхъ производныхъ координатъ въ извѣстныхъ намъ функціяхъ прочихъ семи величинъ (времени, координатъ и ихъ первыхъ производныхъ).

Взявъ отъ дифференціальныхъ уравненій производныя по времени и замѣнивъ въ полученныхъ равенствахъ вторыя производныя координатъ ихъ выраженіями, мы получимъ выраженія третьихъ производныхъ координатъ въ функціяхъ тѣхъ же семи величинъ: t, x, y, z, x', y', z' .

Продолжая такимъ же образомъ далѣе, мы выразимъ производныя какого угодно порядка (выше 1-го) отъ координатъ по времени въ извѣстныхъ намъ функціяхъ отъ t, x, y, z, x', y', z' .

Пусть t_0 есть какой-либо моментъ движенія; x_0, y_0, z_0 , — координаты матеріальной точки и x'_0, y'_0, z'_0 , — проекціи на оси координатъ скорости точки въ этотъ моментъ; какъ сейчасъ сказано, производныя второго и высшихъ порядковъ въ этотъ моментъ выражаются нѣкоторыми извѣстными намъ функціями семи величинъ $t_0, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0$; означимъ величины этихъ производныхъ такъ:

$$x_0'', y_0'', z_0'', x_0''', y_0''', z_0''', \dots x_0^{(n)}, y_0^{(n)}, z_0^{(n)}, \dots$$

Функціи $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$, выражающія непрерывно измѣняющіяся координаты движущейся точки, должны быть непрерывными функціями времени; поэтому мы можемъ примѣнить къ нимъ Тейлорово разложеніе въ рядъ по восходящимъ степенямъ разности $(t - t_0)$; означимъ эту разность черезъ ϑ ; ряды будутъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t) = x_0 + x'_0 \vartheta + x_0'' \frac{\vartheta^2}{1.2} + x_0''' \frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \dots \\ y &= f_2(t) = y_0 + y'_0 \vartheta + y_0'' \frac{\vartheta^2}{1.2} + y_0''' \frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \dots \\ z &= f_3(t) = z_0 + z'_0 \vartheta + z_0'' \frac{\vartheta^2}{1.2} + z_0''' \frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \dots \end{aligned} \right\}; \dots \quad (42)$$

но такъ какъ вторыя и высшія производныя: $x_0'', y_0'', z_0'', x_0''', \dots$ суть функціи отъ $t_0, x_0, y_0, z_0, t'_0, x'_0, y'_0, z'_0$, то эти ряды представляютъ нѣкоторыя функціи отъ $t, t_0, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0$:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t, t_0, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0, \\ y &= f_2(t, t_0, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0, \\ z &= f_3(t, t_0, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (43)$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ возможность, исходя изъ дифференціальнаго уравненія движенія, получить искомыя функции въ видѣ рядовъ, заключающихъ кромѣ t , еще t_0 , x_0 , y_0 , z_0 , x_0' , y_0' , z_0' .

Примѣнимъ этотъ приемъ къ слѣдующимъ тремъ примѣрамъ:

Примѣръ 4-й. Сила, приложенная къ матерьяльной точкѣ, имѣетъ постоянную величину и направленіе, такъ что проэкціи ея на оси координатъ равны постояннымъ величинамъ A , B , C .

Дифференціальныя уравненія движенія въ этомъ случаѣ будутъ:

$$mx'' = A, \quad my'' = B, \quad mz'' = C.$$

Производныя третьяго и высшихъ порядковъ будутъ равны нулю, а потому:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + x_0'(t - t_0) + \frac{A(t - t_0)^2}{m \cdot 1.2} \\ y &= y_0 + y_0'(t - t_0) + \frac{B(t - t_0)^2}{m \cdot 1.2} \\ z &= z_0 + z_0'(t - t_0) + \frac{C(t - t_0)^2}{m \cdot 1.2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (44)$$

Примѣръ 5-й. Силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ, суть притяженія къ плоскостямъ координатъ, такія же, какъ въ примѣрѣ 3-мъ, но коэффициенты пропорціональности суть: mx_1^2 , mx_2^2 , mx_3^2 .

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$mx'' = -mx_1^2x; \quad my'' = -mx_2^2y; \quad mz'' = -mx_3^2z.$$

Чтобы составить выраженіе для x , мы составляемъ сначала выраженія для производныхъ:

$$\begin{aligned} x'' &= -x_1^2x & x''' &= -x_1^2x' \\ x^{(4)} &= -x_1^2x'' = x_1^4x & x^{(5)} &= -x_1^2x''' = x_1^4x' \\ &\dots & &\dots \end{aligned}$$

рядъ, выражающій x , будетъ слѣдующій:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_0'\theta - x_1^2x_0\frac{\theta^2}{1.2} - x_1^2x_0'\frac{\theta^3}{1.2.3} + x_1^4x_0'\frac{\theta^4}{1.2.3.4} + \\ &\quad + x_1^4x_0'\frac{\theta^5}{1.2.3.4.5} - \dots \end{aligned}$$

можно представить такъ:

$$x = x_0 \left(1 - \frac{(x_1 \vartheta)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(x_1 \vartheta)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \right) + \frac{x_0'}{x_1} \left(x_1 \vartheta - \frac{(x_1 \vartheta)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(x_1 \vartheta)^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \right).$$

Легко видѣть, что рядъ, помноженный на x_0 , равняется $\cos x_1 \vartheta$, а x_1 , помноженный на $(x_1' : x_1)$, равняется синусу той же дуги, слѣдовательно:

$$x = x_0 \cos x_1 \vartheta + \frac{x_0'}{x_1} \sin x_1 \vartheta \dots \dots \dots (45, a)$$

Такъ же найдемъ выраженія для y и z :

$$y = y_0 \cos x_2 \vartheta + \frac{y_0'}{x_2} \sin x_2 \vartheta, \dots \dots \dots (45, b)$$

$$z = z_0 \cos x_3 \vartheta + \frac{z_0'}{x_3} \sin x_3 \vartheta \dots \dots \dots (45, c)$$

Чтобы упростить примѣненіе этого приема къ дифференціальнымъ уравнѣніямъ примѣра 3-го, мы преобразуемъ ихъ слѣдующимъ образомъ.

Сокративъ m , помножимъ каждое на e^{kt} ;
вѣдемъ черезъ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ слѣдующія произведенія:

$$\varphi_1 = x e^{kt}, \quad \varphi_2 = y e^{kt}, \quad \varphi_3 = z e^{kt},$$

тогда x_1^2, x_2^2, x_3^2 слѣдующія разности

$$x_1^2 = \lambda - k^2, \quad x_2^2 = \mu - k^2, \quad x_3^2 = \nu - k^2;$$

а дифференціальныя уравненія 3-го примѣра примутъ такой видъ:

$$\varphi_1'' = -x_1^2 \varphi_1, \quad \varphi_2'' = -x_2^2 \varphi_2, \quad \varphi_3'' = -x_3^2 \varphi_3,$$

таковъ съ видомъ уравненій пятого примѣра: по этому нетрудно получить для x, y, z слѣдующія выраженія:

$$\left. \begin{aligned} & e^{-k\vartheta} \left(x_0 \cos (\vartheta \sqrt{\lambda - k^2}) + \frac{x_0' + kx_0}{\sqrt{\lambda - k^2}} \sin (\vartheta \sqrt{\lambda - k^2}) \right) \\ & e^{-k\vartheta} \left(y_0 \cos (\vartheta \sqrt{\mu - k^2}) + \frac{y_0' + ky_0}{\sqrt{\mu - k^2}} \sin (\vartheta \sqrt{\mu - k^2}) \right) \\ & e^{-k\vartheta} \left(z_0 \cos (\vartheta \sqrt{\nu - k^2}) + \frac{z_0' + kz_0}{\sqrt{\nu - k^2}} \sin (\vartheta \sqrt{\nu - k^2}) \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (46)$$

Вмѣсто того, чтобы опредѣлять функціи f_1, f_2, f_3 путемъ послѣдовательнаго дифференцированія составленныхъ дифференціальнахъ уравненій, мы можемъ идти къ той же цѣли путемъ прямо-противоположнымъ.

Имѣя выраженія вторыхъ производныхъ координатъ въ функціяхъ: времени, координатъ и ихъ первыхъ производныхъ, мы можемъ искать выраженія первыхъ производныхъ координатъ въ функціяхъ времени и координатъ; для этого надо данныя дифференціальныя уравненія подвергнуть такимъ преобразованіямъ, чтобы, вмѣсто нихъ, получились три равносильныя *) имъ дифференціальныя уравненія такого вида:

$$^{**)} \frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi_3}{dt} = 0, \dots \dots \dots (47)$$

*) Уравненія (47) равносильны дифференціальнымъ уравненіямъ движенія матерьяльной точки въ томъ смыслѣ, что, если мы рѣшимъ первыя относительно x'', y'', z'' , то получимъ послѣднія, то есть:

$$x'' = \frac{\phi_1}{m}, \quad y'' = \frac{\phi_2}{m}, \quad z'' = \frac{\phi_3}{m};$$

а потому, если въ уравненіяхъ (47) замѣнимъ x'', y'', z'' , функціями ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 , дѣленными на m , то первыя части этихъ уравненій обратятся въ нуль черезъ взаимное сокращеніе всѣхъ членовъ.

**) Знакъ:

$$\frac{d\varphi}{dt}$$

служить для обозначенія полной производной по времени отъ функціи $\varphi(t, x, y, z, x', y', z')$; то есть:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \frac{dy'}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z'} \frac{dz'}{dt}.$$

Частныя же производныя функціи φ по входящимъ въ нее переменнымъ величинамъ мы будемъ обозначать помощію круглыхъ ∂ ; напримѣръ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

есть производная по t , явно заключающемуся въ функціи φ .

гдѣ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ суть нѣкоторыя функціи отъ t, x, y, z, x', y', z' ; интегрируя эти уравненія, мы получимъ равенства:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(t, x, y, z, x', y', z') &= C_1 \\ \varphi_2(t, x, y, z, x', y', z') &= C_2 \\ \varphi_3(t, x, y, z, x', y', z') &= C_3 \end{aligned} \right\}, \dots\dots\dots (48)$$

которыя должны служить для выраженія x', y', z' въ функціяхъ отъ $t, x, y, z, C_1, C_2, C_3$.

Величины C_1, C_2, C_3 суть произвольныя постоянныя, введенныя тремя произведенными интегрированіями и не заключающіяся въ дифференціальныхъ уравненіяхъ.

Каждое изъ равенствъ вида (48) называется *первымъ интеграломъ дифференціальныхъ уравненій движенія*.

Если изъ трехъ первыхъ интеграловъ, послѣ какихъ-либо преобразованій, могутъ быть получены три равносильныя имъ уравненія слѣдующаго вида:

$$\frac{d\Phi_1}{dt}=0, \quad \frac{d\Phi_2}{dt}=0, \quad \frac{d\Phi_3}{dt}=0, \dots\dots\dots (49)$$

гдѣ Φ_1, Φ_2, Φ_3 суть функціи отъ $t, x, y, z, C_1, C_2, C_3$, то изъ нихъ, послѣ новыхъ интегрированій, получимъ *вторые интегралы* дифференціальныхъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) &= \Gamma_1 \\ \Phi_2(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) &= \Gamma_2 \\ \Phi_3(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) &= \Gamma_3 \end{aligned} \right\}, \dots\dots\dots (50)$$

гдѣ $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ суть три постоянныя произвольныя.

Полученные вторые интегралы должны служить для выраженія x, y, z въ функціяхъ времени и шести постоянныхъ произвольныхъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= \psi_1(t, C_1, C_2, C_3, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) \\ y &= \psi_2(t, C_1, C_2, C_3, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) \\ z &= \psi_3(t, C_1, C_2, C_3, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

Выраженія для x' , y' , z' получаются, или непосредственно изъ выраженій (51), взявъ производныя по времени отъ функцій ψ_1, ψ_2, ψ_3 :

$$x' = \psi_1'(t), y' = \psi_2'(t), z' = \psi_3'(t), \dots \dots \dots (52)$$

или изъ первыхъ интеграловъ (48), если рѣшить ихъ относительно x' , y' , z' и замѣнить x, y, z функціями ψ_1, ψ_2, ψ_3 ; выраженія, полученныя тѣмъ и другимъ путемъ, должны быть одинаковы, такъ какъ функціи (51) должны тождественно удовлетворять уравненіямъ (49) или равносильнымъ имъ интеграламъ (48).

Выраженія для x'' , y'' , z'' , полученныя чрезъ двукратное дифференцированіе функцій ψ_1, ψ_2, ψ_3 по времени:

$$x'' = \psi_1''(t), y'' = \psi_2''(t), z'' = \psi_3''(t), \dots \dots \dots (53)$$

должны быть тождественны съ выраженіями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{m} \Phi_1(t, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_1', \psi_2', \psi_3') \\ \frac{1}{m} \Phi_2(t, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_1', \psi_2', \psi_3') \\ \frac{1}{m} \Phi_3(t, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_1', \psi_2', \psi_3') \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots (54)$$

потому что функціи (51) должны тождественно удовлетворять дифференціальнымъ уравненіямъ движенія.

И такъ далѣе.

Равенства (48) и (51) должны быть справедливы для всякаго момента движенія; примѣняя ихъ къ моменту t_0 , въ который координаты точки суть x_0, y_0, z_0 , а прожекціи скорости — x'_0, y'_0, z'_0 , мы получимъ слѣдующую зависимость между этими постоянными и постоянными произвольными $C_1, C_2, \dots \dots \Gamma_3$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(t_0, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0) = C_1 \\ \varphi_2(t_0, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0) = C_2 \\ \varphi_3(t_0, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0) = C_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (55)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(t_0, x_0, y_0, z_0, C_1, C_2, C_3) &= \Gamma_1 \\ \Phi_2(t_0, x_0, y_0, z_0, C_1, C_2, C_3) &= \Gamma_2 \\ \Phi_3(t_0, x_0, y_0, z_0, C_1, C_2, C_3) &= \Gamma_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (56)$$

Отсюда слѣдуетъ, что x_0, y_0, \dots, z_0' суть функціи $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_3$ отъ $t_0, C_1, C_2, C_3, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \psi_1(t_0) \\ y_0 &= \psi_2(t_0) \\ z_0 &= \psi_3(t_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (57)$$

$$\left. \begin{aligned} x_0' &= \psi_1'(t_0) \\ y_0' &= \psi_2'(t_0) \\ z_0' &= \psi_3'(t_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (58)$$

гдѣ какъ t_0 есть произвольно-выбранный моментъ движенія и C_1, \dots, Γ_3 суть востоянныя произвольныя, то и $x_0, y_0, \dots, y_0', z_0'$ величины произвольныя.

Слѣдовательно, функціи времени, выражающія координаты куцейся свободной матерьяльной точки и удовлетворяющія дифференціальнымъ уравненіямъ движенія, заключающія въ себѣ шесть постоянныхъ произвольныхъ, вследствие координаты и проекціи скорости точки могутъ быть яны по произволу въ одинъ изъ моментовъ движенія.

Функціи ψ_1, ψ_2, ψ_3 даютъ тѣ же самыя величины для координатъ x, y, z въ моментъ t , какія даютъ функціи f_1, f_2, f_3 (43), только удовлетворены условія (55), (56), или равносильныя (57), (58); въ этомъ можемъ убѣдиться слѣдующимъ образомъ. Разложимъ функціи ψ_1, ψ_2, ψ_3 въ ряды по возрастающимъ разности $(t-t_0)=\theta$; получимъ, наприимѣръ для ψ_1 , ующій рядъ:

$$\psi_1(t) = \psi_1(t_0) + \psi_1'(t_0)\theta + \psi_1''(t_0)\frac{\theta^2}{1.2} + \psi_1'''(t_0)\frac{\theta^3}{1.2.3} + \dots;$$

но:

$$\psi_1(t_0) = x_0 = f_1(t_0), \quad \psi_1'(t_0) = x_0' = f_1'(t_0),$$

$$\psi_1''(t_0) = \frac{1}{m} \phi_1(t_0, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0') = f_1''(t_0);$$

также убѣдимся, что $\psi_1'''(t_0) = f_1'''(t_0)$ и такъ далѣе; поэтому предыдущій рядъ есть ни что иное, какъ разложеніе первой изъ функцій (43) по восходящимъ степенямъ разности $(t - t_0) = \theta$, а потому:

$$\psi_1(t, C_1, C_2, C_3, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) = f_1(t, t_0, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0'),$$

то есть функціи ψ_1, ψ_2, ψ_3 обращаются въ функціи f_1, f_2, f_3 , если произвольныя постоянныя $C_1, C_2, \dots, \Gamma_3$ будутъ замѣнены величинами $t_0, x_0, y_0, \dots, z_0'$ при посредствѣ равенствъ (55) (56).

Изъ этого видно, что оба указанные нами приѣма даютъ результаты тождественныя.

Примѣнимъ второй приѣмъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ приѣма 4-го; мы легко найдемъ, что первые интегралы суть:

$$x' - \frac{A}{m} t = C_1, \quad y' - \frac{B}{m} t = C_2, \quad z' - \frac{C}{m} t = C_3;$$

вторые интегралы:

$$x - \frac{A}{m} \frac{t^2}{2} - C_1 t = \Gamma_1, \quad y - \frac{B}{m} \frac{t^2}{2} - C_2 t = \Gamma_2, \quad z - \frac{C}{m} \frac{t^2}{2} - C_3 t = \Gamma_3.$$

Составивъ равенства (55) (56) и исключивъ произвольныя постоянныя изъ полученныхъ вторыхъ интеграловъ, мы приведемъ послѣдніе къ виду (44).

Дифференціальныя уравненія движенія свободной матеріальной точки могутъ быть замѣнены совокупностью шести дифференціальныхъ уравненій перваго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z' \\ \frac{dx'}{dt} &= \frac{\phi_1}{m}, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{\phi_2}{m}, \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{\phi_3}{m} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (59)$$

дое изъ равенствъ вида:

$$\varphi(t, x, y, z, x', y', z') = C,$$

ая производная первой части котораго:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial z'} \frac{dz'}{dt}$$

щается въ нуль тождественно, когда вмѣсто производныхъ отъ x, x', y, y', z, z' будутъ подставлены равныя имъ вторыя части уравненій, называется интеграломъ этихъ дифференціальныхъ уравненій. Чтобы найти функціи времени, выражающія x, y, z, x', y', z' тождественно удовлетворяющія уравненіямъ (59), необходимо шесть такихъ различныхъ интеграловъ:

$$\varphi_1 = C_1, \varphi_2 = C_2, \varphi_3 = C_3, \varphi_4 = C_4, \varphi_5 = C_5, \varphi_6 = C_6, \dots \dots \dots (60)$$

полныхъ производныхъ которыхъ по времени:

$$= 0 \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi_3}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi_4}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi_5}{dt} = 0 \quad \dots \dots (60 \text{ bis})$$

чатся дифференціальныя уравненія (59), если шесть уравненій (60 bis) будутъ рѣшены относительно производныхъ:

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}.$$

Рѣшивъ интегралы (60) относительно x, y, \dots, z' , мы получимъ выраженія послѣднихъ въ функціяхъ t и шести произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_6 .

Если выраженія для x, y, z суть:

$$x = \psi_1, \quad y = \psi_2, \quad z = \psi_3, \dots \dots \dots (61)$$

вторыя части суть функція отъ t, C_1, C_2, \dots, C_6 , то выраженія для x', y', z' будутъ:

$$x' = \psi_1', \quad y' = \psi_2', \quad z' = \psi_3', \dots \dots \dots (61 \text{ bis})$$

такъ какъ уравненія:

$$\frac{dx}{dt}=x', \quad \frac{dy}{dt}=y', \quad \frac{dz}{dt}=z'$$

должны быть удовлетворены тождественно.

Всякое равенство вида:

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6)=C \dots\dots\dots (62)$$

есть также интеграль уравненій (59); въ самомъ дѣлѣ полная производная первой части его:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_6} \frac{d\varphi_6}{dt}$$

обращается въ нуль тождественно при замѣщеніи производныхъ отъ x, y, \dots, z' вторыми частями уравненій (59), такъ какъ такое замѣщеніе обращаетъ въ нуль полныя производныя отъ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6$.

Изъ этого слѣдуетъ, что если совокупныя дифференціальныя уравненія (59) имѣютъ шесть независимыхъ интеграловъ, то они имѣютъ еще кромѣ того безчисленное множество интеграловъ, представляющихъ собою комбинаціи шести первыхъ.

Всякій новый интеграль:

$$\psi(t, x, y, z, x', y', z)=C$$

совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (59) можетъ быть представленъ подѣ видомъ (62); въ самомъ дѣлѣ, подставивъ въ φ вмѣсто x, y, \dots, z' ихъ выраженія (61) и (61 bis), мы обратимъ φ въ нѣкоторую функцію f отъ t, C_1, C_2, \dots, C_6 ; замѣнимъ C_1, C_2, \dots, C_6 черезъ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6$:

$$\varphi=f(t, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6);$$

полная производная отъ φ или отъ f по t будетъ:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_6} \frac{d\varphi_6}{dt};$$

а должна тождественно обращаться въ нуль, когда производныя x, y, z, \dots, z' будутъ замѣнены вторыми частями уравненій (59); но тогда обращаются въ нуль также и полныя производныя функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6$; поэтому должно быть:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0;$$

значитъ

$$\varphi = f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6) = C.$$

Произвольная постоянная C есть такая же функция произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_6 :

$$C = f(C_1, C_2, \dots, C_6).$$

Слѣдовательно, можно сказать, что совокупныя дифференціальныя уравненія (59) имютъ шесть самостоятельныхъ интеграловъ съ шестью независимыми произвольными постоянными и безчисленное множество интеграловъ, представляющихъ комбинаціи первыхъ; произвольныя постоянныя послѣднихъ суть кія же комбинаціи независимыхъ произвольныхъ постоянныхъ.

Къ этому надо еще прибавить: что любые шесть интеграловъ могутъ играть роль самостоятельныхъ, если изъ нихъ, путемъ полного дифференцированія по времени, могутъ быть получены дифференціальныя уравненія (59), какъ указано относительно интеграловъ (60).

Если найдены будутъ шесть самостоятельныхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій (59), то, исключивъ изъ нихъ x', y', z' , получимъ вторые интегралы дифференціальныхъ уравненій движенія.

Напримѣръ шесть самостоятельныхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z'$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{A}{m}, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{B}{m}, \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{C}{m}$$

въ три:

$$x' - \frac{A}{m}t = C_1, \quad y' - \frac{B}{m}t = C_2, \quad z' - \frac{C}{m}t = C_3, \dots \dots \dots (63)$$

полученные выше, и три новые:

$$(x')^2 - 2 \frac{A}{m} x = C_4, \quad (y')^2 - 2 \frac{B}{m} y = C_5, \quad (z')^2 - 2 \frac{C}{m} z = C_6 \dots (64)$$

По исключеніи x' , y' , z' изъ (63) и (64), мы получимъ вторые интегралы дифференціальныхъ уравненій примѣра 4-го подъ слѣдующимъ видомъ.

$$x = \frac{A}{m} \frac{t^2}{2} + C_1 t + \frac{C_4^2 - C_4}{2A} m, \quad y = \frac{B}{m} \frac{t^2}{2} + C_2 t + \frac{C_5^2 - C_5}{2B} m,$$

$$z = \frac{C}{m} \frac{t^2}{2} + C_3 t + \frac{C_6^2 - C_6}{2C} m.$$

Въ нѣкоторыхъ вопросахъ можно получить всѣ шесть самостоятельныхъ интеграловъ, но трудно исключить изъ нихъ x' , y' , z' , тогда совокупность шести первыхъ интеграловъ представляетъ собою рѣшеніе вопроса.

Во всякомъ случаѣ полное рѣшеніе какого-либо вопроса о движеніи свободной матеріальной точки заключаетъ въ себѣ шесть независимыхъ постоянныхъ произвольныхъ или величины t_0 , x_0 , y_0 , z_0 , x_0' , y_0' , z_0' .

Моментъ t_0 называютъ *начальнымъ моментомъ времени*, хотя онъ можетъ быть взятъ гдѣ угодно на протяженіи всего времени, занимаемаго разсматриваемымъ движеніемъ; величины x_0 , y_0 , z_0 называются координатами *начальнаго положенія* матеріальной точки, а величины x_0' , y_0' , z_0' — проеціями на оси координатъ *начальной скорости* точки.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда будетъ возможно и нужно для упрощенія формулъ, будемъ считать время отъ начальнаго момента, полагая $t_0 = 0$; тогда начальныя координаты будемъ обозначать буквами a , b , c , а проеціи начальной скорости буквами α , β , γ .

§ 19. Случай прямолинейныхъ движеній матеріальной точки.

Начнемъ съ разсмотрѣнія тѣхъ случаевъ, въ которыхъ сила, приложенная къ матеріальной точкѣ, имѣетъ неизмѣнное направле-

в пространствах и начальная скорость параллельна тому же влечению; тогда материальная точка совершает движение по прямой, параллельной этому направлению.

В самом деле, если ось X сдвигается параллельно этому влечению и проведем ее через начальное положение материальной точки, то дифференциальные уравнения движения будут:

$$mx'' = X, \quad my'' = 0, \quad mz'' = 0;$$

и вторые интегралы последних двух уравнений очевидно следующие:

$$y' = 0, \quad z' = 0,$$

и что

$$y_0' = 0 \text{ и } z_0' = 0,$$

т.е.:

$$y = 0, \quad z = 0,$$

и что

$$y_0 = 0, \quad z_0 = 0;$$

следовательно, материальная точка будет совершать свое движение по оси X .

В оставшемся дифференциальном уравнении движения точки

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X \dots \dots \dots (65)$$

часть X , выражающая величину и знак силы, приложенной к точке, может быть функцией:

- 1) одной из величин t, x, x' ,
- 2) двух из них,
- 3) всех трех;

и поэтому различать случаи семи родов:

- 1) $X = \phi(t)$ 4) $X = \phi(x, x')$ 7) $X = \phi(t, x, x')$.
- 2) $X = \phi(x)$ 5) $X = \phi(x', t)$
- 3) $X = \phi(x')$ 6) $X = \phi(t, x)$

Случай 1-го рода:

$$mx' = \phi(t).$$

Первый интегралъ:

$$mx' - \phi(t) = C; \quad \phi(t) = \int \phi(t) dt.$$

Второй интегралъ:

$$mx - F(t) - Ct = \Gamma; \quad F(t) = \int \phi(t) dt.$$

Зависимость между произвольными постоянными и начальными обстоятельствами движенья:

$$mx_0' - \phi(t_0) = C, \quad mx_0 - F(t_0) - Ct_0 = \Gamma.$$

Исключивъ C и Γ изъ перваго и втораго интеграла, мы получимъ:

$$x' = x_0' + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \phi(t) dt \dots \dots \dots (66)$$

$$x = x_0 + x_0'(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t \phi(t) dt \dots \dots \dots (67)$$

Примѣры: а) Паденіе матерьяльной точки вертикально сверху внизъ подѣ влияніемъ силы тяжести, принимаемой постоянною (ось X направлена вертикально, сверху внизъ).

$$mx' = mg, \quad x_0 = 0, \quad x_0' = \alpha > 0, \quad t_0 = 0.$$

б) Движеніе тяжелой матерьяльной точки, брошенной снизу вверхъ вертикально:

$$mx'' = mg, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_0' = -\alpha, \quad \text{гдѣ } \alpha > 0.$$

Опредѣлить: высоту поднятія, время подъема и дальнѣйшее движеніе послѣ поднятія на наибольшую высоту.

нѣтъ 6-й.

$$X = m\lambda \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad x_0 = 0, \quad x'_0 = 0, \quad t_0 = 0.$$

$$x = \frac{\lambda T}{2\pi} t - \lambda \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \sin \frac{2\pi}{T} t;$$

заканчиваетъ колебательное движеніе около центра, движу-
равномерно со скоростью $\frac{\lambda T}{2\pi}$.

Случай 2-го рода.

$$mx'' = \phi(x).$$

дифференціальное уравненіе можетъ быть замѣнено сово-
бою двухъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка:

$$m \frac{dx'}{dt} = \phi(x), \quad \frac{dx}{dt} = x',$$

и могутъ быть представлены такъ:

$$\frac{m dx'}{\phi(x)} = \frac{dx}{x'} = dt.$$

Первый интегралъ дифференціального уравненія втораго по-
лучимъ, интегрируя двучленное уравненіе:

$$mx' dx' = \phi(x) dx.$$

Второй интегралъ — слѣдующій:

$$m(x')^2 - 2\phi(x) = C, \quad \phi(x) = \int \phi(x) dx.$$

Третій интегралъ даннаго дифференціального уравненія вто-
рѣго будетъ:

$$\sqrt{m} \int \frac{dx}{\sqrt{C + 2\phi(x)}} = t + \Gamma.$$

Зависимость между произвольными постоянными и начальными обстоятельствами движения:

$$m(x'_0)^2 - 2\phi(x_0) = C$$

$$F(x_0, x_0) = t_0 + \Gamma; \quad F(x, x_0) = \int \frac{\sqrt{m} dx}{\sqrt{m(x'_0)^2 + 2\phi(x) - 2\phi(x_0)}}$$

Поэтому:

$$x' = \left((x'_0)^2 + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x \phi(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \dots \dots \dots (68)$$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{\sqrt{m} dx}{\left(m(x'_0)^2 + 2 \int_{x_0}^x \phi(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}} \dots \dots \dots (69)$$

Примеры а и б:

$$X = mg, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad x'_0 = \pm \alpha.$$

Примеръ 7-й. $X = \mu^2 x$, то есть сила, дѣйствующая на материальную точку, есть сила, отталкивающая ее отъ начала координатъ O , и величина ея пропорціональна разстоянію отъ O .

Положимъ

$$t_0 = 0, \quad x_0 = a, \quad x'_0 = \alpha.$$

$$\frac{2}{m} \int_a^x \phi(x) dx = k^2(x^2 - a^2); \quad k = \frac{\mu}{\sqrt{m}}.$$

$$x' = \sqrt{x^2 - k^2 a^2 + k^2 x^2} = k \sqrt{x^2 + p}; \quad p = \frac{\alpha^2}{k^2} - a^2.$$

Если начальная скорость α настолько велика, что $p > 0$, то x' не обращается въ нуль, а потому и не мѣняетъ своего знака во

время движения; въ этихъ случаяхъ движеніе совершается безъ перемѣны направленія въ одну и ту же сторону оси X , а именно въ положительную, если $\alpha > 0$, и въ отрицательную, если $\alpha < 0$.

Если же $p < 0$, такъ что можно положить: $p = -n^2$, то выразеніе для x' будетъ:

$$x' = k\sqrt{x^2 - n^2};$$

это показываетъ, что наименьшая величина, которую можетъ имѣть x' , есть n^2 , то есть, что материальная точка не можетъ приближаться къ началу координатъ на разстояніе, меньшее n ; когда x будетъ равно $\pm n$, тогда скорость сдѣлается равной нулю и послѣ того направленіе движенія перевернется.

Далѣе:

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 + p}} = kt.$$

или

$$\log \left[\frac{x + \sqrt{x^2 + p}}{a + \frac{\alpha}{k}} \right] = kt; \quad x + \sqrt{x^2 + p} = \left(a + \frac{\alpha}{k} \right) e^{kt}; \dots\dots\dots (70)$$

тсюда

$$\frac{e^{-kt}}{a + \frac{\alpha}{k}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + p}} = \frac{x - \sqrt{x^2 + p}}{a^2 - \frac{\alpha^2}{k^2}},$$

$$x - \sqrt{x^2 + p} = \left(a - \frac{\alpha}{k} \right) e^{-kt} \dots\dots\dots (71)$$

Сложивъ равенства (70) и (71), мы получимъ слѣдующее выраженіе движенія точки:

$$x = a \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} + \frac{\alpha}{k} \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2} \dots\dots\dots (72)$$

Эта формула можетъ быть представлена въ болѣе сжатой формѣ,

но въ различномъ видѣ, смотря потому, каковы знаки величинъ $(ak+a)$ и $(ak-a)$.

а) Если эти величины имѣютъ одинаковые знаки, то, положивъ:

$$e^{k\tau} = \sqrt{\frac{a - \frac{a}{k}}{a + \frac{a}{k}}}$$

можемъ представить выраженіе для x такъ:

$$x = \frac{\sqrt{a^2 k^2 - a^2}}{2k} (e^{k\theta} + e^{-k\theta}); \quad \theta = t - \tau.$$

Такая зависимость x отъ t изобразится графически кривою линіею такого вида, какъ на чертежѣ 1-мъ, если изображать t абциссами, а x ординатами. Вся кривая находится, или на сторонѣ положительныхъ, или на сторонѣ отрицательныхъ ординатъ; ON изображаетъ τ , т.-е. моментъ, въ который точка находится въ кратчайшемъ разстояніи отъ начала координатъ.

б) Если знаки вышеупомянутыхъ величинъ различны, то положивъ:

$$e^{k\theta} = \sqrt{\frac{\frac{a}{k} - a}{\frac{a}{k} + a}},$$

можемъ представить выраженіе для x такъ:

$$x = \frac{\sqrt{a^2 - a^2 k^2}}{2k} (e^{k\theta} - e^{-k\theta}); \quad \theta = t - \Theta.$$

Такая зависимость изобразится кривою такого вида, какъ на чертежѣ 2-мъ. Движеніе совершается со скоростью, не измѣняющею своего направленія; въ моментъ $ON = \Theta$ точка проходитъ черезъ начало координатъ.

с) Если

$$ak - a = 0,$$

то тогда

$$x = ae^{kt},$$

то есть точка асимптотически удаляется от начала координатъ въ безконечность.

d) Если

$$ak + a = 0,$$

тогда

$$x = ae^{-kt},$$

то есть точка асимптотически приближается къ началу координатъ.

Примѣръ 8-й.

$$X = -\lambda^2 x, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = a, \quad x'_0 = a;$$

то есть сила, дѣйствующая на материальную точку, есть притяженіе къ точкѣ O , прямо пропорціональное разстоянію отъ нея.

Въ этомъ случаѣ

$$x' = \omega \sqrt{q^2 - x^2}; \quad \omega = \frac{\lambda}{\sqrt{m}}; \quad q^2 = a^2 + \frac{a^2}{\omega^2};$$

такъ какъ скорость должна имѣть во всякомъ случаѣ дѣйствительное значеніе, то x^2 не можетъ быть болѣе q^2 , и когда $x = \pm q$, скорость обращается въ нуль.

Далѣе

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{q^2 - x^2}} = \omega t,$$

или

$$\arcsin \frac{x}{q} - \arcsin \frac{a}{q} = \omega t;$$

откуда

$$\frac{x}{q} = \sin\left(\omega t + \arcsin \frac{a}{q}\right) = \frac{a}{q} \cos \omega t + \frac{\sqrt{q^2 - a^2}}{q} \sin \omega t;$$

слѣдовательно

$$x = a \cos \omega t + \frac{a}{\omega} \sin \omega t \dots \dots \dots (73)$$

Это выраженіе могло быть получено прямо изъ выраженія (72)

черезъ замѣщеніе величины k величиною $i\omega$, гдѣ $i = \sqrt{-1}$; кромѣ того, оно согласуется съ выраженіемъ (45, а), удовлетворяющимъ тому же самому дифференціальному уравненію.

Изъ выраженія (73), а еще лучше изъ выраженія:

$$x = q \sin(\omega t + c); \quad c = \arcsin \frac{a}{q}$$

видно, что точка совершаетъ періодическое колебательное движеніе около начала O , отклоняясь на разстоянія $+q$ и $-q$ по обѣ стороны его; полный періодъ колебанія равенъ $2T$, гдѣ:

$$T = \frac{\pi}{\omega} = \pi \frac{\sqrt{m}}{\lambda}, \quad \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2\omega} \dots \dots \dots (73 \text{ bis})$$

Случай 3-ю рода:

$$mx'' = \phi(x').$$

Это дифференціальное уравненіе 2-го порядка можно замѣнить двумя дифференціальными уравненіями перваго порядка, которыя можно представить такъ:

$$\frac{m dx'}{\phi(x')} = \frac{dx}{x'} = dt.$$

Въ случаяхъ этого рода, смотря по обстоятельствамъ, можно рѣшать вопросъ различными способами.

А. Интегрировать уравненіе:

$$m \frac{dx'}{\phi(x')} = dt.$$

Если интеграль его:

$$m \int \frac{dx'}{\phi(x')} = t + C_1 \dots \dots \dots (74)$$

можетъ быть рѣшенъ относительно x' , которое выразится нѣкоторою функціею ψ отъ $(t + C_1)$, то второй интеграль даннаго дифференціальнаго уравненія будетъ:

$$\int \psi(t + C_1) dt = x + C_2 \dots \dots \dots (75)$$

В. Интегрировать уравнение:

$$m \frac{x' dx'}{\phi(x')} = dx.$$

Если интегралъ его:

$$m \int \frac{x' dx'}{\phi(x')} = x + C_2 \dots \dots \dots (76)$$

есть быть рѣшенъ относительно x' , которое выразится нѣкою функциею Ψ отъ $(x + C_2)$, то второй интегралъ данного дифференціального уравненія будетъ:

$$\int \frac{dx}{\Psi(x + C_2)} = t + C_1 \dots \dots \dots (77)$$

С. Второй интегралъ можно получить или рассматривать, какъ дѣлать исключенія x' изъ интеграловъ (74) и (76).

Примѣръ 9-й.

$$X = mg - mkx'.$$

Если положительная ось X направлена вертикально сверху въ, то такимъ образомъ будетъ выражаться равнодѣйствующая вѣса матеріальной точки и сопротивленія воздуха, если принять последнее пропорціональнымъ первой степени скорости.

Въ этомъ примѣрѣ можно, кромѣ предыдущихъ приемовъ, имѣнить слѣдующій.

Одинъ изъ первыхъ интеграловъ данного дифференціального уравненія второго порядка:

$$x'' = g - kx'$$

отъ слѣдующій:

$$x' = gt - kx + C$$

$$x' - a = gt - k(x - a).$$

Другой получится по формулѣ (74) и будетъ:

$$\int \frac{k dx'}{g - kx'} = kt + C_1,$$

или

$$\log \left(\frac{g - ka}{g - kx'} \right) = kt.$$

Исключивъ x' изъ этихъ двухъ интеграловъ, мы получимъ результатъ:

$$x = a + \frac{g}{k}t - \frac{1}{k} \left(\frac{g}{k} - a \right) (1 - e^{-kt}) \dots \dots \dots (78)$$

Эта формула пригодна, какъ для восходящаго, такъ и для нисходящаго движенія матерьяльной точки; первое имѣетъ мѣсто только при $a < 0$ и продолжается только до момента:

$$t_1 = \frac{1}{k} \log \left(1 - \frac{ka}{g} \right),$$

въ который скорость обращается въ нуль и съ котораго начинается нисходящее движеніе. Во всякомъ случаѣ скорость съ теченіемъ времени асимптотически приближается къ предѣлу $+\frac{g}{k}$ *).

Примѣръ 10. Прямолинейное движеніе тяжелой матерьяльной точки въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально кубу скорости; коэффициентъ сопротивленія среды означимъ черезъ mgk^3 .

$$mx'' = mg - mg(kx')^3.$$

Изъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{dx'}{1 - (kx')^3} = gdt, \quad \frac{x' dx'}{1 - (kx')^3} = gdx$$

составимъ слѣдующее:

$$\frac{dx'}{(kx')^3 + kx' + 1} = g(dt - kdx),$$

*) Изобразивъ зависимость (78) графически, получимъ кривую, изображенную на чертежѣ 3-мъ; выпуклость этой кривой постоянно обращена къ оси абциссъ; она имѣетъ асимптоту, наклоненную къ оси абциссъ подъ угломъ, тангенсъ котораго есть $\frac{g}{k}$; x имѣетъ наименьшую величину въ точкѣ M .

интегралъ котораго есть:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2kx'+1}{\sqrt{3}} \right) = gk(t - kx) + C_1 \dots \dots \dots (79)$$

Полагая $t_0=0$, $x_0=a$, $x'_0=\alpha$, получимъ, для опредѣленія C_1 , равенство:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2k\alpha+1}{\sqrt{3}} \right) = C_1 - gk^2 a.$$

По исключеніи C_1 , равенство (79) получить слѣдующій видъ:

$$\frac{gk\sqrt{3}}{2} (t - k(x - a)) = \operatorname{arctg} \frac{2kx'+1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{2k\alpha+1}{\sqrt{3}} \dots \dots (80)$$

Для полученія другаго перваго интеграла мы составимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{1+kx'}{1-(kx')^2} dx' = g(dt + kdx),$$

интегралъ котораго — слѣдующій:

$$\log \frac{1-(kx')^2}{(1-k\alpha)^2} = 3kg(t + kx) + C_2, \dots \dots \dots (81)$$

или

$$3kg(t + k(x - a)) = \log \frac{1-(kx')^2}{(1-k\alpha)^2} - \log \frac{1-(k\alpha)^2}{(1-k\alpha)^2} \dots \dots \dots (82)$$

Совокупность первыхъ интеграловъ (79) и (81), или (80) и (82) представляетъ рѣшеніе задачи о движеніи такъ называемой матеріальной точки, брошенной вертикально вверхъ или внизъ и движущейся въ средѣ, сопротивляющейся пропорціонально кубу скорости; въ самомъ дѣлѣ, по формуламъ (80) и (82) можемъ вычислять t и x , соответствующія различнымъ скоростямъ.

Но можно исключить x' изъ этихъ интеграловъ и тогда получимъ второй интегралъ въ видѣ зависимости между величинами:

$$\xi = \frac{\sqrt{3}}{2} gk(t - k(x - a)), \quad \eta = \frac{3kg}{2} (t + k(x - a)),$$

и этотъ же интегралъ можно получить черезъ интегрированіе уравненія (80); результатъ будетъ слѣдующій:

$$\cos \xi - \frac{1+k\alpha}{1-k\alpha} \sqrt{3} \sin \xi = e^{-\eta} \dots \dots \dots (83)$$

Для опредѣленія момента t_1 и положенія x_1 наибольшаго подъема матерьяльной точки при отрицательной начальной скорости, положимъ въ равенствахъ (80) и (82) $x'=0$ и $\leftarrow n$, гдѣ n означаетъ положительную скорость; изъ нихъ получимъ слѣдующія выраженія:

$$t_1 = \frac{1}{3gk} \left[\log \frac{1+kn}{\sqrt{1-kn+(kn)^2}} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{kn\sqrt{3}}{2-kn} \right] \dots (84)$$

$$-(x_1 - a) = \frac{1}{3gk^2} \left[\log \frac{\sqrt{1-kn+(kn)^2}}{1+kn} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{kn\sqrt{3}}{2-kn} \right] \dots (85)$$

Примѣръ 11-й. Тяжелая матерьяльная точка движется въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально квадрату скорости. Въ этомъ случаѣ X выразится неодинаковымъ образомъ при паденіи точки сверху внизъ и при подъѣмѣ снизу вверхъ:

$$\text{при паденіи } X = m(g - k^2(x')^2),$$

$$\text{при подъѣмѣ } X = m(g + k^2(x')^2).$$

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$\text{при паденіи } x'' = g - (kx')^2,$$

$$\text{при подъѣмѣ } x'' = g + (kx')^2;$$

разница между ними только въ знакѣ у k^2 , поэтому мы будемъ интегрировать только уравненіе для паденія точки, а чтобы перейти къ подъѣму, должны будемъ подставить въ результатъ ik (гдѣ $i = \sqrt{-1}$) вмѣсто k .

Интегрировать уравненіе

$$x'' = g - (kx')^2$$

можно по всякому изъ указанныхъ способовъ; по способу А сначала получимъ интегралъ:

$$\int \frac{dx'}{g - (kx')^2} = t + C_1,$$

или

$$\frac{1}{2k\sqrt{g}} \log \left(\frac{\sqrt{g+kk'}}{\sqrt{g-kk'}} \right) = t + C_1;$$

потому что дробь, стоящая под знакомъ интеграла, можетъ быть разложена слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{dx'}{g - (kx')^2} = \frac{dx'}{2\sqrt{g}} \left(\frac{1}{\sqrt{g - kx'}} + \frac{1}{\sqrt{g + kx'}} \right).$$

Предыдущее равенство, при положеніи $t_0 = 0$, $x' = a$, даетъ

$$\frac{1 + kx'}{1 - kx'} = \frac{1 + ka}{1 - ka} e^{2kt}, \dots\dots\dots (86)$$

гдѣ, для краткости, введены обозначенія:

$$\frac{k}{\sqrt{g}} = \kappa, \quad k\sqrt{g} = \varepsilon.$$

Рѣшивъ равенство (86) относительно x' , получится уравненіе:

$$x' = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{(1 + \kappa a)e^{\varepsilon t} - (1 - \kappa a)e^{-\varepsilon t}}{(1 + \kappa a)e^{\varepsilon t} + 1 - \kappa a)e^{-\varepsilon t}} \right],$$

которое легко интегрируется и даетъ второй интегралъ дифференціального уравненія движенія:

$$x = a + \frac{1}{\kappa \varepsilon} \log \left(\frac{e^{\varepsilon t} + e^{-\varepsilon t}}{2} + \kappa a \frac{e^{\varepsilon t} - e^{-\varepsilon t}}{2} \right)$$

или

$$x = a + \frac{1}{k^2} \log \left(\cos(ikt\sqrt{g}) - \frac{\kappa a}{\sqrt{g}} i \sin(ikt\sqrt{g}) \right) \dots\dots (87)$$

По способу В мы должны начать съ интегрированіи уравненія:

$$\frac{x' dx'}{g - (kx')^2} = dx;$$

получимъ

$$\frac{g - (kx')^2}{g - (ka)^2} = e^{2k^2(a-x)}, \dots\dots\dots (88)$$

продолжая дальше, мы придемъ къ тому же самому результату (87).

Чтобы получить выраженіе для движенія снизу вверхъ, надо положить скорость a отрицательною и замѣнить k черезъ ik , тогда выраженіе (87) приметъ слѣдующій видъ:

$$x = a - \frac{1}{k^2} \log \left(\cos(kt \sqrt{g}) + \frac{kn}{\sqrt{g}} \sin(kt \sqrt{g}) \right), \dots$$

гдѣ подставлено $\alpha = -n$.

Равенство (88) при движеніи снизу вверхъ замѣняется дующимъ.

$$\frac{g + (kx')^2}{g + (kn)^2} = e^{-2k^2(a-x)} \dots \dots \dots$$

Наибольшая высота опредѣлится изъ послѣдняго равенства, положивъ въ немъ $x' = 0$; означимъ высоту поднятія $(a - x_1)$ че

$$1 + \frac{k^2}{g} n^2 = e^{2k^2 h} \dots \dots \dots$$

Движеніе, совершаемое матерьяльною точкою по достиженіи наибольшей высоты, выразится уравненіями (86)—(88), если ставимъ въ нихъ $(t - t_1)$, x_1 и нуль вмѣсто t , a и α .

Скорость v , съ которою точка возвратится въ положеніе опредѣлится изъ (88):

$$1 - \frac{k^2}{g} v^2 = e^{2k^2(x_1 - a)} = e^{-2k^2 h}; \dots \dots \dots$$

скорость эта оказывается меньшею n ; въ самомъ дѣлѣ, изъ (92) получимъ:

$$v = ne^{-k^2 h}.$$

Примѣръ 12-й. Прямолинейное движеніе тяжелой матерьяльно въ средѣ, сопротивленіе которой выражается суммою двухъ членовъ, пропорціональнаго первой степени, другаго, пропорціональнаго степени скорости.

Предполагая движеніе точки сверху внизъ, напишемъ дифференціальное уравненіе движенія:

$$mx'' = m(g - 2kx' - (\mu x')^2);$$

но мы можемъ этому уравненію придать также слѣдующій видъ:

$$\xi'' = g + \frac{k^2}{\mu^2} - \mu^2(\xi')^2, \dots \dots \dots$$

гдѣ:

$$\xi' = x' + \frac{k}{\mu^2}, \quad \xi = x + \frac{k}{\alpha^2} t.$$

Дифференціальное же уравненіе (93) отличается отъ перваго изъ дифференціальныхъ уравненій предыдущаго примѣра только коэффициентами и значеніемъ зависимой переменной, но не видомъ; а потому ссылаемся на результаты 11-го примѣра.

Въ случаяхъ 4—7 нельзя дать общихъ правилъ, хотя въ нѣкоторыхъ задачахъ можетъ быть произведено одно, а въ другихъ и два интегрированія; мы приведемъ здѣсь нѣсколько примѣровъ такихъ задачъ.

Изъ случаевъ 4-го рода:

$$mx'' = \Phi(x', x)$$

Примѣръ 13-й. Материальная точка, притягиваемая къ началу координатъ силою, пропорціональною разстоянію отъ него, движется по оси X въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально скорости точки.

Этотъ частный случай примѣра 3-го мы рассмотримъ здѣсь подробнѣе, гдѣ въ § 18.

Дифференціальное уравненіе движенія:

$$mx'' = -2mkx' - m\lambda x$$

представимъ такъ:

$$x'' + 2kx' + k^2x = (k^2 - \lambda)x;$$

затѣмъ помножимъ обѣ части равенства на e въ степени kt и означимъ произведеніе изъ x на эту степень e черезъ φ ; тогда дифференціальное уравненіе получитъ слѣдующій видъ:

$$\varphi'' = (k^2 - \lambda)\varphi; \quad \varphi = xe^{kt},$$

т. е. это есть дифференціальное уравненіе примѣра 7-го или 8-го, смотря по тому, каковъ знакъ разности $(k^2 - \lambda)$.

а) Если $(k^2 - \lambda)$ есть величина отрицательная, то, положивъ:

$$k^2 - \lambda = -\omega^2,$$

примѣнимъ формулу (73), которая въ этомъ случаѣ получитъ слѣду видъ:

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t + \frac{\varphi'_0}{\omega} \sin \omega t;$$

но, такъ какъ:

$$\varphi_0 = a, \quad \varphi'_0 = ak + a,$$

то искомое выраженіе для x будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$x = e^{-kt} \left(a \cos (t\sqrt{\lambda - k^2}) + \frac{ak + a}{\sqrt{\lambda - k^2}} \sin (t\sqrt{\lambda - k^2}) \right) \dots$$

Движеніе, выражаемое этимъ уравненіемъ, есть колебательно уменьшающимися размахами; сумма, заключенная въ большихъ скобъ измѣняется періодически, такъ что въ моменты: $t, t+2T, t+4T, t$ и т. д., она имѣетъ одну и ту же величину, если T есть слѣдующій п жуть времени:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda - k^2}} \dots \dots \dots (94)$$

Въ эти моменты x будетъ имѣть слѣдующія величины:

$$Ae^{-kt}, Ae^{-kt} \cdot e^{-2kT}, Ae^{-kt} \cdot e^{-4kT}, Ae^{-kt} \cdot e^{-6kT}, \dots$$

гдѣ A есть величина упомянутой суммы въ моментъ t .

Отсюда видно, что величины x для этихъ моментовъ уменьши въ геометрической прогрессіи, отношеніе которой есть:

$$e^{-2kT}; \quad T = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda - k^2}}.$$

Чертежъ 4-й изображаетъ законъ нмѣненія x съ теченіемъ вре выражаемый формулою (94).

б) Когда $k^2 = \lambda$, формула (94) приметъ слѣдующій видъ:

$$x = e^{-kt} (a + (ak + a)t), \dots \dots \dots$$

потому что, при $k^2 = \lambda$:

$$\cos (t\sqrt{\lambda - k^2}) = 1, \quad \frac{\sin (t\sqrt{\lambda - k^2})}{\sqrt{\lambda - k^2}} = t.$$

Из формулы (95) получим следующее выражение скорости:

$$x' = e^{-kt} \left(a - k(ak + a)t \right),$$

из которого видно, что скорость обращается в нуль при $t = t_1$,

$$t_1 = \frac{a}{k(ak + a)}$$

и при $t = \infty$.

В момент t_1 координата x_1 выражается так:

$$x_1 = e^{-kt_1} \left(a + \frac{a}{k} \right).$$

Формулу (95) можно преобразовать к следующему виду:

$$x = x_1 e^{-k\theta} (1 + k\theta); \quad \theta = t - t_1 \dots \dots \dots (95 \text{ bis})$$

На чертеж 5-мъ проведена кривая, изображающая законъ измѣненія x , выражаемый формулою (95) или (95 bis); наивысшая точка M соответствуетъ моменту t_1 ; при $t = t_1 - \frac{1}{k}$ точка проходитъ черезъ начало координатъ, а при $t = t_1 + \frac{1}{k}$ кривая имѣетъ точку перегиба.

с) Если $(k^2 - \lambda)$ есть величина положительная, то выражение (94) получить слѣдующій видъ:

$$x = e^{-kt} \left(a \cos(it\sqrt{k^2 - \lambda}) + \frac{ak + a}{i\sqrt{k^2 - \lambda}} \sin(it\sqrt{k^2 - \lambda}) \right), \dots (96)$$

или:

$$x = \frac{(aq + a)e^{-pt} - (ap + a)e^{-qt}}{q - p}, \dots \dots \dots (96 \text{ bis})$$

гдѣ $p = k - \sqrt{k^2 - \lambda}$ и $q = k + \sqrt{k^2 - \lambda}$ суть двѣ положительныя величины.

Въ тѣхъ вопросахъ, въ которыхъ функція $\phi(x, x')$ имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\phi(x, x') = f(x) + (x')^2 \varphi(x),$$

тогда можно найти первый интегралъ дифференціального уравненія движенія; въ самомъ дѣлѣ, это уравненіе:

$$x'' = f(x) + \varphi(x)(x')^2$$

можно представить такъ:

$$x' \frac{dx'}{dx} - (x')^2 \varphi(x) = f(x),$$

или такъ:

$$\frac{du}{dx} - 2u\varphi(x) = 2f(x), \quad u = (x')^2;$$

а это есть обыкновенное линейное дифференціальное уравненіе перваго порядка, рѣшеніе котораго, какъ извѣстно, есть:

$$(x')^2 = u = e^{2\theta(x)} \left(C + 2 \int e^{-2\theta(x)} f(x) dx \right), \dots\dots\dots (97)$$

гдѣ:

$$\theta(x) = \int \varphi(x) dx.$$

Примѣръ 14-й. Матеріальная точка притягивается къ началу координатъ силою, прямо пропорціальною разстоянію отъ него; движеніе ея происходитъ въ средѣ, плотность которой обратно пропорціоноальна разстоянію отъ начала координатъ; эта среда оказываетъ движенію сопротивленіе, пропорціоноальное плотности и квадрату скорости.

Начальное положеніе точки на положительной оси X въ разстояніи a отъ начала координатъ, начальная скорость равна нулю, опредѣлить движеніе.

Въ этомъ примѣрѣ $f(x) = -\mu^2 x$, функція же φ равна

$$\varphi(x) = \frac{k}{x},$$

если точка находится на положительной оси X и скорость ея направлена къ началу координатъ.

По формулѣ (97) составимъ равенство:

$$(x')^2 = x^{2k} \left(C - \frac{\mu^2}{(1-k)} x^{2-2k} \right);$$

опредѣлимъ C по начальнымъ обстоятельствамъ движенія; окажется:

$$C = \frac{\mu^2}{1-k} a^{2-2k}.$$

По извлеченіи корня и по отдѣленіи переменныхъ, получимъ дифференціальное уравненіе:

$$-\frac{x^{-k}dx}{\sqrt{a^2 - 2x^2 - x^2 - 2k}} = \frac{\mu}{\sqrt{1-k}} dt,$$

интегралъ котораго:

$$\arcsin \cos \left(\frac{x}{a} \right)^{1-k} = t\mu\sqrt{1-k}$$

гдѣ намъ выраженіе движенія точки:

$$x = a (\cos t\mu\sqrt{1-k})^{\frac{1}{1-k}}.$$

Движеніе, начавшееся въ моментъ $t=0$, кончается въ моментъ T :

$$T = \frac{\pi}{2\mu\sqrt{1-k}}; \dots\dots\dots (98)$$

Этотъ моментъ точка приходитъ въ начало координатъ и скорость ея выходитъ въ нуль. Наибольшая скорость, которую имѣетъ точка во время жизни, равна:

$$a\mu k^{\frac{k}{2(1-k)}}.$$

Изъ случаевъ 7-го рода:

$$mx'' = \Phi(t, x, x').$$

Примѣръ 15. Матеріальная точка, движущаяся по оси X , притягивается къ точкѣ O , которая, въ свою очередь, движется по той же прямой слѣдующему закону:

$$x_o = \psi(t);$$

и притягивающая матеріальную точку къ точкѣ O , пропорціональна толщину отъ нея, притомъ движеніе происходитъ въ неподвижной средѣ, нывающей сопротивленіе, пропорціональное скорости.

Очевидно, дифференціальное уравненіе движенія будетъ слѣдующее:

$$mx'' = -m(2kx' + \lambda(x - x_o))$$

или:

$$x'' + 2kx' + \lambda x = \varphi(t); \quad \varphi(t) = \lambda \psi(t);$$

интегрирование его не представит затруднений, если известен видъ функций φ .

Примѣръ 16. Заданіе отличается отъ заданія предыдущаго примѣра тѣмъ, что k и λ суть функции времени, удовлетворяющія слѣдующему условию:

$$\lambda(t) - k^2(t) - \frac{dk(t)}{dt} = n^2, \dots\dots\dots (99)$$

гдѣ n есть величина постоянная.

Положивъ:

$$x = \xi e^{-\theta(t)}, \quad \theta(t) = \int k(t) dt$$

и принявъ во вниманіе условіе (99), мы приведемъ дифференціальное уравненіе къ слѣдующему:

$$\xi'' + n^2 \xi = \varphi e^{\theta}.$$

Примѣръ 17. Дифференціальное уравненіе движенія:

$$x'' + x'f(t) + x\lambda^2(t) = 0,$$

гдѣ f и λ суть двѣ функции времени, удовлетворяющія слѣдующему условию:

$$\frac{f}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{d\lambda}{dt} = 2n; \dots\dots\dots (100)$$

n — величина постоянная.

Положивъ въ дифференціальному уравненію:

$$x = \xi e^{\int \psi dt},$$

гдѣ ψ есть функция времени, удовлетворяющая дифференціальному уравненію перваго порядка:

$$\psi' + \psi^2 + \psi f + \lambda^2 = 0, \dots\dots\dots (101)$$

мы получимъ, для опредѣленія ξ , слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\xi'' + (2\psi + f)\xi' = 0 \dots\dots\dots (102)$$

Дифференціальное уравненіе (101), на основаніи условія (100), можетъ быть приведено къ такому виду, при которомъ переменныя могутъ быть дѣлены и интегрированіе произведено; окажется, что:

$$\psi = -n\lambda + \lambda\sqrt{1-n^2} \cotg\left(\sqrt{1-n^2} \int \lambda dt\right);$$

тѣмъ проинтегрируется уравненіе (102) и найдется слѣдующій результатъ:

$$x = Ce^{-n\theta} \sin(\Gamma + \theta\sqrt{1-n^2}); \quad \theta = \int \lambda dt,$$

Въ тѣхъ вопросахъ, которые требуютъ интегрированія дифференціального уравненія:

$$x'' + x'f(t) + (x')^2\varphi(x) = 0$$

егда можетъ быть найденъ первый интегралъ; въ самомъ дѣлѣ, положимъ:

$$x' = \xi e^{-\int \varphi dx},$$

и приведемъ дифференціальное уравненіе къ слѣдующему;

$$\xi' + \xi f(t) = 0;$$

поэтому:

$$x' = Ce^{\psi}; \quad \psi = -\int \varphi(x)dx - \int f(t)dt. \dots (103)$$

§ 20. Вопросы объ опредѣленіи криволинейнаго движенія свободной матеріальной точки, въ которыхъ каждое изъ дифференціальныхъ уравненій втораго порядка интегрируется отдѣльно.

Переходя къ задачамъ и вопросамъ, относящимся къ криволинейнымъ движеніямъ матеріальныхъ точекъ, мы прежде всего упомянемъ о тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ опредѣленіе движенія по каждой изъ координатъ можетъ быть произведено въ отдѣльности, то есть, гдѣ каждое изъ дифференціальныхъ уравненій втораго порядка включаетъ время, только одну изъ координатъ и ея производныя.

Къ числу такихъ случаевъ принадлежатъ тѣ, которые приведены въ § 18 подъ названіемъ примѣровъ 3-го, 4-го и 5-го; тамъ получены ихъ интегралы, здѣсь остается показать, каковъ видъ траекторій.

Въ примѣрѣ 4-мъ сила имѣетъ неизмѣнное направленіе и постоянную величину:

$$P = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Расположимъ оси координатъ такимъ образомъ, чтобы ось Y была параллельна направленію силы P , чтобы начало координатъ совпадало съ начальнымъ положеніемъ движущейся точки, чтобы начальная скорость заключалась въ плоскости XU и чтобы эта скорость составляла острый уголъ съ осью X ; тогда дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = P, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

начальныя обстоятельства движенія:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad \gamma = 0;$$

поэтому вторые интегралы будутъ слѣдующіе:

$$x = at, \quad y = \frac{gt^2}{2} + \beta t, \quad z = 0; \dots\dots\dots (104)$$

здѣсь g подставлено вмѣсто частнаго: ($P: m$).

Уравненія (104) отличаются отъ уравненій, приведенныхъ на стр. 7-й кинематической части (примѣръ 3-й), только знакомъ передъ произведеніемъ βt .

Означивъ черезъ v_0 величину начальной скорости и черезъ $\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)$ — уголъ, составляемый ею съ положительною осью Y , мы получимъ слѣдующее извѣстное уравненіе параболической траекторіи тяжелой матерьяльной точки, брошенной въ пустотѣ подъ угломъ ω къ горизонту:

$$y = -xtg\omega + \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \omega} \dots\dots\dots (105)$$

Изъ трехъ дифференціальныхъ уравненій движенія:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -mk \frac{dy}{dt}, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = -m(g + k \frac{dz}{dt})$$

первое даетъ, на основаніи начальныхъ условій, результатъ $x=0$, выражающій, что движеніе происходитъ въ плоскости YZ .

Третье дифференціальное уравненіе отличается отъ дифференціального уравненія примѣра 9-го тѣмъ, что вмѣсто x здѣсь находится $(-z)$, возьмемъ поэтому формулу (78) и подставимъ въ нее: $(-z)$, нуль и $(-\gamma)$ вмѣсто x , a и α , получимъ, по измѣненіи знаковъ въ обѣихъ частяхъ равенства:

$$z = \frac{1}{k} \left(\gamma + \frac{g}{k} \right) (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t. \dots \dots \dots (106)$$

Чтобы перейти отъ третьяго дифференціального уравненія ко второму, надо замѣнить g — нулемъ и z черезъ y ; поэтому сдѣлаемъ подобныя же замѣщенія въ формулѣ (106) и сверхъ того замѣнимъ γ черезъ β ; получимъ тогда второй интегралъ втораго дифференціального уравненія:

$$y = \frac{\beta}{k} (1 - e^{-kt}) \dots \dots \dots (107)$$

Полученные результаты (106) и (107) выражаютъ координаты y , z въ функціяхъ времени; составленіе уравненія траекторіи и разсмотрѣніе вида ея сдѣлано на стр. 50—51 кинематической части (черт. 30 тамъ же). Уравненіе траекторіи — слѣдующее:

$$z = \left(\frac{g}{k\beta} + \frac{\gamma}{\beta} \right) y + \frac{g}{k^2} \log \left(1 - \frac{ky}{\beta} \right);$$

если разложить логарифмъ въ рядъ, то получимъ:

$$z = \frac{\gamma}{\beta} y - g \left(\frac{y^2}{2\beta^2} + \frac{ky^3}{3\beta^3} + \frac{k^2y^4}{4\beta^4} + \dots \right).$$

Положивъ здѣсь $k=0$, мы получимъ уравненіе траекторіи въ пустотѣ:

$$z_1 = \frac{\gamma}{\beta} y - \frac{gy^2}{2\beta^2} \dots \dots \dots (108)$$

Изъ этихъ двухъ равенствъ слѣдуетъ:

$$s = z_1 - g \left(\frac{ky^3}{3\beta^3} + \frac{k^2y^4}{4\beta^4} + \dots \right),$$

то есть, что, при одной и той же абсциссѣ, ордината траекторіи въ сопротивляющейся средѣ менѣе ординаты параболической траекторіи.

§ 21. Два приема преобразования дифференціальныхъ уравненій движенія свободной матеріальной точки.

Общіе способы, слѣдуя которымъ можно было бы рѣшить всякую задачу о криволинейномъ движеніи точки при дѣйствіи какихъ бы то ни было силъ, неизвѣстны; извѣстны только нѣкоторые приемы преобразования дифференціальныхъ уравненій движенія, при приимѣніи которыхъ можно получить нѣкоторые изъ первыхъ интеграловъ, если приложенныя къ матеріальной точкѣ силы удовлетворяютъ нѣкоторымъ условіямъ.

Одинъ изъ этихъ приемовъ заключается въ слѣдующемъ.

Помножимъ третье изъ дифференціальныхъ уравненій движенія:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2s}{dt^2} = Z. \dots\dots\dots (36)$$

на y и придадимъ къ нему второе, помноженное на $(-s)$; составится равенство:

$$m \left(y \frac{d^2s}{dt^2} - s \frac{d^2y}{dt^2} \right) = yZ - sY, \dots\dots\dots (109)$$

первая часть котораго есть производная отъ

$$m \left(y \frac{ds}{dt} - s \frac{dy}{dt} \right)$$

по t ; поэтому равенство это (109) можетъ быть написано такъ:

$$\frac{d \left[m \left(y \frac{ds}{dt} - s \frac{dy}{dt} \right) \right]}{dt} = yZ - sY \dots\dots\dots (110 \text{ а})$$

Помножимъ первое изъ уравненій (36) на z и придадимъ къ нему третье, помноженное на $(-x)$, получимъ:

$$\frac{d\left[m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)\right]}{dt} = zX - xZ; \dots\dots\dots (110\text{ b})$$

наконецъ, помноживъ второе изъ уравненій (36) на x и придавъ къ нему первое, помноженное на $(-y)$, получимъ:

$$\frac{d\left[m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\right]}{dt} = xY - yX \dots\dots\dots (110\text{ c})$$

Въ слѣдующихъ параграфахъ будетъ объяснено значеніе разностей, находящихся во вторыхъ частяхъ полученныхъ дифференціальныхъ уравненій (110, a, b, c); затѣмъ будетъ показано, какіе интегралы получаютъ изъ этихъ уравненій и при какихъ условіяхъ.

Другой приемъ, при посредствѣ котораго изъ уравненій (36) составляется дифференціальное уравненіе, легко интегрирующееся при нѣкоторыхъ условіяхъ, состоитъ въ томъ, что первое изъ уравненій (36) помножается на x' , второе — на y' , третье — на z' и затѣмъ, по сложеніи, составляется уравненіе:

$$m\left(x'\frac{dx'}{dt} + y'\frac{dy'}{dt} + z'\frac{dz'}{dt}\right) = X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt},$$

первая часть котораго есть, очевидно, производная по времени отъ слѣдующаго тричлена:

$$\frac{m}{2}((x')^2 + (y')^2 + (z')^2),$$

выражающаго половину произведенія изъ массы на квадратъ скорости матеріальной точки; поэтому, полученное дифференціальное уравненіе можно написать такъ:

$$\frac{d\left(\frac{m}{2}v^2\right)}{dt} = X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} \dots\dots\dots (111)$$

Помноживъ обѣ части этого дифференціального уравненія на dt , получимъ:

$$d\left(\frac{m}{2} v^2\right) = Xdx + Ydy + Zdz \dots\dots\dots (112)$$

Значеніе первой и второй частей этого дифференціального уравненія будетъ объяснено въ одномъ изъ слѣдующихъ параграфовъ и затѣмъ будетъ указано, каковъ интегралъ получается изъ этого уравненія и при какихъ условіяхъ.

§ 22. Значеніе вторыхъ частей дифференціальныхъ уравненій (110). Моментъ силы, приложенной къ материальной точкѣ, вокругъ даннаго центра и вокругъ данной оси.

Чтобы объяснить себѣ значеніе разностей:

$$yZ - zY \quad zX - xZ \quad xY - yX, \dots\dots\dots (113)$$

заключающихся во вторыхъ частяхъ дифференціальныхъ уравненій (110), мы сравнимъ ихъ со вторыми частями формулъ (96) кинематической части (стр. 85), которыя мы напишемъ при предположеніи, что точка \mathcal{M} (черт. 41 и 42 кинематич. части) взята за начало координатъ; вторыя части равенствъ (96) получаютъ тогда слѣдующій видъ:

$$y_o R - z_o Q \quad z_o P - x_o R \quad x_o Q - y_o P. \dots\dots\dots (114)$$

Припомнимъ, что эти разности выражаютъ величины проекцій на оси координатъ вращательной скорости $\overline{M\omega}$ точки \mathcal{M} вокругъ полюса $Ю$ и что длина, изображающая эту скорость, направлена изъ точки \mathcal{M} перпендикулярно къ плоскости, заключающей въ себѣ радіусъ векторъ $\overline{MЮ}$ и длину $\overline{ЮQ}$ (чертежъ 41 кинематической части), изображающую угловую скорость твердаго тѣла; направлена длина $\overline{M\omega}$ въ ту изъ двухъ сторонъ перпендикуляра къ плоскости, съ которой наблюдателю, стоящему ногами въ \mathcal{M} , головою по направленію $\overline{M\omega}$, смотрящему на точку $Ю$, видно, что длина $\overline{ЮQ}$ направлена слѣва на право.

Формулы (96) кинематической части и написанныя здѣсь разности (114) относятся къ кинематикѣ твердаго тѣла, между тѣмъ разности (113) относятся къ движению свободной материальной точки; первыя приведены здѣсь только для того, на основаніи сходства вида ихъ со вторыми, по возможности нагляднѣе яснить значеніе послѣднихъ.

Если въ разностяхъ (114) замѣнить:

величины x_0, y_0, z_0 — величинами x, y, z ,

величины P, Q, R — величинами X, Y, Z ,

получатся разности (113).

Однако слѣдуетъ замѣтить, что P, Q, R , какъ проеціи на координаты угловой скорости Ω , имѣютъ измѣренія:

$$\frac{1}{(\text{единица времени})} = \frac{1}{\sigma},$$

а тѣмъ какъ X, Y, Z — проеціи силы F на тѣ же оси координатъ. — имѣютъ измѣренія:

$$\frac{(\text{единица массы}) (\text{единица длины})}{(\text{единица времени})^2} = \frac{m \cdot \sigma}{\sigma^2}.$$

(Примѣчаніе. Символы: (единица массы), (единица длины), (единица времени) мы условимся обозначать, для краткости, буквами: σ, σ русскаго курсивнаго шрифта).

Для того, чтобы разности (114), имѣющія измѣренія скорости, получили значенія проеціей длины, необходимо помножить на величину σ .

Разности (113) имѣютъ слѣдующія измѣренія:

$$\frac{m \cdot \sigma^2}{\sigma^2};$$

помножить ихъ на величину:

$$\frac{\sigma^2}{m \cdot \sigma},$$

то полученные произведения:

$$(yZ - zY) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, (zX - xZ) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, (xY - yX) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \dots \dots (115)$$

будутъ имѣть измѣренія длинъ и будутъ представлять проэкціи на оси координатъ длины, возстановленной изъ точки O перпендикулярно къ плоскости, проведенной черезъ радіусъ вектора \overline{OM} (черт. 7) материальной точки $M(x, y, z)$ и черезъ силу F , приложенную къ точку M ; эта длина \overline{OL} направлена въ ту изъ двухъ сторонъ перпендикуляра къ плоскости, съ которой наблюдателю, стоящему ногами въ O , головою по направленію \overline{OL} , смотрящему на точку M , видно, что сила \overline{MF} направлена слева на право (черт. 7).

Такимъ же образомъ, какъ на страницахъ 89 и 90 кинематической части, мы выведемъ, что квадратъ длины \overline{OL} равняется:

$$(\overline{OL})^2 = [(X^2 + Y^2 + Z^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (xX + yY + zZ)^2] \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right)^2;$$

или

$$(\overline{OL})^2 = [(\overline{MF})^2 \cdot (\overline{OM})^2 - (\overline{MF} \cdot \overline{OM} \cos(\overline{MF}, \overline{OM}))^2] \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

Заключающийся въ этой формулѣ уголъ между направленіями \overline{OM} и \overline{MF} есть уголъ $\angle MF$ (черт. 7), синусъ котораго равенъ синусу угла OMF , поэтому:

$$\overline{OL} = (\overline{MF} \cdot \overline{OM} \sin(OMF)) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

или

$$\overline{OL} = (Fr \sin(F, r)) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$$

гдѣ r означаетъ величину и направленіе радіуса вектора \overline{OM} .

Произведение:

$$p = r \sin(F, r)$$

имеет длину перпендикуляра \overline{OD} , опущеннаго изъ точки O на направление силы \overline{MF} ; этотъ перпендикуляръ, представляющій ближайшее разстояние силы \overline{MF} отъ точки O , называется *плечомъ* F по отношенію къ центру O .

Произведение $F\rho$ изъ величины силы, приложенной къ материальной точкѣ, на плечо ея по отношенію къ какому-либо центру называется моментомъ этой силы вокругъ этого центра. И такъ:

$$\overline{OL} = F\rho \frac{\sigma^2}{m \cdot d}, \dots\dots\dots (116)$$

гдѣ, длина \overline{OL} равняется моменту силы \overline{MF} вокругъ центра O , деленному на единицу силы (символь единицы силы: см. формулу (29)). Единица моментовъ силъ есть моментъ единицы силы при длинѣ ρ , равной единицѣ; т. е.

$$(\text{единица моментовъ силъ}) = \frac{m \cdot d^2}{\sigma^2}.$$

Моментъ силы вокругъ центра имѣетъ всегда величину положительную.

Длину \overline{OL} можно разсматривать какъ изображеніе момента $F\rho$; раженный такимъ образомъ моментъ силы можно назвать *линейнымъ изображеніемъ момента* *) *силы вокругъ центра O .* Величины (115), которыя суть проеціи длины \overline{OL} на оси координатъ:

$$\left. \begin{aligned} (yZ - zY) \frac{\sigma^2}{m \cdot d} &= \overline{OL} \cos(\overline{OL}, X) \\ (zX - xZ) \frac{\sigma^2}{m \cdot d} &= \overline{OL} \cos(\overline{OL}, Y) \\ (xY - yX) \frac{\sigma^2}{m \cdot d} &= \overline{OL} \cos(\overline{OL}, Z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (117)$$

*) Произведение $F\rho$ называютъ различно: статическимъ моментомъ, линейнымъ моментомъ, вращательнымъ моментомъ; надобность въ какомъ прилагательномъ къ слову: „моментъ“ явилась вслѣдствіе того, что это слово получило въ механикѣ вѣсколько различныхъ значеній; въ терминѣ, являющемся въ этой книгѣ, прилагательное замѣняется словами: „вокругъ центра такого-то“.

могутъ быть названы *проекціями на оси координатъ линейнаго изображенія момента силы вокругъ центра O.*

На основаніи равенства (116), изъ предыдущихъ формулъ можно получить слѣдующія равенства:

$$\left. \begin{aligned} yZ - zY &= Fp \cos(\overline{OL}, X) \\ zX - xZ &= Fp \cos(\overline{OL}, Y) \\ xY - yX &= Fp \cos(\overline{OL}, Z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (118)$$

Моментъ силы вокругъ центра можетъ быть еще изображенъ удвоенною площадью треугольника OMF , имѣющаго основаніемъ длину \overline{MF} , изображающую силу, а высотой — плечо \overline{OD} этой силы по отношенію къ тому центру O , вокругъ котораго составляется моментъ; величина этой площади равна

$$Fp \frac{e^1}{m},$$

а линія \overline{OL} нормальна къ ней; поэтому изъ равенствъ (118) слѣдуетъ, что величины:

$$(yZ - zY) \frac{e^2}{m}, (zX - xZ) \frac{e^2}{m}, (xY - yX) \frac{e^2}{m} \dots\dots (119)$$

равны положительно или отрицательно взятымъ проекціямъ удвоенной площади треугольника OMF на плоскости координатъ:

$$YZ \quad ZX \quad XY;$$

знакъ проекціи опредѣляется знакомъ косинуса угла, составляемаго направленіемъ \overline{OL} съ направленіемъ положительной оси:

$$X \quad Y \quad Z.$$

Чтобы выразиться опредѣлительнѣе, означимъ знаками:

$$F_{yz} \quad F_{zx} \quad F_{xy}$$

величины и направленія проеэкцій силы F на вышеозначенныя плоскости координатъ и чрезъ:

$$r_{yz} \quad r_{zx} \quad r_{xy}$$

означимъ величины и направленія проеэкцій радіуса вектора \overline{OM} на тѣ же плоскости; тогда значеніе разностей (113) можно выразить слѣдующимъ образомъ:

$$\left. \begin{aligned} yZ - zY &= \begin{cases} +F_{yz}r_{yz} \sin(F_{yz}, r_{yz}), \text{ если } \cos(\overline{OL}, X) > 0 \\ -F_{yz}r_{yz} \sin(F_{yz}, r_{yz}), \text{ если } \cos(\overline{OL}, X) < 0 \end{cases} \\ zX - xZ &= \begin{cases} +F_{zx}r_{zx} \sin(F_{zx}, r_{zx}), \text{ если } \cos(\overline{OL}, Y) > 0 \\ -F_{zx}r_{zx} \sin(F_{zx}, r_{zx}), \text{ если } \cos(\overline{OL}, Y) < 0 \end{cases} \\ xY - yX &= \begin{cases} +F_{xy}r_{xy} \sin(F_{xy}, r_{xy}), \text{ если } \cos(\overline{OL}, Z) > 0 \\ -F_{xy}r_{xy} \sin(F_{xy}, r_{xy}), \text{ если } \cos(\overline{OL}, Z) < 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

Въ самомъ дѣлѣ, проеэкція площади треугольника OMF на плоскость YZ есть площадь треугольника OM_1F_1 (черт. 8 и 9), двѣ стороны котораго суть: $\overline{OM_1}$ (черт. 8 и 9) — проеэкція радіуса вектора \overline{OM} на плоскость YZ , и $\overline{M_1F_1}$ — проеэкція силы \overline{MF} на ту же плоскость; величина удвоенной площади треугольника OM_1F_1 выражается произведеніемъ:

$$2 \text{ (плоч. } OM_1F_1) = \frac{\sigma^2}{m} F_{yz} r_{yz} \sin(F_{yz}, r_{yz}),$$

которое есть величина всегда положительная, также какъ и площади OMF и OM_1F_1 ; поэтому:

$$\begin{aligned} 2(\text{плоч. } OMF) \cos(\overline{OL}, X) &= 2(\text{плоч. } OM_1F_1) = \\ &= \frac{\sigma^2}{m} F_{yz} r_{yz} \sin(F_{yz}, r_{yz}), \end{aligned}$$

если уголъ между направлениемъ \overline{OL} и положительною осью X острый (черт. 8), и

$$2(\text{плоч. } OMF) \cos(\overline{OL}, X) = -2(\text{плоч. } OM_1F_1) = \\ = -\frac{e^2}{m} F_{yz} r_{yz} \sin(F_{yz}, r_{yz}),$$

если уголъ между направлениемъ \overline{OL} и положительною осью X тупой (черт. 9).

Этимъ объясняется, почему изъ выражений (118) получаются выражения (120).

Заключающіяся во вторыхъ частяхъ формулъ (120) произведенія:

$$r_{yz} \sin(F_{yz}, r_{yz}) \quad r_{zx} \sin(F_{zx}, r_{zx}) \quad r_{xy} \sin(F_{xy}, r_{xy}),$$

выражаютъ длины кратчайшихъ разстояній между силою \overline{MF} и осями координатъ X , Y , Z ; мы докажемъ это относительно пер-ваго изъ написанныхъ произведеній.

Произведеніе

$$r_{yz} \sin(F_{yz}, r_{yz})$$

выражаетъ длину $\overline{OD_1}$ (черт. 10) перпендикуляра, опущеннаго изъ точки O на линію $\overline{M_1F_1}$; кратчайшее же разстояніе KE между осью X и линією \overline{MF} равно и параллельно перпендикуляру $\overline{OD_1}$, потому что, подобно ему, пересекаетъ ось X и перпендикулярно къ плоскости MM_1F_1F , проецирующей линію \overline{MF} на плоскость YZ ; эта плоскость MM_1F_1F проходитъ черезъ линію \overline{MF} и параллельна оси X , поэтому кратчайшее разстояніе между этими двумя линіями должно быть къ ней перпендикулярно.

Такимъ образомъ оказывается, что каждая изъ разностей (113) есть положительно или отрицательно взятое произведеніе изъ проеціи силы F на одну изъ плоскостей координатъ и изъ кратчайшаго разстоянія этой силы отъ координатной оси, перпендикулярной къ той плоскости, на которую взята проеція силы; подобныя произведенія называются моментами силъ вокругъ осей.

Пусть OP есть какая-либо ось, положительное направление которой считается от O къ P ; пусть \overline{MF} есть какая-либо сила, приложенная въ матерьяльной точкѣ M .

Моментомъ силы \overline{MF} вокругъ оси OP называется произведение изъ проэкции силы на плоскость перпендикулярную къ оси (черт. 11 и 12) и изъ кратчайшаго разстоянія \overline{KE} между силою и осью; произведенію этому должно дать положительный знакъ, если наблюдателю, стоящему ногами въ K , головою по положительному направленію оси KP , смотрящему на точку M_1 , видно, что проэція силы идетъ слѣва на право (какъ на черт. 11); если же наблюдателю видно, что проэція $\overline{M_1F_1}$ направлена справа на лѣво (какъ на черт. 13), то тогда моментъ силы вокругъ оси равняется вышесказанному произведенію, взятому со знакомъ минусъ.

Моментъ силы вокругъ оси измѣряется тѣми же самыми единицами, какъ и моментъ силы вокругъ центра.

По данному сейчасъ опредѣленію, разности (113) оказываются моментами силы F вокругъ осей координатъ.

Другія значенія этихъ разностей опредѣляются формулами (118), которыя мы выразимъ словесно слѣдующимъ образомъ:

Разности (113) суть проэціи на оси координатъ момента силы F вокругъ начала координатъ.

Выражаясь такъ, мы приписываемъ моменту силы вокругъ центра не только величину, но и направленіе, подразумѣвая подъ направленіемъ момента — направленіе его линейнаго изображенія.

Условимся обозначать величину и направленіе момента силы F вокругъ центра O знакомъ:

$$L_o(F).$$

Этимъ знакомъ будемъ пользоваться позднѣе, а именно въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ придется различать моменты различныхъ

силъ, приложенныхъ къ одной или къ нѣсколькимъ точкамъ; такъ, напримѣръ, моменты силъ F_1, F_2, \dots будемъ обозначать знаками:

$$L_0(F_1), L_0(F_2), \dots;$$

въ разсужденіяхъ же, относящихся къ одной силѣ и моменту ея, гдѣ не предвидится возможности смѣшать этотъ моментъ съ другими величинами того же рода, мы упростимъ обозначеніе и вмѣсто $L_0(F)$ будемъ писать L_0 .

Изъ того, что сказано въ этомъ параграфѣ, слѣдуетъ:

$(yZ - zY)$ есть моментъ силы F , приложенной къ точкѣ M , вокругъ оси X , или проекція на ту же ось момента силы вокругъ начала координатъ:

$$yZ - zY = L_0 \cos(L_0 X); \dots \dots \dots (121, a)$$

$(zX - xZ)$ есть моментъ силы F вокругъ оси Y , или проекція на ту же ось момента этой силы вокругъ начала координатъ:

$$zX - xZ = L_0 \cos(L_0 Y); \dots \dots \dots (121, b)$$

$(xY - yX)$ есть моментъ силы F вокругъ оси Z , или проекція на ту же ось момента этой силы вокругъ начала координатъ:

$$xY - yX = L_0 \cos(L_0 Z). \dots \dots \dots (121, c)$$

Вообще, моментъ силы F вокругъ какой-либо оси PO , проходящей черезъ начало координатъ, есть проекція на ту же ось момента силы вокругъ начала координатъ:

$$\begin{aligned} & (\text{мом. силы } F \text{ вокругъ оси } OP) = \\ & = (yZ - zY) \cos(PX) + (zX - xZ) \cos(PY) + (xY - yX) \cos(PZ) = \\ & = L_0 \cos(L_0 P). \dots \dots \dots (122) \end{aligned}$$

§ 23. Моментъ количества движенія матерьяльной точки вокругъ центра и вокругъ данной оси. Секторьяльные скорости проэкцій точки на плоскости координатъ.

Произведеніе изъ скорости матерьяльной точки на массу ея

называется *количествомъ движенія матерьяльной точки*; оно измѣряется слѣдующею единицею:

$$(\text{единица количества движенія}) = \frac{m \cdot \partial}{\partial} \dots \dots \dots (123)$$

Подобно силѣ, количество движенія матерьяльной точки можетъ быть изображено длиною, отложенною отъ мѣста матерьяльной точки по направленію скорости ея; эта длина должна быть во столько разъ болѣе единицы длины, во сколько разъ количество движенія точки болѣе единицы количества движенія.

Подъ направленіемъ количества движенія матерьяльной точки мы подразумѣваемъ направленіе изображающей его длины.

Произведенія:

$$m \frac{dx}{dt} \quad m \frac{dy}{dt} \quad m \frac{dz}{dt}$$

мы называемъ проеціями на оси координатъ количества движенія матерьяльной точки.

Изображая количество движенія, подобно силѣ, длиною, отложенною отъ мѣста матерьяльной точки, мы можемъ ввести понятіе о моментѣ количества движенія вокругъ какого-либо центра и о моментѣ его вокругъ какой-либо оси; понятно, что изложеніе и формулированіе этихъ понятій сведется къ почти дословному повторенію всего того, что изложено въ предыдущемъ параграфѣ, а потому мы ограничимся только слѣдующими указаніями.

Единица моментовъ количествъ движеній имѣетъ инныя измѣренія, чѣмъ единица моментовъ силъ, а именно:

$$(\text{единица моментовъ колич. движ.}) = \frac{m \cdot \partial^2}{\partial}.$$

Тѣ величины, производныя которыхъ по времени образуютъ первыя части дифференціальныхъ уравненій (110), имѣютъ слѣдующія значенія:

$(y m x' - x m y')$ есть моментъ вокругъ оси X количества движенія

точки m , или проекція на ось X момента того же количества движенія вокругъ начала координатъ:

$$m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = l_0 \cos(l_0 X); \dots\dots\dots (124, a)$$

гдѣ l_0 означаетъ величину и направление момента количества движенія точки m вокругъ начала координатъ;

$(zmx' - xtz')$ есть моментъ того же количества движенія вокругъ оси Y , или проекція на ось Y момента его вокругъ начала координатъ:

$$m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = l_0 \cos(l_0 Y); \dots\dots\dots (124, b)$$

$(xmy' - ymx')$ есть моментъ того же количества движенія вокругъ оси Z , или проекція на ось Z момента его вокругъ начала координатъ:

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = l_0 \cos(l_0 Z). \dots\dots\dots (124, c)$$

Такова аналогія между значеніями этихъ величинъ и значеніями разностей, рассмотрѣнныхъ въ предыдущемъ параграфѣ.

Кромѣ того, величины (124) имѣютъ еще иной смыслъ: каждая изъ нихъ есть удвоенное произведеніе изъ массы матерьяльной точки на производную по времени отъ нѣкоторой площади; мы докажемъ это надъ разностью:

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right).$$

Разность эта, будучи моментомъ количества движенія точки m вокругъ оси Z , можетъ быть выражена такъ:

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \pm mv_{xy}r_{xy} \sin(v_{xy}, r_{xy}) \dots\dots (125)$$

Здѣсь долженъ быть взятъ знакъ $+$, если $\cos(l_0 Z)$ болѣе нуля и знакъ минусъ, если этотъ косинусъ менѣе нуля; v_{xy} означаетъ проекцію скорости точки на плоскость XU .

Видѣтъ съ тѣмъ v_{xy} есть скорость проекціи M , на плоскость XU материальной точки m ; означивъ черезъ ds_{xy} *положительно-затую* длину бесконечно-малой дуги, пройденную точкою M , въ теченіи бесконечно-малаго промежутка времени отъ момента t до момента $(t+dt)$, и принявъ во вниманіе, что:

$$v_{xy} = \frac{ds_{xy}}{dt},$$

можемъ представить равенство (125) подѣ слѣдующимъ видомъ:

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = m\frac{(\pm r_{xy} ds_{xy} \sin(v_{xy}, r_{xy}))}{dt} \dots \dots (126)$$

Разсмотримъ значеніе второй части этого равенства.

Произведеніе:

$$r_{xy} ds_{xy} \sin(v_{xy}, r_{xy})$$

выражаетъ величину площади, разнящейся на бесконечно-малыя величины высшихъ порядковъ отъ удвоенной величины площади сектора OM, M' , (чертежи 13 и 14), заключающагося между радіусами векторами OM , и OM' , и дугою M, M' , описанною точкою M , въ теченіи времени отъ t до $(t+dt)$. Знаки, поставленные передъ этимъ произведеніемъ въ равенствѣ (126), означаютъ, что удвоенную величину этой площади должно взять со знакомъ плюсъ, если наблюдателю, смотрящему на точку M , съ положительной оси Z , скорость v_{xy} (M, V , на чертежахъ) кажется направленною слѣва на право, какъ на чертежѣ 13); если же скорость M, V кажется направленною справа на лѣво (какъ на черт. 14), то величина удвоенной площади OM, M' , входитъ въ равенство (126) со знакомъ минусъ.

Можно еще замѣтить, что знакъ плюсъ соответствуетъ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ уголъ θ , составляемый радіусомъ вектора OM , съ осью X , увеличивается въ теченіи времени отъ t до $(t+dt)$ (черт. 13); знакъ же минусъ соответствуетъ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ этотъ уголъ уменьшается (черт. 14).

Интеграль:

$$2\Pi_{xy} = \int (-r_{xy} \sin(v_{xy}, r_{xy})) ds_{xy}, \dots \dots (127)$$

взяты вдоль по кривой, описанной точкою M_3 , от положенія A , занимаемаго ею въ моментъ t_0 , до положенія, занимаемаго ею въ моментъ t , называется удвоенною площадью сектора, описаннаго радиусомъ векторомъ точки M_3 въ теченіи времени отъ t_0 до t ; предполагается, что вышеуказанное правило знаковъ соблюдается для каждаго безконечно-малаго элемента времени.

Если уголъ θ_3 постоянно увеличивается въ теченіи всего промежутка времени $(t - t_0)$, то тогда интеграль (127) выражаетъ величину удвоенной площади сектора OAM_3O , заключающейся внутри периметра, образуемаго радиусами векторами OA и OM_3 и траекторію AM_3 (черт. 13); если уголъ θ_3 все время уменьшается, то интеграль (127) выражаетъ отрицательно взятую величину удвоенной площади OAM_3O ; если же уголъ θ_3 то возрастаетъ, то убываетъ (какъ наприимѣръ изображено на чертежѣ 15), то интеграль (127) будетъ состоять изъ положительныхъ и отрицательныхъ частей, наприимѣръ, въ случаѣ представленномъ на чертежѣ 15, будетъ:

$$\Pi_{xy} = \text{плоч. } (OABDO) - \text{плоч. } (ODM_3O).$$

Во всякомъ случаѣ очевидно, что во второй части равенства (126) заключается производная:

$$\frac{d\Pi_{xy}}{dt},$$

выражающая скорость, съ которою возрастаетъ площадь сектора, описываемаго радиусомъ векторомъ проекціи движущейся точки на плоскость XU ; эта производная называется *секторьяльною скоростью проекціи движущейся точки на плоскость XU* ; мы будемъ обозначать ее знакомъ:

$$\sigma(xy).$$

И такъ:

$$m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=2m\sigma(xy)\dots\dots\dots (128)$$

къ этому мы должны прибавить еще одно замѣчаніе касательно о весьма употребительнаго выраженія секторьальной скорости. Голъ θ , и радіусъ векторъ r_{xy} (который мы будемъ на обозначать черезъ r_s) суть полярныя координаты точки M_s плоскости XY ; означимъ черезъ α_s и β_s координаты оси координатъ.

Примемъ теперь во вниманіе, что въ случаяхъ, изображенныхъ рисункъ 13:

$$v_s \sin(v_s r_s) = v_s \sin(v_s \alpha_s) = v_s \cos(v_s \beta_s),$$

случаяхъ, изображенныхъ на черт. 14:

$$\begin{aligned} v_s \sin(v_s r_s) &= v_s \sin(V_s M_s \alpha_s) = v_s \sin\left((V_s M_s \beta_s) - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -v_s \cos(V_s M_s \beta_s) = -v_s \cos(v_s \beta_s); \end{aligned}$$

также временно, v_{xy} замѣнено чрезъ v_s .

Слѣдовательно, во всякомъ случаѣ:

$$\pm r_s v_s \sin(v_s r_s) = r_s v_s \cos(v_s \beta_s).$$

о формулѣ же (20 bis) стр. 33-й кинематической части:

$$v_s \cos(v_s \beta_s) = r_s \frac{d\theta_s}{dt};$$

ому, возстановляя прежнія обозначенія, будемъ имѣть слѣдующее выраженіе удвоенной секторьальной скорости:

$$2\sigma(xy) = r^2_{xy} \frac{d\theta_{xy}}{dt} \dots\dots\dots (129)$$

этимъ образомъ мы имѣемъ возможность сказать слѣдующее относительно значеній величинъ, образующихъ первыя части правой (124).

Во первыхъ, онѣ суть моменты количества движенія матеріальной точки вокругъ осей координатъ, или проеціи на оси координатъ момента количества движенія вокругъ начала координатъ.

Во вторыхъ, онѣ суть удвоенныя произведенія изъ массы точки на секторьяльныя скорости проецій радіуса вектора на плоскости координатъ; это выражается формулами:

$$m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = 2m\sigma(yz) = mr^2 \frac{d\theta_1}{yz dt} \dots\dots (130, a)$$

$$m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = 2m\sigma(zx) = mr^2 \frac{d\theta_2}{zx dt} \dots\dots (130, b)$$

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 2m\sigma(xy) = mr^2 \frac{d\theta_3}{xy dt} \dots\dots (130, c)$$

Здѣсь θ_1 есть уголъ, составляемый съ осью Y проеціею радіуса вектора движущейся точки на плоскость YZ ; $\sigma(yz)$ — секторьяльная скорость проеціи точки на ту же плоскость; θ_2 — уголъ, составляемый съ осью Z проеціею радіуса вектора на плоскость ZX ; $\sigma(zx)$ — секторьяльная скорость проеціи точки на ту же плоскость.

§ 24. Значеніе дифференціальныхъ уравненій (110). Интегралы, выражающіе законъ площадей.

Каждое изъ дифференціальныхъ уравненій (110) выражаетъ, что производная по времени отъ момента количества движенія вокругъ одной изъ осей координатъ равняется моменту вокругъ той же оси силы, приложенной къ матеріальной точкѣ.

Значеніе этихъ дифференціальныхъ уравненій можетъ быть объяснено еще иначе.

Длина l_0 , проведенная изъ начала координатъ и представляющая величину и направленіе момента количества движенія матеріальной точки вокругъ начала координатъ, измѣняется во время движенія точки свою величину и свое направленіе; конецъ ея описываетъ при этомъ вѣкоторую кривую линію, которую можно назвать *годографомъ момента количества движенія*.

Уравненія (110) выражаютъ, что скорость точки, чертящей годографъ момента количества движенія, равна и параллельна длинѣ, изображающей моментъ силы F .

если моментъ силы F вокругъ оси X равенъ нулю во все движениі точки, то изъ уравненія (110, а) получимъ слѣдующій интегралъ дифференціальныхъ уравненій движенія:

$$m(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}) = C_1. \dots \dots \dots (131, а)$$

Моментъ силы F вокругъ оси X равенъ нулю или тогда, когда сія силы на плоскость YZ равна нулю (тогда $V=0$, $Z=0$), или тогда, когда проекція силы на эту плоскость проходитъ черезъ начало координатъ: последнее условіе выражается равенствомъ:

$$\frac{y}{z} = \frac{z}{y}. \dots \dots \dots (132, а)$$

Значитъ, чтобы сила F пересѣкала ось X .

Интегралъ (131, а) выражаетъ, что секторьяльная скорость сія радіуса вектора на плоскость YZ имѣетъ постоянную величину, то есть:

$$mr^2_{yz} \frac{d\theta_1}{dt} = C_1,$$

$$\sigma(yz) = \frac{d\Pi_{yz}}{dt} = \frac{C_1}{2m};$$

слѣдуетъ:

$$\Pi_{yz} = \frac{C_1}{2m} t, \dots \dots \dots (133, а)$$

т. е. площадь сектора, описываемаго проекціею радіуса вектора на плоскости YZ , возрастаетъ равномерно.

Вѣкъ какъ за ось X можетъ быть взята всякая неподвижная, а за плоскость YZ — всякая плоскость перпендикулярная ей, то мы можемъ сказать слѣдующее:

Если равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ движущейся матеріальной точкѣ, проходитъ черезъ какую либо неизмѣнную прямую линію, то дифференціальныя уравненія этой точки имѣютъ интегралъ, выражающій постоянство секторьяльной скорости проекціи радіуса вектора

точки на плоскость перпендикулярную къ прямой (началомъ радіуса вектора служитъ пересѣченіе прямой съ плоскостью).

Если во все время движенія моменты силы F вокругъ двухъ осей координатъ равны нулю, то движеніе точки совершается въ нѣкоторой плоскости, проходящей черезъ начало координатъ.

Положимъ, что равны нулю моменты силы F вокругъ осей X и Y , то есть, что сила F удовлетворяетъ двумъ условіямъ:

$$yZ - zY = 0, \quad zX - xZ = 0. \dots\dots\dots (134)$$

Помноживъ первое равенство на x , второе на y и сложивъ, получимъ равенство:

$$z(yX - xY) = 0,$$

которое тоже должно быть удовлетворено при движеніи точки.

Оно можетъ быть удовлетворено или тѣмъ, что во все время движенія $z = 0$, или тѣмъ, что сила F удовлетворяетъ, кромѣ условій (134), еще условію:

$$xY - yX = 0 \dots\dots\dots (135)$$

Въ первомъ случаѣ точка движется въ плоскости XY ; мы сейчасъ покажемъ, что она движется въ нѣкоторой плоскости и во второмъ случаѣ.

Въ этомъ случаѣ вторыя части всѣхъ трехъ уравненій (110, a , b , c) равны нулю, а потому мы имѣемъ тогда три интеграла:

$$m(yz' - zy') = C_1. \dots\dots\dots (131, a)$$

$$m(zx' - xz') = C_2. \dots\dots\dots (131, b)$$

$$m(xy' - yx') = C_3. \dots\dots\dots (131, c)$$

Помноживъ: первый — на x , второй — на y , третій — на z , и сложивъ, получимъ:

$$0 = C_1x + C_2y + C_3z; \dots\dots\dots (136)$$

это — уравненіе той плоскости, проходящей черезъ начало координатъ, въ которой должна оставаться движущаяся точка.

Постоянные C_1, C_2, C_3 , пропорциональны косинусам угловъ, составленныхъ нормалю къ этой плоскости съ осями координатъ, опредѣляются по начальнымъ обстоятельствамъ движенія: $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, а именно:

$$C_1 = m(b\gamma - c\beta), \quad C_2 = m(ca - a\gamma), \quad C_3 = m(a\beta - ba) \dots (137)$$

уделимъ вниманіе на эти случаи, въ которыхъ сила F удовлетворяетъ тремъ условіямъ (134) (135) и въ которыхъ, поэтому, инціальныя уравненія движенія материальной точки имѣютъ интегралы (131, a, b, c).

Уравненія (134) и (135) можно представить въ видѣ слѣдующихъ равенствъ:

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z}, \dots \dots \dots (132)$$

Изъ нихъ, что направленіе силы F проходитъ черезъ начало координатъ.

Интегралы (131, a, b, c) выражаютъ, что проекціи на всѣ координаты момента количества движенія вокругъ начала координатъ имѣютъ постоянныя величины; изъ этого слѣдуетъ, что моментъ количества движенія l_0 имѣетъ постоянную величину:

$$l_0 = m[(b\gamma - c\beta)^2 + (ca - a\gamma)^2 + (a\beta - ba)^2]^{\frac{1}{2}} = \\ = mr_0 v_0 \sin(v_0 r_0) \dots \dots \dots (138)$$

Его направленіе:

$$\left. \begin{aligned} \cos(l_0 X) &= \frac{m(b\gamma - c\beta)}{l_0} \\ \cos(l_0 Y) &= \frac{m(ca - a\gamma)}{l_0} \\ \cos(l_0 Z) &= \frac{m(a\beta - ba)}{l_0} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (139)$$

съ помощью интеграловъ

торьяльные скорости проекцій радіуса вектора на всѣ три плоскости координатъ постоянны:

$$\sigma(yz) = \frac{C_1}{2m}, \sigma(zx) = \frac{C_2}{2m}, \sigma(xy) = \frac{C_3}{2m}; : \dots \dots (140)$$

а отсюда слѣдуетъ, что площади секторовъ, описываемыхъ на плоскостяхъ координатъ проекціями радіуса вектора на эти плоскости, возрастаютъ равномерно:

$$\Pi_{yz} = \frac{C_1}{2m}t, \Pi_{zx} = \frac{C_2}{2m}t, \Pi_{xy} = \frac{C_3}{2m}t \dots \dots \dots (141)$$

Секторьяльная скорость проекціи радіуса вектора на какую бы то ни было неподвижную плоскость, проходящую черезъ начало координатъ, будетъ также постоянна; въ самомъ дѣлѣ, если переменнымъ направлѣніе осей координатъ такимъ образомъ, чтобы одна изъ новыхъ осей совпала съ направлѣніемъ OP , перпендикулярнымъ къ этой плоскости \mathfrak{F} , то, по предыдущимъ формуламъ, рассматриваемая секторьяльная скорость σ (\mathfrak{F}) выразится такъ:

$$\sigma(\mathfrak{F}) = \frac{l_0 \cos(l_0 P)}{2m} \dots \dots \dots (142)$$

Отсюда видно, что наибольшая секторьяльная скорость:

$$\sigma = \frac{l_0}{2m} \dots \dots \dots (143)$$

будетъ въ плоскости (136), въ которой заключается траекторія движущейся точки; секторьяльная же скорость проекціи радіуса вектора на всякую плоскость, проходящую черезъ направлѣніе l_0 , будетъ равна нулю.

Слѣдовательно, если равнодѣйствующая силъ приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, при всякомъ положеніи точки направлена чрезъ начало координатъ, то движеніе точки совершается въ плоскости, проходящей черезъ начало координатъ и подчиняется тому закону, что площадь сектора, описываемую радіусомъ векторомъ, возрастаетъ равномерно; сек-

торьяльная скорость въ этой плоскости (величина которой постоянна) можетъ быть выражена слѣдующимъ образомъ:

$$\sigma = \frac{l_0}{2m} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt}, \dots \dots \dots (144)$$

гдѣ θ есть уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ r съ какимъ либо неподвижнымъ направлениемъ, проведеннымъ черезъ начало координатъ въ плоскости траекторіи.

Правило, опредѣляющее, что произведение изъ массы точки на площадь сектора, описываемаго проеціею радіуса вектора ея на нѣкоторую плоскость, возрастаетъ равномерно, есть частный случай закона движенія системы матерьяльныхъ точекъ, подверженныхъ дѣйствию центральныхъ силъ; законъ этотъ извѣстенъ подъ именемъ закона площадей, *описываемыхъ проеціями радіусовъ векторовъ на сказанную плоскость.*

Говоря о движеніи одной матерьяльной точки, мы выразимся такъ:

- а) законъ площадей въ нѣкоторой плоскости имѣетъ мѣсто, если равнодѣйствующая приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ силъ проходитъ черезъ ось, перпендикулярную къ этой плоскости;
- б) законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой плоскости, проходящей черезъ неподвижную точку, если равнодѣйствующая приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ силъ проходитъ черезъ эту неподвижную точку.

Законъ площадей былъ открытъ путемъ индуктивнымъ; Кеплеръ, изъ наблюденій надъ движеніями планетъ вокругъ солнца, заключилъ, что площадь сектора, описываемаго радіусомъ векторомъ каждой планеты, возрастаетъ равномерно. Ньютонъ, путемъ математической дедукціи, доказалъ существованіе этого закона движенія при дѣйстви на матерьяльную точку центральныхъ силъ.

Каждый изъ интеграловъ (131, а, б, с,) выражаетъ законъ площадей въ одной изъ плоскостей координатъ.

Относительно числа интеграловъ (131), удовлетворяющихъ какой либо задачѣ, можно замѣтить, что не можетъ встрѣтиться случаевъ, въ которыхъ задачѣ удовлетворяютъ два интеграла, третій же

не удовлетворяетъ; казалось бы, такіе случаи возможны тогда, когда сила F постоянно удовлетворяетъ двумъ условіямъ (134), не удовлетворяя третьему (135); но тогда, какъ видѣли выше, движеніе должно происходить постоянно въ плоскости XU , то есть должно быть:

$$x=0, \quad x'=0, \quad c=0, \quad \gamma=0,$$

а слѣдовательно (137): $C_1=0, \quad C_2=0$; такъ что интегралы (131, a) (131, b) обращаются въ тождества вида: $0=0$.

Изъ всего сказаннаго видно, что дифференціальныя уравненія движенія свободной матеріальной точки могутъ имѣть:

либо всѣ три интеграла (131, a , b , c),

либо только одинъ изъ нихъ,

либо ни одного.

§ 25. Работа силы. Живая сила. Значеніе дифференціального уравненія (112).

Обратимся теперь къ дифференціальному уравненію (112) (§ 21).

Вторая часть его:

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

равняется произведенію:

$$Fds \cos (F, v), \dots \dots \dots (145)$$

составленному изъ длины безконечно-малаго элемента пути, проходящаго матеріальной точкою, и изъ проэкціи на направленіе скорости равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ матеріальной точкѣ; это произведеніе называется *работою силы F на протяженіи элемента пути ds* или *элементарною работою силы F* .

Элементарная работа можетъ имѣть величину положительную или отрицательную, смотря потому, будетъ ли уголъ (F, v) острый или тупой. Въ первомъ случаѣ сила способствуетъ движенію, во второмъ — противодѣйствуетъ ему. Существуетъ разрядъ силъ, которыя всегда даютъ отрицательную работу, являясь всегда въ качествѣ противодѣйствій движенію; таковы: треніе, сопротивленіе среды, электродинамическія силы дѣйствія индукціонныхъ токовъ,

даемыхъ движеніемъ проводниковъ и магнитовъ. Такія силы
иногда называютъ *силами сопротивленія движенію*, или просто *сопро-*
тивленіями движенію.

Интегралъ:

$$\int_{s_1}^{s_2} F \cos (F, v) ds,$$

і по протяженію нѣкоторой части пути, пройденнаго точкою,
иногда называютъ *работою силы F на этой части пути*.

Работа имѣетъ измѣренія одинаковыя съ моментами силъ: она
представляетъ произведеніе изъ величины силы на длину; такъ что:

$$\text{единица работы} = (\text{един. силы}) (\text{един. длины}) = \frac{M \cdot \partial^2}{\partial^2} \dots (146)$$

а практикѣ за единицу работы принимаютъ килограммо-метръ,
т. е. работу, совершаемую на протяженіи одного метра, вѣсомъ
одинъ килограмма (въ Парижѣ, на уровнѣ моря); но правильнѣе
было бы за единицу работы ту, которая выражена формулою (146).
Комиссія при Британскомъ Обществѣ поощренія наукъ (стр. 27)
уже приняла за единицу — работу, производимую динною
тяжестью сантиметра (предполагая, конечно, что направленіе
совпадаетъ постоянно съ направленіемъ скорости); эту единицу
работы предложено называть эргъ (erg).

$$\text{Эргъ} = \frac{(\text{граммъ}) \cdot (\text{сантиметръ})^2}{(\text{секунда})^2} \dots \dots \dots (147)$$

Приводимъ здѣсь числовыя выраженія нѣкоторыхъ величинъ
въ эргахъ.

$$\text{Килограммометръ} = 100000. g. (\text{эргъ}).$$

$$\text{Килограммометръ въ Парижѣ, на уровнѣ моря} = 9,8094. 10^7.$$

$$\text{Англійскій фунтофутъ} = 13825. g. (\text{эргъ}).$$

Осадная сила есть способность произвести 75 килограммо-
въ работы въ секунду; если принять $g = 981$ (въ сантиметрахъ

и секундахъ), то лошадиную силу можно опредѣлить какъ способность произвести работу въ 7,36. 10⁹ эрговъ въ секунду.

Въ Англіи принята лошадиная сила нѣсколько большая: способность произвести 550 фунтофутовъ работы въ секунду или, принимая $g=981$, способность произвести 7,46. 10⁹ эрговъ работы въ секунду.

Первая часть дифференціального уравненія (112) есть дифференціалъ отъ произведенія:

$$\frac{mv^2}{2},$$

называемаго *живою силою* матеріальной точки или *кинетическою энергіею* ея.

Живая сила имѣетъ тѣ же самыя измѣренія, какъ и работа, а потому эргъ есть также единица кинетической энергіи или живой силы.

Дифференціальное уравненіе (112) выражаетъ, что безконечно малое приращеніе живой силы матеріальной точки, получаемое ею на протяженіи безконечно-малаго элемента пути ея, равняется элементарной работѣ (на протяженіи того же элемента пути) равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ матеріальной точкѣ, элементарная же работа равнодѣйствующей F равна суммѣ элементарныхъ работъ составляющихъ силъ: F_1, F_2, \dots, F_k , то есть:

$$F \cos (F, v) ds = F_1 \cos (F_1, v) ds + F_2 \cos (F_2, v) ds + \dots \\ \dots + F_k \cos (F_k, v) ds \dots \dots \dots (148)$$

Пусть t_1 и t_2 суть два какіе либо момента времени, v_1 и v_2 — скорость матеріальной точки въ эти моменты, s_1 — разстояніе, считаемое по дугѣ траекторіи, отъ нѣкоторой опредѣленной точки S_0 траекторіи, до того положенія, которое матеріальная точка занимаетъ въ моментъ t_1 , l_{21} — длина пути пробѣгаемаго точкою въ теченіи промежутка времени $(t_2 - t_1)$.

Возьмемъ отъ обѣихъ частей уравненія (112) интегралы въ предѣлахъ, соответствующихъ моментамъ t_1 и t_2 ; получимъ:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos(F, v) ds, \dots \dots \dots (149)$$

гдѣ:

$$s_2 = s_1 + l_{21}.$$

Это равенство выражаетъ, что *разность между величинами живой силы въ концѣ и въ началѣ пути, пройденнаго свободною матерьяльною точкою въ теченіи какого либо промежутка времени ($t_2 - t_1$), равняется работѣ, произведенной на этомъ пути равнодѣйствующею силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ.*

Дифференціальное уравненіе (112) и равенство (149) справедливы при всякихъ силахъ, приложенныхъ къ свободной матерьяльной точкѣ.

§ 26. Законъ живой силы или сохраненія энергіи для одной матерьяльной точки. Потенціальная функція. Поверхности уровня.

Если проеція на оси координатъ силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, суть такія функціи координатъ, которыя дѣлаютъ тричленъ:

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

полнымъ дифференціаломъ нѣкоторой функціи $U(x, y, z)$ координатъ, то дифференціальное уравненіе (112) будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dU;$$

а потому дифференціальныя уравненія движенія свободной матерьяльной точки будутъ имѣть тогда слѣдующій интегралъ:

$$\frac{mv^2}{2} = U + h, \dots \dots \dots (150)$$

гдѣ h есть произвольная постоянная.

Условіе:

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU \dots \dots \dots (151)$$

требуетъ, чтобы проэкціи силы на оси координатъ были равны производнымъ отъ U по координатамъ; а именно должно быть

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z} \dots \dots \dots (152)$$

Функція U отъ x, y, z , производныя которой по x, y, z выражаютъ проэкціи X, Y, Z силы, приложенной къ матеріальной точкѣ, находящейся въ точкѣ (x, y, z) пространства, называется *потенціальною* или *силовою функціею* этой силы. Сила же, проэкціи которой на оси координатъ суть функціи отъ x, y, z , удовлетворяющія условію (151), называется *силою, имѣющею потенциалъ*.

Если придадимъ опредѣленные численные значенія: a, b, c переменнымъ величинамъ x, y, z , заключающимся въ функціи U , то послѣдняя получитъ нѣкоторое численное значеніе C .

Уравненіе:

$$U(x, y, z) = U(a, b, c)$$

или

$$U(x, y, z) = C \dots \dots \dots (153)$$

есть уравненіе поверхности, проходящей черезъ ту точку пространства, координаты которой суть a, b, c ; во всѣхъ точкахъ этой поверхности, называемой *поверхностью уровня*, потенциальная функція U имѣетъ одну и ту же постоянную величину C ; эта постоянная называется *параметромъ* поверхности уровня.

Придавая параметру C въ уравненіи (153) различныя дѣйствительныя значенія, которыя можетъ получать потенциальная функція U , мы получимъ уравненія различныхъ поверхностей уровня этой функціи. Каждой потенциальной функціи свойственно безчисленное множество поверхностей уровня, совокупность которыхъ образуетъ систему, заполняющую собою все то пространство, внутри котораго потенциальная функція имѣетъ дѣйствительныя значенія.

Нормаль, проведенная къ поверхности уровня черезъ какую либо точку ея, имѣетъ два прямопротивоположныя направленія; одно изъ нихъ мы назовемъ положительною нормалью, другое — отрицательною.

Косинусы угловъ, составляемыхъ этими противоположными направленіями съ осями координатъ выражаются такъ:

$$\left. \begin{aligned} \cos(N_1 X) &= \frac{1}{\Delta U} \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \cos(N_1 Y) &= \frac{1}{\Delta U} \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \cos(N_1 Z) &= \frac{1}{\Delta U} \frac{\partial U}{\partial z}, \\ \cos(N_2 X) &= \frac{1}{-\Delta U} \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \cos(N_2 Y) &= \frac{1}{-\Delta U} \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \cos(N_2 Z) &= \frac{1}{-\Delta U} \frac{\partial U}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (154)$$

гдѣ:

$$\Delta U = + \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \dots\dots\dots (155)$$

и гдѣ въ производныя должны быть подставлены координаты той точки поверхности уровня, изъ которой возстановлена нормаль.

За положительное мы примемъ направленіе N_1 , соответствующее положительному знаку корня (155), эту положительную нормаль мы будемъ иногда, для краткости, называть просто нормалью и будемъ обозначать буквою N безъ знака внизу.

Пусть M есть точка пространства, черезъ которую проведена поверхность уровня съ параметромъ C и нормаль къ этой поверхности; M_1 — другая точка, бесконечно близкая къ M ; x, y, z — координаты точки M ; $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$ — координаты точки M_1 , гдѣ $\delta x, \delta y, \delta z$ суть проекціи на оси координатъ какой либо бесконечно-малой дуги δs , стягиваемой хордою MM_1 . Очевидно, пара-

метръ той поверхности уровня, на которой находится точка M_1 , можетъ отличаться отъ C только на безконечно-малую величину:

$$\delta C = \frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z = \Delta U \cos(N_1, \delta s) \delta s \dots (156)$$

Это выраженіе приведено здѣсь для того, чтобы показать, что съ той стороны поверхности уровня C , въ которую направлена положительная нормаль, находятся поверхности уровня съ параметрами большими C , со стороны же отрицательной нормали находятся поверхности уровня съ параметрами меньшими C ; въ самомъ дѣлѣ, изъ выраженія (156) видно, что:

$$\delta C > 0, \text{ если } \cos(N_1, \delta s) > 0$$

$$\delta C < 0, \text{ если } \cos(N_1, \delta s) < 0.$$

На основаніи равенствъ (152) изъ формулъ (155) и (154) получимъ:

$$\Delta U = +\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = F,$$

$$\cos(N_1, X) = \cos(F, X); \cos(N_1, Y) = \cos(F, Y); \cos(N_1, Z) = \cos(F, Z);$$

последнія три равенства выражаютъ, что сила F , имѣющая разсчитываемый потенциалъ и приложенная къ материальной точкѣ, находящейся въ точкѣ $M(x, y, z)$ пространства, направлена по положительной нормали къ поверхности уровня, проведенной черезъ эту точку.

Вернемся теперь къ интегралу (150), который можетъ быть представленъ такъ:

$$\frac{mv^2}{2} - U = h \dots \dots \dots (157)$$

и можетъ быть выраженъ слѣдующею словесною формулою:

Если равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ свободной материальной точкѣ, имѣетъ потенциалъ, то движеніе точки подчиняется слѣдующему закону: разность между кинетическою

и величиною параметра той поверхности уровня, на которой находится материальная точка, есть величина постоянная во все время движения.

Этот закон движения известенъ подъ именемъ закона живой силы для одной материальной точки.

Работа силы F , имѣющей потенциалъ U , на пути, начинающемся въ точкѣ $M_1 (x_1, y_1, z_1)$ и кончающемся въ точкѣ $M_2 (x_2, y_2, z_2)$, выразится разностью значеній потенциальной функціи въ этихъ точкахъ; то есть:

$$\int_{s_1}^{s_2} F \cos (F, v) ds = \int (Xdx + Ydy + Zdz) = \\ = \int dU = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1) \dots \dots (158)$$

Слѣдовательно, величина работы не зависитъ отъ того пути, который опишетъ движущаяся точка между точками M_1 и M_2 , а только отъ величинъ параметровъ тѣхъ поверхностей уровня, на которыхъ эти точки находятся.

Точно также, при переходѣ материальной точки по какому бы то ни было пути съ одной поверхности уровня на другую, сила F совершаетъ работу, выражаемую разностью параметровъ этихъ поверхностей; при этомъ параметръ той поверхности, изъ которой вышла точка, играетъ роль вычитаемого, а параметръ той поверхности, на которую приходитъ точка — роль уменьшаемого.

Уравненіе (149) предыдущаго параграфа принимаетъ при силахъ, имѣющихъ потенциалъ, слѣдующій видъ:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1) \dots \dots (159)$$

что получается также изъ интеграла (157) или (150), выражающаго законъ живой силы для одной материальной точки.

Примѣрами силъ, имѣющихъ потенциалъ, могутъ служить:

а) постоянная сила. Потенціальная функція ея есть линейная функція координатъ; въ самомъ дѣлѣ, если:

$$X=A, \quad Y=B, \quad Z=C,$$

гдѣ A, B, C — постоянныя, то очевидно:

$$U=Ax+By+Cz+D, \dots\dots\dots (160)$$

гдѣ D есть значеніе потенціальной функціи въ началѣ координатъ.

Поверхности уровня этой потенціальной функціи суть параллельныя плоскости.

Другой примѣръ представляетъ:

б) сила, притягивающая матерьяльную точку къ неподвижному центру, находящемуся въ началѣ координатъ, или отталкивающая точку отъ этого центра; величина силы выражается нѣкоторою функціею радіуса вектора точки.

Проекціи такой силы на оси координатъ выразятся такъ:

$$X=F(r)\frac{x}{r}, \quad Y=F(r)\frac{y}{r}, \quad Z=F(r)\frac{z}{r},$$

гдѣ $F(r)$ есть положительно-взятая величина отталкивательной силы, или отрицательно-взятая величина притягательной силы; подъ r подразумѣвается здѣсь положительно-взятая величина разстоянія матерьяльной точки отъ центра силы; то есть:

$$r=+\sqrt{x^2+y^2+z^2};$$

вмѣстѣ съ тѣмъ мы будемъ обозначать тою же буквою также и направленіе изъ центра силы вдоль по радіусу вектору.

Легко видѣть, что косинусы угловъ, составляемыхъ направле- ніемъ r съ осями координатъ, выражаются производными отъ r по соотвѣственнымъ координатамъ точки, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos(rx) \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \cos(ry) \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z}{r} = \cos(rz) \end{aligned} \right\}; \dots\dots\dots (161)$$

гдѣ

$$X = F(r) \frac{\partial r}{\partial x}, \quad Y = F(r) \frac{\partial r}{\partial y}, \quad Z = F(r) \frac{\partial r}{\partial z}, \quad \dots \quad (162)$$

да слѣдуетъ, что потенциальная функція этой силы — слѣ-
дующая:

$$U = \int F(r) dr. \quad \dots \quad (163)$$

и, самою дѣлѣ, такъ какъ:

$$\frac{dU}{dr} = F(r),$$

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = F(r) \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \dots$$

Если центръ притяженія или отталкиванія находится не
въ началѣ координатъ, а въ какой либо неподвижной точкѣ M_1 ,
имѣющей координаты: X_1, Y_1, Z_1 , то тогда подѣ r слѣдуетъ
умѣнчать:

$$r = +\sqrt{(x - X_1)^2 + (y - Y_1)^2 + (z - Z_1)^2},$$

гдѣ направленіемъ r — направленіе изъ центра M_1 къ той
точкѣ на которую дѣйствуетъ рассматриваемая сила.
Потенциальная функція выражается интеграломъ (163), проеки-
и на оси координатъ выражаются такъ:

$$\left. \begin{aligned} X &= F(r) \frac{\partial r}{\partial x} = F(r) \frac{x - X_1}{r} \\ Y &= F(r) \frac{\partial r}{\partial y} = F(r) \frac{y - Y_1}{r} \\ Z &= F(r) \frac{\partial r}{\partial z} = F(r) \frac{z - Z_1}{r} \end{aligned} \right\} \dots \quad (164)$$

Въ этомъ случаѣ, также какъ и въ предыдущемъ, поверхности
суть концентрическія сферы, имѣющія центръ въ центрѣ силы.
На материальную точку могутъ дѣйствовать одновременно
нѣсколько такихъ силъ, какъ упомянутая въ предыдущемъ пунктѣ;

тогда потенциальная функция равнодѣйствующей будетъ выражаться суммою потенциальныхъ функций составляющихъ силъ:

$$U = \int F_1(r_1)dr_1 + \int F_2(r_2)dr_2 + \dots + \int F_k(r_k)dr_k, \quad (165)$$

гдѣ:

$$r_1 = +\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$$

$$r_2 = +\sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$r_k = +\sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + (z-z_k)^2};$$

$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_k, y_k, z_k$ — суть координаты центровъ, изъ которыхъ дѣйствуютъ составляющія силы.

Проекція равнодѣйствующей на ось X^{oxy} выразится такъ:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = F_1(r_1) \frac{x-x_1}{r_1} + F_2(r_2) \frac{x-x_2}{r_2} + \dots + F_k(r_k) \frac{x-x_k}{r_k} \dots \quad (166)$$

д) Сила:

$$X = -\frac{Ky}{x^2+y^2}, \quad Y = \frac{Kx}{x^2+y^2}, \quad Z=0$$

(гдѣ K — постоянное) имѣетъ слѣдующую потенциальную функцию:

$$U = K \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \dots \dots \dots \quad (167)$$

Отношеніе $(y:x)$ есть тангенсъ угла θ , составляемаго съ осью X^{oxy} проекціею радіуса вектора точки на плоскость XU ; тотъ же самый тангенсъ имѣютъ углы:

$$\theta \pm 2n\pi,$$

гдѣ n — какое либо цѣлое число; поэтому потенциальная функция (167) имѣетъ въ каждой точкѣ пространства безчисленное множество значеній:

$$U = K\theta \pm 2n\pi K \dots \dots \dots \quad (168)$$

Когда понадобится, мы обратимъ вниманіе на обстоятельства, происходящія изъ многократности значеній такой потенциальной функции.

и силы для одной материальной точки пред-
ставительный случай общего закона того же имени, отно-
сительно системы точек; въ своемъ мѣстѣ мы сообщимъ
числѣныя свѣдѣнія относительно открытія этого закона.

**Ѣрѣ рѣшенія задачи о криволинейномъ дви-
женіи материальной точки подѣ влияніемъ цент-
рической потенціалъ.**

теперь примѣримъ рѣшенія такой задачи, въ ко-
торой законъ площадей и живой силы:

1. Определить движеніе свободной материальной
точки къ началу координатъ силою обратно-про-
порциональною квадрату разстоянія отъ него.

Уравненія движенія материальной точки суть:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\mu m}{r^3} x \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\mu m}{r^3} y \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{\mu m}{r^3} z \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots (169)$$

гдѣ μ постоянная величина.

Сила постоянно направлена къ началу координатъ,
но въ § 24, дифференціальныя уравненія имѣютъ

$$(yz' - zy') = \frac{C_1}{m} \dots \dots \dots (131, a)$$

$$(zx' - xz') = \frac{C_2}{m} \dots \dots \dots (131, b)$$

$$(xy' - yx') = \frac{C_3}{m} \dots \dots \dots (131, c)$$

такъ какъ сила имѣетъ потенціалъ:

$$U = -\mu m \int \frac{dr}{r^3} = \frac{\mu m}{r},$$

то, какъ показано въ § 26, дифференціальныя уравненія имѣютъ еще интегралъ:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m\mu}{r} = m h, \dots\dots\dots (170)$$

выражающій законъ живой силы.

Такимъ образомъ, мы имѣемъ уже четыре интеграла съ четырьмя произвольными постоянными: C_1, C_2, C_3, h .

Остается произвести еще два интегрированія, которые введутъ двѣ произвольныя постоянныя, и тогда задача будетъ рѣшена.

Изъ параграфа 24-го извѣстно, что движеніе матерьяльной точки происходитъ въ плоскости:

$$C_1x + C_2y + C_3z = 0, \dots\dots\dots (136)$$

проходящей черезъ начало координатъ, и секторьяльная скорость радіуса вектора, остающагося постоянно въ этой плоскости, постоянна:

$$\sigma = \frac{l_0}{2m}, \dots\dots\dots (143)$$

гдѣ:

$$l_0 = +\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2} = m r_0 v_0 \sin(v_0 r_0) \dots\dots (138)$$

Выразимъ секторьяльную скорость σ въ полярныхъ координатахъ по формулѣ (144) параграфа 24-го:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = 2\sigma; \dots\dots\dots (144)$$

въ интегралѣ (170) выразимъ квадратъ скорости въ полярныхъ же координатахъ по формулѣ (20) кинематической части (стр. 33):

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2h + \frac{2\mu}{r} \dots\dots\dots (171)$$

Мы будемъ интегрировать дифференціальныя уравненія перваго порядка: (144) (171).

(Аргументъ θ есть уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ съ нѣкоторою неподвижною осью, проведенною въ плоскости дви-

черезъ начало координатъ; при движеніи точки этотъ уголъ
только увеличивается).

включимъ θ' изъ уравненія (171) и рѣшимъ его относи-
тельно r' ; получимъ:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{4\sigma^2}{r^2}}; \dots\dots\dots (172)$$

принявъ это послѣднее уравненіе, найдемъ выраженіе для r въ
функции отъ t .

Вместо того, чтобы интегрировать уравненіе (172), мы его
изучимъ въ другомъ, которое легче интегрируется и доставляетъ
намъ траекторію.

Въ этомъ представимъ себѣ, что r выражено функциею отъ θ ;

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt},$$

и основаніи уравненія (144):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{2\sigma}{r^2} = - \frac{d\left(\frac{2\sigma}{r}\right)}{d\theta}.$$

членъ, находящійся подъ корнемъ уравненія (172), можетъ
преобразованъ слѣдующимъ образомъ:

$$2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{4\sigma^2}{r^2} = 2h + \frac{\mu^2}{4\sigma^2} - \left(\frac{2\sigma}{r} - \frac{\mu}{2\sigma}\right)^2.$$

т.е.:

$$2h + \frac{\mu^2}{4\sigma^2}$$

всегда величину положительную; въ самомъ дѣлѣ, означимъ
 v_0 и r_0 начальную скорость и начальный радіусъ вектора;
получимъ (138) (143):

$$4\sigma^2 = v_0^2 r_0^2 \sin^2(v_0 r_0);$$

затѣмъ же h можетъ быть выражена (см. (170)) такъ:

$$h = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu}{r_0};$$

слѣдовательно:

$$2h + \frac{\mu^2}{4\sigma^2} = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu^2}{v_0^2 r_0^2 \sin^2(v_0 r_0)}.$$

Такъ какъ квадратъ синуса не можетъ быть болѣе единицы, то дробь:

$$\frac{\mu^2}{v_0^2 r_0^2} \cdot \frac{1}{\sin^2(v_0 r_0)}$$

не можетъ быть менѣе дроби:

$$\frac{\mu^2}{v_0^2 r_0^2},$$

то есть, первая дробь или болѣе второй, или равна ей:

$$\frac{\mu^2}{v_0^2 r_0^2 \sin^2(v_0 r_0)} \geq \frac{\mu^2}{v_0^2 r_0^2};$$

изъ этого слѣдуетъ:

$$v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu^2}{v_0^2 r_0^2 \sin^2(v_0 r_0)} \geq v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu^2}{v_0^2 r_0^2},$$

то есть:

$$2h + \frac{\mu^2}{4\sigma^2} \geq \left(v_0 - \frac{\mu}{v_0 r_0}\right)^2;$$

значитъ, рассматриваемая нами сумма дѣйствительно всегда имѣетъ величину положительную.

Раздѣливъ эту сумму на положительную величину ($\mu^2:4\sigma^2$), мы получимъ положительное отношеніе, которое мы означимъ черезъ e^2 :

$$2h + \frac{\mu^2}{4\sigma^2} = \frac{\mu^2}{4\sigma^2} e^2$$

$$e^2 = 1 + \frac{v_0^2 r_0^2 \sin^2(v_0 r_0)}{\mu^2} \left(v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}\right). \dots \dots (173)$$

По вѣсѣмъ этимъ причинамъ, уравненіе (172) можно преобразовать въ слѣдующее:

$$-\frac{dz}{d\theta} \sqrt{\frac{\mu^2}{4\sigma^2} e^2 - \zeta^2}, \dots \dots \dots (174)$$

аткости, через ζ обозначена слѣдующая разность:

$$\frac{2\sigma}{r} - \frac{\mu}{2\sigma} = \zeta.$$

ъ переменныя въ уравненіи (174):

$$-\frac{d\zeta}{\sqrt{\frac{\mu^3}{4\sigma^3}e^2 - \zeta^2}} = d\theta$$

и, получимъ:

$$\arccos\left(\frac{2\sigma\zeta}{\mu e}\right) = \theta + \Gamma_1,$$

$$\zeta = \frac{\mu e}{2\sigma} \cos(\theta + \Gamma_1)$$

$$\frac{2\sigma}{r} = \frac{\mu}{2\sigma} \left(1 + e \cos(\theta + \Gamma_1)\right),$$

пята произвольная постоянная.

ъ r въ функции отъ θ :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta + \Gamma_1)}, \dots \dots \dots (175)$$

$$p = \frac{4\sigma^2}{\mu} \dots \dots \dots (176)$$

е (175) (какъ уже было упомянуто на стр. 42 кн-части) представляетъ одну изъ кривыхъ линій 2-го есть эллипсъ, гиперболу, или параболу; величина эта e опредѣляетъ родъ кривой, а именно: *гипербола*, если $e > 1$, то есть, если (см. формулу (173)):

$$v_0^2 > \frac{2\mu}{r_0};$$

гипербола, если $e = 1$, то есть, если:

$$v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0};$$

кривая есть эллипс, если $e < 1$, то есть, если:

$$v_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}.$$

Величина p есть полупараметръ кривой, то есть длина радіуса-вектора, перпендикулярнаго въ большой оси эллипса, къ главной оси параболы, или къ дѣйствительной главной оси гиперболы.

Послѣднее интегрированіе произведемъ надъ уравненіемъ (144), въ которомъ замѣнимъ r функциею отъ θ ; уравненіе это, по отдѣленіи переменныхъ, получить слѣдующій видъ:

$$\frac{p^2}{2a(1+e \cos(\theta + \Gamma_1))} d\theta = dt. \dots \dots \dots (177)$$

Для краткости, означимъ $(\theta + \Gamma_1)$ черезъ ψ ; двучленъ, заключающійся въ знаменателѣ, преобразуемъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} 1 + e \cos \psi &= \cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right) + e \cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right) - e \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right) = \\ &= (1 + e) \cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right) + (1 - e) \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right), \end{aligned}$$

послѣ чего предыдущее уравненіе можетъ быть написано такъ:

$$\frac{p^2}{2a(1+e)^2} \frac{d\psi}{\left[1 + \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\psi}{2}\right)\right]^2 \cos^4\left(\frac{\psi}{2}\right)} = dt. \dots \dots \dots (178)$$

Интегрированіе этого уравненія въ случаѣ движенія точки по эллипсу облегчается при помощи слѣдующей подстановки:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{f}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2}\right) \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}; \dots \dots \dots (179)$$

изъ этого равенства слѣдуетъ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right)} &= 1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{1 - e \cos f}{(1 - e) \cos^2\left(\frac{f}{2}\right)} \\ \frac{d\psi}{\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right)} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{df}{\cos^2\left(\frac{f}{2}\right)}; \end{aligned}$$

рь уравненіе (178) приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{p^2}{2a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(f-e\cos f)df=dt.$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ:

$$\frac{p^2}{2a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(1-e\sin f)=t-\tau$$

$$f-e\sin f=(t-\tau)\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \dots\dots\dots (180)$$

τ есть шестая произвольная постоянная, a — длина большой оси эллипса:

$$a=\frac{p}{1-e^2}=\frac{4a^2}{\mu(1-e^2)}=-\frac{\mu}{2h}\dots\dots\dots (181)$$

Послѣ этого, рассматриваемая задача для случая движенія по гнтической траекторіи рѣшена окончательно.

Эта задача играетъ существенную роль въ астрономіи и небной механикѣ; полученное рѣшеніе выражаетъ движеніе которой изъ планетъ вокругъ солнца, если предположить послѣднее неизмѣнимъ, массу планеты — сосредоточенною въ одной точкѣ, а яженіе рассматриваемой планеты прочими — несуществующимъ. Шесть произвольныхъ постоянныхъ:

$$C_1, C_2, C_3, h, \Gamma_1, \tau$$

удно выразить въ начальныхъ координатахъ и въ проеціяхъ льной скорости на оси координатъ.

Первыя четыре произвольныя постоянныя опредѣляютъ положеніе плоскости орбиты, эксцентриситетъ ея и длину большой полуоси:

$$\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2+C_3^2}}=\cos I\dots\dots\dots (182)$$

$$\frac{C_3}{C_1}=-\operatorname{tg} \Omega, \dots\dots\dots (183)$$

$$a' = -\frac{\mu}{2h}, \dots \dots \dots (181)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)}{m^2 \mu^2} 2h}, \dots \dots \dots (173)$$

гдѣ I есть уголъ, подъ которымъ плоскость орбиты наклонена къ плоскости XU , Ω — уголъ, составляемый съ осью X линією пересѣченія этихъ плоскостей.

Произвольная постоянная Γ_1 есть отрицательно взятый аргументъ наименьшаго радіуса вектора; τ — моментъ времени, въ который радіусъ векторъ имѣетъ наименьшую величину.

Въ случаѣ движенія точки по параболѣ, уравненіе (178) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{p^2}{2a} \frac{d\psi}{4 \cos^4\left(\frac{\psi}{2}\right)} = dt \dots \dots \dots (184)$$

Интегрируя, получимъ:

$$\frac{p^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\mu}} \left(\operatorname{tg} \frac{(\Theta + \Gamma_1)}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{(\Theta + \Gamma_1)}{2} \right) = (t - \tau). \dots \dots (185)$$

§ 28. Нѣкоторыя другія формы интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія свободной матерьяльной точки.

Предположимъ, что свободная матерьяльная точка постоянно остается въ одной плоскости, которую мы примемъ за плоскость XU .

Изъ предыдущаго намъ извѣстно, что дифференціальныя уравненія движенія:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

или замѣняющая ихъ совокупность дифференціальныхъ уравненій перваго порядка:

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad m \frac{dx'}{dt} = X, \quad m \frac{dy'}{dt} = Y. \dots \dots (186)$$

имѣютъ интегралъ:

$$m(xy' - yx') = C,$$

Предполагая, что y выражено функцией отъ x , можемъ исключить изъ уравненій дифференціалъ времени, имѣя въ виду, что:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d\left(\frac{y'}{x'}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{y'}{x'}\right)}{dx} x' = \frac{d^2y}{dx^2} x';$$

ствіе этого послѣднее дифференціальное уравненіе получить, по сокращенію на x' , видъ:

$$m \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \dots \dots \dots (194)$$

овеннаго дифференціального уравненія второго порядка.
Первые интегралы этого уравненія:

$$\varphi_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = C_1, \quad \varphi_2\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = C_2,$$

гавятъ собою, по замѣщеніи въ нихъ производной $\frac{dy}{dx}$ — отношеніемъ $\frac{y'}{x'}$, первые интегралы:

$$\varphi_1\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right) = C_1, \quad \varphi_2\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right) = C_2 \dots \dots \dots (195)$$

ренціальныхъ уравненій (A) движенія свободной матеріальной точки.
словіе (193) выражаетъ, что проекція силы на нормаль къ траекторіи
тъ однородная функція второй степени отъ скоростей x' и y' ; функція
слѣдующая:

$$(x')^2 \frac{f\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2}} \dots \dots \dots (196)$$

лѣдовательно, если проекція силы на нормаль къ траекторіи есть
одная функція (196) второй степени отъ скоростей x' и y' , то диф-
ціальными уравненіями движенія свободной матеріальной точки на пло-
и имѣютъ два первые интеграла, не зависящіе отъ времени; эти
ралы получаются изъ первыхъ интеграловъ обыкновеннаго дифферен-
наго уравненія второго порядка (194).

Этотъ случай интегрируемости дифференціальныхъ уравненій движенія точки на плоскости былъ указанъ проф. А. Н. Коркинымъ *).

Кромѣ того, А. Н. Коркинъ нашелъ еще нѣсколько случаевъ интегрируемости дифференціальныхъ уравненій движенія матеріальной точки на плоскости, въ которыхъ получаются два интеграла; изъ этихъ случаевъ мы можемъ здѣсь привести только одинъ, самый простѣйшій.

4) Если сила не зависитъ отъ времени и скоростей и удовлетворяетъ условію:

$$Y - kX = f(y - kx), \dots \dots \dots (197)$$

гдѣ k — постоянное, а f — нѣкоторая функція отъ $(y - kx)$, то тогда составимъ дифференціальное уравненіе:

$$m(y'' - kx'') = Y - kX, \dots \dots \dots (198)$$

которое, на основаніи условія (197), приведется къ виду:

$$m(y'' - kx'') = f(y - kx). \dots \dots \dots (199)$$

Означимъ $y - kx$ черезъ ξ , тогда уравненіе (199) получитъ видъ:

$$m\xi'' = f(\xi);$$

интегрированіе дифференціального уравненія такого вида показано въ § 19 (см. случаи 2-го рода).

§ 29. Задачи.

1. *Опредѣлить движеніе матеріальной точки, притягиваемой къ оси X силою обратно пропорціональною квадрату разстоянія отъ нея; начальная скорость точки параллельна той же оси.*

Дифференціальныя уравненія движенія:

$$mx'' = 0, \quad my'' = -\frac{\mu m}{y^2};$$

начальныя координаты и скорости:

$$t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad x'_0 = a, \quad y_0 = b, \quad y'_0 = 0.$$

*) Коркинъ. О совокупныхъ уравненіяхъ съ частными производными перваго порядка и нѣкоторыхъ вопросахъ механики. 1867.

Korkine. Sur les intégrales des équations du mouvement d'un point matériel. Mathematische Annalen von Clebsch und Neumann. B. II. 1870. S. 13.

второй интегралъ движенія параллельно оси X^{000} :

$$x = at. \dots\dots\dots (200)$$

первый интегралъ движенія параллельно оси Y^{000} :

$$(y')^2 = 2\mu \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{b} \right).$$

изъ того, чтобы интегрировать уравненіе:

$$- \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{y} - \frac{1}{b}}} = dt \sqrt{2\mu},$$

получимъ:

$$y = \frac{b}{2} (1 + \cos \omega), \dots\dots\dots (201)$$

это уравненіе приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{b\sqrt{b}}{2} 2 \cos^2 \frac{\omega}{2} d\omega = dt \sqrt{2\mu};$$

интегрируя получимъ:

$$\frac{b\sqrt{b}}{2} (\omega + \sin \omega) = t \sqrt{2\mu}. \dots\dots\dots (202)$$

Эти уравненія: (200—202) выражаютъ движеніе точекъ; траекторія же задается двумя уравненіями:

$$y = \frac{b}{2} (1 + \cos \omega), \quad x = a \sqrt{\frac{b}{2\mu}} \cdot \frac{b}{2} (\omega + \sin \omega).$$

Предлагаемъ сравнить эти уравненія съ уравненіями циклоиды (см. часть, стр. 14).

Имя, въ теченіе котораго движущаяся точка придетъ на ось X^{000} , дается изъ формулы (202), если сдѣлаемъ въ ней $\omega = \pi$:

$$T = \pi \frac{b}{2} \sqrt{\frac{b}{2\mu}}.$$

На материальную точку дѣйствуютъ притяженія, обратно пропорціональны квадратамъ разстояній, со стороны двухъ неподвижныхъ центровъ L ; величины этихъ притяженій суть:

$$\epsilon \frac{Mm}{r_1^2}, \quad \epsilon \frac{\mu m}{r_2^2},$$

гдѣ: m — масса точки, r_1 — разстояніе матеріальной точки отъ центра O , r_2 — разстояніе ея отъ центра L .

Матеріальная точка, помѣщенная на линіи \overline{OL} , въ разстояніи b отъ точки O , пущена со скоростью a по направленію къ L ; опредѣлить, какъ велика должна быть скорость a для того, чтобы движущаяся точка могла остановиться въ той точкѣ K на линіи \overline{OL} , въ которой притяженія обоихъ центровъ взаимно уравновѣшиваются.

Равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ матеріальной точкѣ, имѣетъ въ этомъ случаѣ потенциалъ (см. 165):

$$U = \varepsilon m \left(\frac{M}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right),$$

поэтому движеніе матеріальной точки удовлетворяетъ закону живой силы:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \varepsilon \left(\frac{M}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) - \varepsilon \left(\frac{M}{b} + \frac{\mu}{D-b} \right), \dots \dots (203)$$

гдѣ D означаетъ разстояніе между центрами O и L .

Такъ какъ точка совершаетъ движеніе по прямой линіи OL между точками O и L , то r_1 и r_2 должны быть замѣнены величинами x и $D-x$, гдѣ x есть разстояніе движущейся точки отъ центра O .

Означимъ черезъ k разстояніе \overline{OK} ; такъ какъ въ точкѣ K притяженія обоихъ центровъ должны взаимно уравновѣшиваться, то k должно удовлетворять слѣдующему равенству:

$$\varepsilon \frac{Mm}{k^2} = \varepsilon \frac{\mu m}{(D-k)^2},$$

изъ котораго слѣдуетъ:

$$k = \frac{D\sqrt{M}}{\sqrt{M} + \sqrt{\mu}}, \quad D-k = \frac{D\sqrt{\mu}}{\sqrt{M} + \sqrt{\mu}} \dots \dots (204)$$

Примѣнимъ уравненіе (203) къ тому моменту, въ который матеріальная точка остановится въ точкѣ K ; тогда будутъ: $v=0$, $r_1=k$, $r_2=D-k$; слѣдовательно:

$$\frac{a^2}{2} = \varepsilon \left(\frac{M}{b} + \frac{\mu}{D-b} - \frac{M}{k} - \frac{\mu}{D-k} \right);$$

замѣнивъ здѣсь k и $(D-k)$ выраженіями (204) и произведя надлежащія преобразованія, получимъ:

$$\frac{a^2}{2} = \varepsilon \left(\frac{D-b}{Db} M + \frac{b}{D(D-b)} \mu - \frac{2\sqrt{M\mu}}{D} \right)$$

$$\alpha^2 = \frac{2\epsilon}{D} \left(\sqrt{\frac{D-b}{b}} \sqrt{M} - \sqrt{\frac{b}{D-b}} \sqrt{\mu} \right)^2 \dots \dots (205)$$

имъ, что O и L представляютъ центры земли и луны, что M и μ — массы этихъ планетъ, D — величину разстоянія между ними, b — величину земнаго радіуса; тогда формула (205) послужитъ для вычисленія той скорости, съ которою долженъ быть пущенъ снарядъ отъ земли по направленію къ лунѣ, для того, чтобы онъ могъ въ той точкѣ, въ которой притяженіе земли уравнивается притяженіемъ луны. Коэффициентъ ϵ , заключающійся въ формулѣ (205), можетъ быть найденъ на основаніи того соображенія, что сила тяжести, приложенная къ массѣ m , находящейся на поверхности земли, выражается двоякимъ образомъ:

$$P = \epsilon \frac{Mm}{b^2}; \quad P = mg,$$

$$\epsilon = \frac{gb^2}{M} \dots \dots \dots (205 \text{ bis})$$

Вставивъ это выраженіе для ϵ въ формулу (205), мы найдемъ слѣдующее выраженіе для α :

$$\alpha = \sqrt{2gb} \left(\sqrt{1 - \frac{b}{D}} - \sqrt{\frac{b}{D(D-b)}} \sqrt{\frac{\mu}{M}} \right).$$

Принимая во вниманіе, что D почти въ 60 разъ болѣе b и что почти въ 81 разъ менѣе массы земли, то можно сказать, что

$$\alpha = \sqrt{2gb}$$

тѣрѣальная точка притягивается къ началу координатъ

$$F = \frac{m\mu r}{2(2p-x)^2},$$

суть величины постоянныя; опредѣлимъ движеніе материальной точки, предполагая, что начальное положеніе ея на разстояніи p отъ начала координатъ, и что начальная скорость β параллельна оси Y .

Дифференціальныя уравненія движенія:

$$x'' = -\frac{\mu x}{2(2p-x)^3}, \quad y'' = -\frac{\mu y}{2(2p-x)^3}.$$

Такъ какъ сила центральная, то здѣсь имѣетъ мѣсто законъ площадей:

$$xy' - yx' = p\beta \dots\dots\dots (206)$$

Далѣе, первое изъ дифференціальныхъ уравненій интегрируется самостоятельно:

$$(x')^2 = C + \mu \frac{p-x}{(2p-x)^2},$$

а такъ какъ при $x=p$, $x'=0$, то $C=0$, поэтому:

$$x' = -\sqrt{\mu \frac{p-x}{2p-x}} \dots\dots\dots (207)$$

Исключивъ dt изъ уравненій (206) и (207) и интегрируя получившееся дифференціальное уравненіе перваго порядка:

$$x \frac{dy}{dx} - y = -\frac{p\beta}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{2p-x}{\sqrt{p-x}},$$

или:

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2p\beta}{\sqrt{\mu}} d\left(\frac{\sqrt{p-x}}{x}\right),$$

получимъ уравненіе траекторіи:

$$y^2 = \frac{4p^2\beta^2}{\mu} (p-x);$$

это — парабола, имѣющая вершину въ точкѣ $(x=p, y=0)$ и ось — по направленію отрицательной оси Y .

Для окончательнаго рѣшенія вопроса остается только интегрировать уравненіе (207); получимъ:

$$(4p-x)\sqrt{p-x} = \frac{3}{2} t \sqrt{\mu}.$$

4. На материальную точку дѣйствуетъ та же самая сила, что и въ предыдущей задачѣ, но начальныя обстоятельства движенія какія либо другія. Определить видъ траекторіи и движеніе точки.

Для рѣшенія вопроса надо произвести тѣ же самыя дѣйствія, какъ въ предыдущей задачѣ. Первые интегралы будутъ:

$$xy' - yx' = C_1, \quad (x')^2 = C_2 + \mu \frac{p-x}{(2p-x)^2};$$

гдѣ:

$$\frac{y}{x} = \Gamma_1 - \frac{2C_1}{(\mu + 4C_2p)x} \sqrt{\mu(p-x) + C_2(2p-x)^2} \dots (208)$$

$$\frac{\mu}{2\sqrt{C_2}} \log \frac{2C_2(x-2p) - \mu - 2\sqrt{C_2}\sqrt{\mu(p-x) + C_2(2p-x)^2}}{\sqrt{\mu(\mu + 4pC_2)}} - \\ - \sqrt{\mu(p-x) + C_2(2p-x)^2} = C_2t + \Gamma_2.$$

Интегралъ (208) есть уравненіе траекторій; это — одна изъ кривыхъ того порядка. Родъ кривой опредѣляется знакомъ постоянной C_2 , если: болѣе нуля, то траекторія — гипербола, если C_2 менѣе нуля, то траекторія — эллипсъ, если $C_2 = 0$, то парабола.

5. *Опредѣлить движеніе матеріальной точки при дѣйствіи на слѣдующей притягательной силѣ къ началу координатъ:*

$$F = \frac{\mu m r}{2(2p - x \cos \omega - y \sin \omega)^2},$$

ω — постоянный уголъ.

Траекторія — коническое сѣченіе.

6. *Опредѣлить движеніе матеріальной точки при дѣйствіи на слѣдующей притягательной силѣ къ началу координатъ:*

$$F = \frac{\mu m r}{\sqrt{x^2 y^2}}.$$

Дифференціальныя уравненія движенія въ этомъ случаѣ суть:

$$x'' = -\frac{\mu x}{\sqrt{x^2 y^2}}, \quad y'' = -\frac{\mu y}{\sqrt{x^2 y^2}}.$$

Одинъ изъ первыхъ интеграловъ выражаетъ законъ площадей:

$$xy' - yx' = C_1, \dots \dots \dots (209)$$

гдѣ получается, интегрируя дифференціальное уравненіе:

$$x''y' + y''x' = -\frac{\mu(xy' + yx')}{\sqrt{x^2y^2}};$$

онъ будетъ:

$$x'y' = C_2 + \frac{2\mu}{\sqrt{xy}} \dots \dots \dots (210)$$

Чтобы произвести дальнѣйшія интегрированія, мы преобразуемъ первые интегралы слѣдующимъ образомъ.

Помножимъ (210) на $4xy$ и замѣнимъ $4xyx'y'$ слѣдующею разностью:

$$4xy'yx' = (xy' + yx')^2 - (xy' - yx')^2 = \left(\frac{d(xy)}{dt}\right)^2 - C_1^2;$$

послѣ этого изъ уравненія (210) получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{d(xy)}{dt} = \sqrt{C_1^2 + 4xy \left(C_2 + \frac{2\mu}{\sqrt{xy}}\right)}, \dots \dots \dots (211)$$

интегрируя которое, получимъ выраженіе t въ функціи отъ произведенія xy ; это будетъ одинъ изъ вторыхъ интеграловъ.

Исключимъ dt изъ дифференціального уравненія (211) и изъ интеграла (209):

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = \frac{C_1}{xy} dt,$$

получимъ дифференціальное уравненіе:

$$d \log \left(\frac{y}{x}\right) = \frac{C_1 d(xy)}{xy \sqrt{C_1^2 + 4xy \left(C_2 + \frac{2\mu}{\sqrt{xy}}\right)}},$$

въ лѣвой части котораго стоитъ полный дифференціалъ, а правая заключаетъ переменную xy ; интегрируя это уравненіе, мы найдемъ:

$$\log \sqrt{\frac{y}{x}} = \log \sqrt{\Gamma_1} - \log (z + \sqrt{z^2 + p}),$$

гдѣ:

$$z = \frac{C_1}{\sqrt{xy}} + \frac{4\mu}{C_1}, \quad p = 4C_2 - \frac{16\mu^2}{C_1^2}.$$

Рѣшивъ полученное уравненіе относительно z , получимъ:

$$2z = \frac{\Gamma_1 x - yp}{\sqrt{\Gamma_1 xy}},$$

$$(\Gamma_1 x - py - 2C_1 \sqrt{\Gamma_1})^2 = \frac{64\mu^2 \Gamma_1}{C_1^4} xy. \dots\dots\dots (212)$$

то есть уравнение кривой второго порядка; родъ кривой опредѣляется въ постоянной C_1 .

Опредѣлить движение матеріальной точки при дѣйствіи притягательной силы:

$$F = \frac{m\mu r}{V(ax^2 + bxy + cy^2)^2},$$

вѣсистой къ началу координатъ.

мажорія — коническое сѣченіе.

Опредѣлить движение тяжелой матеріальной точки, свободно ной подъ экваторомъ въ разстояніи b отъ центра земнаго шара; ться въ точности формула (186), приведенныхъ на стр. 168 кинематической части. Центръ земли предполагается неподвижнымъ.

ли эта матеріальная точка будетъ неизмѣнно связана съ землею, находясь подъ экваторомъ въ разстояніи b отъ центра земли O 73 кинематической части), будетъ имѣть скорость $b\omega$, перпендикуляръ радіусу OB и направленную къ востоку; эту же самую скорость имѣть матеріальная точка въ тотъ моментъ, когда она будетъ свободно, то есть, когда связь, прикрѣпляющая ее къ землѣ, будетъ рена.

проведемъ изъ центра земли неподвижную ось OY черезъ то положеніе матеріальной точки, которое она занимаетъ въ пространствѣ въ моментъ освобожденія ея отъ связи съ землею; ось OX проведемъ въ плоскости экватора параллельно направленію скорости $b\omega$; подъ ω мы понимаемъ угловую скорость суточного вращенія земли, а подъ b — величину земнаго радіуса, предполагая, что свободно вращенная находилась близъ поверхности земли; поэтому:

$$\omega = 0,0000729 \frac{1}{\text{секунд.}}, \quad b = 6370900 \text{ метр.}$$

вминуясь притяженію къ центру земли:

$$e \frac{mM}{r^2}$$

начальную скорость:

$$x'_0 = b\omega, \quad y'_0 = 0$$

и начальное положение:

$$x_0=0, y_0=b,$$

материальная точка начнет совершать движение, рассмотренное нами в § 27 настоящей главы; нетрудно убедиться, что в настоящем случае движение будет совершаться по эллипсу; в самом деле:

$$2h=b^2\omega^2 - \frac{2\epsilon M}{b};$$

из формулы же (205 bis) задачи 2-й следует:

$$\epsilon M = gb^3,$$

поэтому:

$$2h = -b(2g - b\omega^2);$$

а такъ какъ:

$$2g = 1,96 \frac{\text{метр}}{(\text{секунда})^2}, \quad b\omega^2 = 0,03385 \frac{\text{метр}}{(\text{секунда})^2},$$

то $2h$ не равно нулю, следовательно, траектория эллиптическая.

Элементы этой орбиты следующие:

$$I = \pi, \quad a = -\frac{\epsilon M}{2h} = \frac{b}{2 - \frac{b\omega^2}{g}} = \frac{b}{1+e},$$

$$e = 1 - \frac{b\omega^2}{g}, \quad \tau \sqrt{\frac{\epsilon M}{a^3}} = -\pi;$$

кроме того, означая через θ уголъ, составляемый радиусомъ векторомъ съ положительною осью X и отсчитываемый отъ этой оси въ сторону положительной оси Y , будемъ имѣть:

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - \psi,$$

гдѣ ψ есть уголъ, отсчитываемый отъ направленія наименьшаго радиуса вектора въ сторону движения точки.

Перигелий орбиты находится на отрицательной сторонѣ оси Y и уголъ θ съ теченіемъ времени уменьшается.

Движение пущенной точки выражается слѣдующими формулами:

$$x = r \cos \theta = -r \sin \psi; \quad y = r \sin \theta = -r \cos \psi$$

$$\frac{f}{2} = \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}, \quad f - \pi - e \sin f = t \sqrt{\frac{eM}{a^3}},$$

$$r = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1+e \cos \psi} = a(1 - e \cos f);$$

$$x = -a\sqrt{1-e^2} \sin f, \quad y = a(e - \cos f) \dots \dots (213)$$

о, чтобы разложить x и y въ ряды по возрастающимъ степенямъ сначала подобное разложение для f .

ъ производную по времени отъ обѣихъ частей равенства:

$$f - \pi - e \sin f = nt, \quad n = \sqrt{\frac{eM}{a^3}};$$

$$f' (1 - e \cos f) = n;$$

же дѣйствіе надъ полученнымъ равенствомъ и такъ продолжая получать равенства:

$$= f'' (1 - e \cos f) + e (f')^2 \sin f$$

$$= f''' (1 - e \cos f) + 3ef' f'' \sin f + e (f')^3 \cos f$$

.....

.....,

ъ опредѣлимъ величины производныхъ:

$$f'_0 = \frac{n}{1+e}, \quad f''_0 = 0, \quad f'''_0 = \frac{en^3}{(1+e)^2},$$

$$f^{(4)}_0 = 0, \quad f^{(5)}_0 = \frac{en^5(9e-1)}{(1+e)^3}, \dots \dots$$

$$t=0.$$

для эти величины въ Тейлоровъ рядъ:

$$f = f_0 + f'_0 t + f''_0 \frac{t^2}{1.2} + \dots \dots$$

получимъ:

$$f = \pi + \frac{nt}{1+e} + \frac{n^3 t^3}{(1+e)^3} \frac{e}{1.2.3} + \frac{n^5 t^5}{(1+e)^5} \frac{e(9e-1)}{1.2.3.4.5} + \dots$$

и отсюда:

$$\frac{n}{f} = 1 + e - \frac{n^3 t^3}{(1+e)^3} \frac{e}{1.2} - \frac{n^5 t^5}{(1+e)^5} \frac{e(3e-1)}{1.2.3.4} - \dots$$

Отсюда легко получаются ряды для $\sin f$ и $\cos f$, такъ какъ:

$$\sin f = \frac{f - \pi - nt}{e}; \quad \cos f = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{n}{f} \right).$$

Затѣмъ, подставивъ полученные выраженія для $\sin f$ и $\cos f$ въ формулы (213) и принявъ во вниманіе, что:

$$\frac{n^2}{(1+e)^2} = \frac{eM}{a^2(1+e)^2} = \frac{g}{b}.$$

$$an \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = a \sqrt{\frac{gb^3}{a^3}} \sqrt{\frac{b\omega^2}{g(1+e)}} = b\omega,$$

получимъ слѣдующіе ряды:

$$x = b\omega t \left(1 - \frac{g}{b} \frac{t^2}{1.2.3} - \frac{g^2}{b^2} \frac{\left(8 - 9 \frac{b\omega^2}{g} \right) t^4}{1.2.3.4.5} - \dots \right)$$

$$y = b \left(1 - \frac{g}{b} \frac{t^2}{1.2} - \frac{g^2}{b^2} \frac{\left(2 - 3 \frac{b\omega^2}{g} \right) t^4}{1.2.3.4} - \dots \right)$$

Отношеніе $g : b$ есть весьма малая дробь:

$$\frac{g}{b} = 0,00000153 \frac{1}{(\text{секунда})^2}.$$

9. Решить задачу о движеніи матерьяльной точки, притягиваемой къ началу координатъ силою:

$$F = \frac{\mu m}{r^3}.$$

Поступая, какъ указано въ параграфѣ 27, получимъ слѣдующіе результаты.

гда $2h$ больше нуля.

съ векторъ измѣняется съ теченіемъ времени по слѣдующему

$$r\sqrt{2h} = \sqrt{(2ht + \Gamma_1)^2 + C^2 - \mu},$$

$$= \pm v_0 r_0 \sin(v_0 r_0), \quad 2h = v_0^2 - \frac{\mu}{r_0^2}, \quad \Gamma_1 = v_0 r_0 \cos(v_0 r_0).$$

ніе траекторіи:

и $C^2 - \mu$ больше нуля:

$$r\sqrt{\frac{2h}{C^2}} = \frac{\lambda}{\sin \lambda(\theta + \Gamma_2)}, \quad \lambda^2 = 1 - \frac{\mu}{C^2};$$

и $C^2 = \mu$:

$$r(\theta + \Gamma_2) = \frac{C}{\sqrt{2h}};$$

и $C^2 - \mu$ меньше нуля:

$$r\sqrt{\frac{2h}{C^2}} = \frac{2x}{e^{x\varphi} - e^{-x\varphi}},$$

$$x^2 = \frac{\mu}{C^2} - 1, \quad \varphi = \theta + \Gamma_2.$$

тѣхъ случаяхъ, когда $2h$ равно нулю:

$$v^2 = \frac{\mu}{r^2}, \quad r^2 = r_0^2 + 2t\sqrt{\mu - C^2}$$

торія:

$$r = \Gamma e^{x\theta}, \quad x^2 = \frac{\mu}{C^2} - 1.$$

тѣхъ случаяхъ, когда $2h$ меньше нуля:

$$r\sqrt{-2h} = \sqrt{\mu - C^2 - (\Gamma_1 + 2ht)^2}$$

ніе траекторіи:

$$r\sqrt{\frac{-2h}{C^2}} = \frac{2x}{e^{x\varphi} + e^{-x\varphi}}.$$

Такимъ же образомъ могутъ быть рассмотрѣны *все случаи*

движенія матеріальної точки подь впливіємь стьдующей силы притяженія къ началу координатъ:

$$F = m \left(\frac{\mu}{r^3} + \frac{v}{r^3} \right).$$

Напримѣръ, уравненіе траекторіи при $2h$ большемъ нуля и при $(v - C^2)$ меньшемъ нуля — слѣдующее:

$$r = \frac{p}{1 - e \sin \kappa (\theta + \Gamma)},$$

гдѣ:

$$p = \frac{C^2 \kappa^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{C^2 \kappa^2}{\mu^2} 2h}, \quad \kappa^2 C^2 = C^2 - v.$$

11. Определить движеніе матеріальной точки, къ которой приложена сила

$$F = m \left(\mu^2 r - \frac{\lambda^2}{r^3} \right),$$

состоящая изъ притяженія къ началу координатъ, пропорціональнаго разстоянію отъ него, и изъ отталкивающей силы отъ той же точки, обратно пропорціональной кубу разстоянія.

Если $h^2 = \mu^2(\lambda^2 + C^2)$ болѣе нуля, то уравненіе траекторіи:

$$r^3 = \frac{q}{1 + e \cos 2\kappa (\theta + \Gamma_1)},$$

$$q = \frac{C^2 + \lambda^2}{h}, \quad \kappa^2 = 1 + \frac{\lambda^2}{C^2}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{\mu^2 \kappa^2 C^2}{h^2}};$$

законъ измѣненія аргумента θ — слѣдующій:

$$\operatorname{tg} \kappa (\theta + \Gamma_1) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \mu (\Gamma_2 + t).$$

12. Движеніе тяжелой матеріальной точки въ средѣ, оказывающей движенію сопротивленіе, выражающееся такъ:

$$mg(k + \mu v^n);$$

сопротивленіе это направлено противоположно скорости.

Приводимъ здѣсь то рѣшеніе этой задачи, которое далъ Якоби *).

*) Journal Crelle. B. XXIV.

материальной точки совершается, конечно, въ той вертлгн, въ которой заключается начальная скорость; эту плоскость XU , начальное положеніе движущейся точки іало координатъ, ось U направимъ параллельно ускоренію

качѣ возьмемъ дифференціальныя уравненія движенія вида черезъ φ уголъ, составляемый направленіемъ скорости съ нмѣтъ, по сокращенію на m :

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \varphi - gk - g_{\mu} v^n. \dots \dots \dots (214)$$

$$\frac{v^2}{\rho} = \mp g \cos \varphi, \dots \dots \dots (215)$$

величину радіуса кривизны:

$$\rho = \mp \frac{ds}{d\varphi} = \mp \frac{v dt}{d\varphi} \dots \dots \dots (216)$$

въ обоихъ равенствахъ (215) и (216) должны быть одн-

твъ (215) и (216) слѣдуетъ:

$$dt = \frac{v d\varphi}{g \cos \varphi}; \dots \dots \dots (217)$$

изъ уравненій (214) и (217) дифференціалъ dt , получимъ се уравненіе:

$$\frac{dv}{v d\varphi} = \operatorname{tg} \varphi - \frac{k}{\cos \varphi} - \frac{\mu}{\cos \varphi} v^n,$$

быть обращено въ обыкновенное линейное дифферен-
зіе перваго порядка, если сдѣлаемъ слѣдующую подста-

$$\frac{1}{v^n} = s;$$

ітъ:

$$\frac{ds}{d\varphi} = -n \left(\operatorname{tg} \varphi - \frac{k}{\cos \varphi} \right) s + \frac{\mu}{\cos \varphi}.$$

Интегрируя это линейное дифференціальное уравненіе по известномъ правилу, мы получимъ слѣдующій результатъ:

$$x = \frac{\cos^n \varphi}{\operatorname{tg}^{kn} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \left(C^n + \mu n \int \operatorname{tg}^{kn} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \frac{d\varphi}{\cos^{n+1} \varphi} \right);$$

откуда получимъ выраженіе скорости v въ функціи угла φ :

$$v = \frac{\eta^{k-1} (1+\eta^2)}{2 \left(C^n - \frac{\mu n}{2^n} \int \eta^{nk-n-1} (1+\eta^2)^n d\eta \right)^{\frac{1}{n}}}, \dots \quad (21)$$

гдѣ:

$$\eta = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Подставивъ въ уравненіе (217):

$$dt = - \frac{v d\eta}{g\eta} \dots \dots \dots (217 \text{ bi})$$

мѣсто v вторую часть равенства (218) и интегрируя полученное дифференціальное уравненіе, получимъ зависимость между угломъ φ и временемъ.

Координаты x и y могутъ быть выражены въ функціяхъ угла φ ; д этого надо взять равенства:

$$dx = v \cos \varphi dt, \quad dy = v \sin \varphi dt,$$

выразить въ нихъ $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ функціями отъ η , а dt исключить при помощи формулы (217 bis):

$$dx = - \frac{2v^2 d\eta}{g(1+\eta^2)}, \dots \dots \dots (21)$$

$$dy = - \frac{v^2(1-\eta^2) d\eta}{g(1+\eta^2)\eta}, \dots \dots \dots (22)$$

затѣмъ замѣнить v второю частью равенства (218) и полученныя дифференціальныя уравненія интегрировать.

18. Определить движеніе тяжелой матеріальной точки въ средѣ оказывающей движенію сопротивленіе постоянной величины kmg

Рѣшеніе заключается въ формулахъ предыдущей задачи, если въ нихъ сдѣлать μ равнымъ нулю и произвести указанныя интегрированія.

Получимъ:

$$v = \frac{\eta^{k-1}(1+\eta^2)}{2C},$$

$$t + \Gamma_1 = -\frac{1}{2gC} \left(\frac{\eta^{k-1}}{k-1} + \frac{\eta^{k+1}}{k+1} \right),$$

$$x + \Gamma_2 = -\frac{1}{2gC^2} \left(\frac{\eta^{2k-1}}{2k-1} + \frac{\eta^{2k+1}}{2k+1} \right),$$

$$+ \Gamma_3 = -\frac{1}{4gC^2} \left(\frac{\eta^{2k-2}}{2k-2} - \frac{\eta^{2k+2}}{2k+2} \right); \quad \eta = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Взявъ эти уравненія, можно убѣдиться, что при $k > 1$ скорость въ точке обращается въ нуль въ той точкѣ траекторіи, въ которой η является равнымъ $\frac{\pi}{2}$; координаты этой точки суть: $-\Gamma_1$ и $-\Gamma_2$. Эта точка приходитъ туда въ моментъ $(- \Gamma_1)$.

$k < 1$, но не менѣе $\frac{1}{2}$, то скорость не обращается въ нуль и движущаяся точка направляется въ безконечность, приближаясь, асимптотически къ вертикальной линіи: $x = -\Gamma_2$.

$k < \frac{1}{2}$, то движущаяся точка направляется въ безконечность, притомъ, подобно параболѣ, не имѣетъ асимптоты.

Движеніе матеріальной тяжелой точки въ средѣ, сопротивленію которой движенію пропорціонально квадрату скорости. Въ этомъ случаѣ получается изъ формулъ задачи 12-й, если сдѣлать въ нихъ μ нулемъ и n равнымъ двумъ; такъ, формула (218) даетъ слѣдующее выраженіе скорости въ функціи угла φ :

$$\frac{1}{v \cos \varphi} = \sqrt{\frac{1}{v_1^2} - \mu \left(\log \eta - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} \right)} \dots \dots \dots (221)$$

$$\eta = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

Изъ скорости въ наивысшей точкѣ траекторіи. Въ этомъ случаѣ можно найти въ этомъ случаѣ другой первый интегралъ, сдѣлавъ проекцію скорости на ось X въ функціи длины дуги траекторіи, изъ дифференціальнаго уравненія:

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \varphi - g \mu v^2, \quad v^2 = g \frac{ds}{d\varphi} \cos \varphi$$

составимъ уравненіе:

$$\frac{dv}{v ds} \cos \varphi = \sin \varphi - g \mu \cos \varphi \frac{ds}{v},$$

дающее интегралъ:

$$v \cos \varphi = v_1 e^{-g \mu s}; \dots \dots \dots (222)$$

гдѣ s есть длина дуги траекторіи, считаемаѣ отъ самой высшей точки еѣ въ сторону движенія.

Исключивъ скорость v изъ интеграловъ (221) и (222), получимъ слѣдующую зависимость между длиною дуги s и угломъ φ (или величиною η):

$$\frac{1}{\mu v_1^2} (1 - e^{2g \mu s}) = \log \eta - \frac{1 - \eta^4}{4 \eta^2} \dots \dots \dots (223)$$

Эта зависимость показываетъ, что, на сторонѣ положительныхъ дугъ s , касательная къ траекторіи приближается къ параллельности съ осью U (потому что при $s = \infty$ величина η должна обратиться въ нуль, а слѣдовательно φ обращается тогда въ $\frac{\pi}{2}$); на сторонѣ отрицательныхъ дугъ s касательная къ траекторіи приближается къ параллельности съ направлениемъ, составляющимъ съ осью X такой уголъ φ_1 , который удовлетворяетъ уравненію:

$$\frac{1}{\mu v_1^2} = \log \operatorname{tg} \left(\frac{\frac{\pi}{4}}{1} - \frac{\varphi_1}{2} \right) - \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\cos \varphi_1}.$$

Чтобы рѣшить вопросъ вполне, надо еще интегрировать уравненія (217 bis), (219) и (220).

15. Составить уравненіе траекторіи, описываемой материальною точкою, притягиваемою къ началу координатъ слѣдующею силою:

$$F = m \mu \frac{v^2}{r^4}.$$

Дифференціальныя уравненія движенія въ этомъ случаѣ суть:

$$x'' = - \mu \frac{v^2}{r^4} x, \quad y'' = - \mu \frac{v^2}{r^4} y.$$

Такъ какъ сила направлена къ началу координатъ, то законъ площадей имѣетъ мѣсто; поэтому одинъ изъ первыхъ интеграловъ будетъ:

$$r^2 \theta' = C_1 \dots \dots \dots (224)$$

Другой первый интеграл найдемъ, интегрируя дифференціальное уравненіе:

$$x'x'' + y'y'' = -\mu \frac{v^2}{r^3} (xx' + yy');$$

получимъ:

$$v^2 = \frac{C^2}{r^{2\mu}} \dots \dots \dots (225)$$

Изъ уравненій (224) и (225) составимъ дифференціальное уравненіе:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 r^{2\mu-4} + r^{2\mu-2} = \frac{C^2}{C_1^2},$$

интегрируя которое, получимъ уравненіе траекторіи:

$$r^{\mu-1} = \frac{\sqrt{C^2}}{C_1} \sin [(\mu-1)(\theta + \Gamma_1)].$$

16. На материальную точку дѣйствуетъ сила:

$$F = m_\mu \frac{v^2}{r},$$

перпендикулярная къ радіусу вектору и стремящаяся увеличить уголъ θ ; составимъ уравненіе траекторіи, описываемой материальною точкою.

Въ этомъ случаѣ дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$x'' = -\mu \frac{v^2}{r^3} y, \quad y'' = \mu \frac{v^2}{r^3} x.$$

Составимъ дифференціальное уравненіе:

$$\frac{x'x'' + y'y''}{(x')^2 + (y')^2} = \mu \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2};$$

интегрируя его, получимъ:

$$\log v^2 = C_1 + 2\mu \arctg \left(\frac{y}{x}\right),$$

или:

$$v^2 = v_0^2 e^{2\mu(\theta - \theta_0)} \dots \dots \dots (226)$$

Другой интегралъ и уравненіе траекторіи получатся при помощи приѣма, указаннаго А. Н. Коркиннѣмъ и приведеннаго здѣсь въ пунктѣ 3-мъ пара-

графа 26; применить этот прием здесь возможно потому, что сила удовлетворяет условию (193):

$$x'Y - y'X = (x')^2 f\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right); \dots\dots\dots (193)$$

а именно, в этой задаче:

$$f\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right) = \mu \frac{\left(x + y \frac{y'}{x'}\right) \left(1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2\right)}{x^2 + y^2}.$$

Составим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mu \frac{x + y \frac{dy}{dx}}{x^2 + y^2} \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right);$$

первый интеграл его будет следующий:

$$\arctg \frac{dy}{dx} = \log C_1 (x^2 + y^2)^{\frac{\mu}{2}}$$

или:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \log C_2 r^\mu \dots\dots\dots (227)$$

Выразим производную от y по x в полярных координатах; тогда уравнение (227) можно представить под следующим видом:

$$\frac{dr}{r d\theta} = - \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta - \log C_2 r^\mu)},$$

или:

$$\frac{\sin s \, ds}{\sin s + \mu \cos s} = d\theta, \quad s = \theta - \log C_2 r^\mu;$$

интегрируя это уравнение, получим уравнение траекторий:

$$C_2^{-\frac{1}{\mu}} r \sin(\theta + \arctg \mu - \log C_2 r^\mu) = \Gamma_1 e^{-\mu\theta} \dots\dots\dots (228)$$

17. К материальной точке приложено две силы: одна перпендикулярна к радиусу вектору, равна:

$$\frac{\mu m}{r}$$

и стремится увеличить угол θ , другая сила направлена къ началу координатъ, равна:

$$mr \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2;$$

опредѣлить движение.

Въ этомъ случаѣ одинъ изъ первыхъ интеграловъ имѣетъ видъ (188) (см. пунктъ 1-й параграфа 28):

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \mu t + C_1 \dots \dots \dots (229)$$

Задача рѣшается вполне и уравненіе траекторіи получается слѣдующаго вида:

$$\log r + \frac{p}{r} = \frac{(r_0')^2}{\mu} (\theta + \gamma), \dots \dots \dots (230)$$

гдѣ p и γ суть постоянныя величины.

18. Къ материальной точкѣ приложена сила:

$$F_1 = m \mu \frac{f(\theta)}{r^3},$$

перпендикулярная къ радіусу вектору и стремящаяся увеличить угол θ , и другая сила:

$$F_2 = mr \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2,$$

направленная къ началу координатъ; опредѣлить движение.

Здѣсь получается интегралъ вида (190) (см. пунктъ 2-й параграфа 28):

$$r^4 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = C_1 + 2\mu \phi(\theta), \dots \dots \dots (231)$$

$$\phi(\theta) = \int f(\theta) d\theta.$$

Задача рѣшается вполне и получается слѣдующее уравненіе траекторіи:

$$\frac{1}{C_2 r} = \mathbf{I}_1 - \int \frac{d\theta}{\sqrt{C_1 + 2\mu \phi(\theta)}} \dots \dots \dots (232)$$

§ 30. Задачи, въ которыхъ требуется опредѣлить относительное движеніе матерьяльной точки по отношенію къ неизмѣняемой средѣ, имѣющей данное движеніе; даны силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ.

Такія задачи можно рѣшать двоякимъ путемъ:

1) Можно опредѣлить абсолютное движеніе матерьяльной точки, а затѣмъ перейти къ относительному движенію ея по отношенію къ данной движущейся неизмѣняемой средѣ, какъ указано въ § 42 кинематической части.

2) Можно составить дифференціальныя уравненія относительнаго движенія матерьяльной точки по отношенію къ данной неизмѣняемой средѣ; интегрируя эти дифференціальныя уравненія, получимъ рѣшеніе задачи.

Обратимъ вниманіе на рѣшеніе такихъ задачъ вторымъ путемъ.

Дифференціальныя уравненія относительнаго движенія матерьяльной точки по отношенію къ данной движущейся неизмѣняемой средѣ получатся изъ равенствъ (347) кинематической части, — стоитъ лишь помножить эти равенства на m и замѣнить произведенія:

$$m\dot{v} \cos(\dot{v}E), \quad m\dot{v} \cos(\dot{v}Y), \quad m\dot{v} \cos(\dot{v}Z)$$

проекціями на оси E, Y, Z равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ; величины этихъ проекцій мы будемъ обозначать буквами: E, Y, Z .

Слѣдовательно, общій видъ дифференціальныхъ уравненій относительнаго движенія матерьяльной точки, подверженной даннымъ силамъ, по отношенію къ неизмѣняемой средѣ движущейся даннымъ образомъ, будетъ таковъ:

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = E - m\omega_\omega \cos(\omega_\omega E) - m\zeta \frac{dq}{dt} + m\eta \frac{dr}{dt} - \\ - mp(p\xi + q\eta + r\zeta) + m\xi\Omega^2 - 2m\left(q \frac{d\zeta}{dt} - r \frac{d\eta}{dt}\right), \dots (233, a)$$

$$m \frac{d^2 \eta}{dt^2} = Y - m \dot{\omega}_0 \cos(\dot{\omega}_0 \Gamma) - m \xi \frac{dr}{dt} + m \zeta \frac{dp}{dt} - \\ - m q (p \xi + q \eta + r \zeta) + m \eta \Omega^2 - 2m \left(r \frac{d\xi}{dt} - p \frac{d\zeta}{dt} \right), \dots (233, b)$$

$$m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = Z - m \dot{\omega}_0 \cos(\dot{\omega}_0 Z) - m \eta \frac{dp}{dt} + m \xi \frac{dq}{dt} - \\ - m r (p \xi + q \eta + r \zeta) + m \zeta \Omega^2 - 2m \left(p \frac{d\eta}{dt} - q \frac{d\xi}{dt} \right) \dots (233, c)$$

Для примѣра рѣшенія задачъ вторымъ путемъ возьмемъ слѣдующій вопросъ.

Примѣръ 20-й. Къ матеріальной точкѣ приложена сила, направленная къ началу координатъ или по продолженію радіуса вектора; проекція этой силы на ось α (продолженіе радіуса вектора) выражается слѣдующею функціею отъ r :

$$F = m \left(\mu r + \frac{\lambda}{r} \right),$$

гдѣ μ и λ суть двѣ постоянныя величины. Начальная скорость матеріальной точки направлена въ плоскости XU ; опредѣлить относительное движеніе точки по отношенію къ неизмѣняемой средѣ, вращающейся съ постоянною угловою скоростью ω вокругъ положительной оси Z .

Предположимъ, что ось Z совпадаетъ съ осью Z , точка $Ю$ — съ началомъ координатъ, тогда дифференціальныя уравненія относительнаго движенія точки по отношенію къ плоскости $E \Gamma$ будутъ:

$$\xi'' = \mu \xi + \frac{\lambda}{r^2} \xi + \omega^2 \xi + 2\omega \eta'$$

$$\eta'' = \mu \eta + \frac{\lambda}{r^2} \eta + \omega^2 \eta - 2\omega \xi'.$$

Изъ нихъ составимъ дифференціальныя уравненія:

$$\xi \eta'' - \eta \xi'' = -2\omega (\xi \xi' + \eta \eta'),$$

$$\xi' \xi'' + \eta' \eta'' = \left((\mu + \omega^2) + \frac{\lambda}{r^2} \right) (\xi \xi' + \eta \eta'),$$

первыя интегралы которыхъ суть:

$$\xi\eta' - \eta\xi' = D_1 - \omega r^2, \dots \dots \dots (234)$$

$$(\xi')^2 + (\eta')^2 = (\mu + \omega^2)r^2 - \frac{\lambda}{r^2} + 2H, \dots \dots \dots (235)$$

или:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = D_1 - \omega r^2 \dots \dots \dots (234 \text{ bis})$$

$$u^2 = (\mu + \omega^2)r^2 - \frac{\lambda}{r^2} + 2H, \dots \dots \dots (235 \text{ bis})$$

гдѣ D_1 и H суть произвольныя постоянныя, u — скорость относительнаго движенія точки; φ — уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ съ положительною осью E .

Во второмъ интегралѣ замѣнимъ u^2 суммой:

$$u^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2;$$

Поступая затѣмъ такъ, какъ въ задачахъ 9, 10 и 11-й предыдущаго параграфа, получимъ слѣдующіе вторые интегралы:

$$\int \frac{dr}{R} = t + \Delta_1; \dots \dots \dots (236)$$

$$\int \left(\frac{D_1}{r^2} - \omega\right) \frac{dr}{R} = \varphi + \Delta_2; \dots \dots \dots (237)$$

здѣсь:

$$R = \sqrt{\mu r^2 + 2(H + \omega D_1) - \frac{(\lambda + D_1^2)}{r^2}}.$$

Тѣ же самыя результаты получаются и при рѣшеніи задачи первымъ путемъ; въ самомъ дѣлѣ, первыя интегралы абсолютнаго движенія точки суть:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C_1, \quad v^2 = \mu r^2 - \frac{\lambda}{r^2} + 2h;$$

а вторые интегралы:

$$\int \frac{dr}{R_1} = t + \Gamma_1, \quad \int \frac{C_1}{r^2} \frac{dr}{R_1} = \theta + \Gamma_2,$$

гдѣ:

$$R_1 = \sqrt{\mu r^2 + 2h - \frac{\lambda + C_1^2}{r^2}};$$

но такъ какъ:

$$\theta = \varphi + \omega t, \quad v^2 = u^2 + 2r^2 \varphi' \omega + \omega^2 r^2,$$

то окажется, что:

$$D_1 = C_1, \quad 2h = 2D_1 \omega + 2H, \quad R_1 = R,$$

$$\Delta_1 = \Gamma_1, \quad \Delta_2 = \Gamma_2 - \omega \Gamma_1.$$

Произведя въ дѣйствительности интегрированіе, означенное въ формулѣ (237), мы получимъ уравненіе траекторіи относительнаго движенія; видъ этой кривой можетъ быть весьма разнообразенъ въ зависимости отъ знаковъ постоянныхъ μ и λ и отъ величинъ произвольныхъ постоянныхъ D_1 и h . Обратимъ вниманіе на тѣ случаи, въ которыхъ эта кривая получаетъ видъ логарифмической спирали.

Уравненіе (237) получить видъ:

$$\log r = n(\bar{\varphi} + \Delta_2), \dots \dots \dots (237 \text{ bis})$$

гдѣ n — постоянная величина, если при всякомъ r имѣетъ мѣсто слѣдующее равенство:

$$\mu r^2 + 2h - \frac{\lambda + D_1^2}{r^2} = n^2 r^2 \left(\frac{D_1}{r^2} - \omega \right)^2;$$

что можетъ быть только при слѣдующихъ условіяхъ:

$$\mu = n^2 \omega^2, \quad \lambda + D_1^2 = -n^2 D_1^2, \quad 2h = -2n^2 D_1 \omega;$$

то есть:

$$\mu = n^2 \omega^2, \quad \lambda = -(n^2 + 1) D_1^2, \quad H = -(1 + n^2) D_1 \omega;$$

первыя два условія показывають, что относительное движеніе по логарифмической спирали возможно тогда, когда сила пропорціональная разстоянію r есть отталкиваніе отъ начала координатъ, а сила обратно-пропорціональная кубу r есть притяженіе къ той же точкѣ.

Возьмемъ теперь другой примѣръ, болѣе сложный.

Примѣръ 21-й. Опредѣлить относительное движеніе (по отношенію къ землѣ) матерьяльной тяжелой точки, брошенной въ данномъ мѣстѣ земной поверхности по какому нибудь направленію и съ какою бы то ни было скоростью; принять во вниманіе суточное вращательное движеніе земли вокругъ ея оси и годовое движеніе центра ея вокругъ солнца.

Примемъ за точку $Ю$ (черт. 16) ту точку земной поверхности, изъ которой брошена матерьяльная точка; положительную ось Z проведемъ по продолженію земнаго радіуса R (проведеннаго изъ центра земли C въ точку $Ю$); ось $Э$ проведемъ по пересѣченію плоскости горизонта точки $Ю$ съ плоскостію меридіана этой точки и положительную часть этой оси направимъ къ югу; ось $Г$ будетъ касательною къ параллели точки $Ю$ и положительная часть ея будетъ направлена къ западу горизонта точки $Ю$.

Угловая скорость ω земли направлена параллельно радіусу, идущему изъ центра C земли къ южному полюсу ея S ; если провести угловую скорость черезъ точку $Ю$, то окажется, что она будетъ заключаться въ плоскости $Z Э$ и будетъ составлять съ положительною осью $Э$ уголъ λ , а съ положительною осью Z уголъ $(\frac{\pi}{2} + \lambda)$, гдѣ λ есть сѣверная широта точки $Ю$; поэтому проеціи угловой скорости на оси $Э$, $Г$, Z имѣють слѣдующія величины:

$$p = \omega \cos \lambda, \quad q = 0, \quad r = -\omega \sin \lambda;$$

величина же угловой скорости вращенія земли равна:

$$\omega = 0,0000729 \frac{1}{(\text{секунда})}.$$

Скорость центра C земли направлена по правую руку наблю-

дателя, стоящаго ногами въ C , головою по направленію къ съ-
верному полюсу N земли, и смотрящаго на солнце; ускореніе
точки C направлено къ солнцу и равно:

$$\frac{\epsilon M}{\rho^2}; \dots \dots \dots (238)$$

гдѣ M есть масса солнца, а ρ — радіусъ векторъ, проведенный
изъ центра солнца къ центру земли.

Скорость точки $Ю$ неизмѣняемой среды, неизмѣнно связанной
съ землею, есть геометрическая сумма изъ скорости точки C и
изъ вращательной скорости точки $Ю$ вокругъ мгновенной оси,
проведенной черезъ точку C .

Ускореніе точки $Ю$ есть геометрическая сумма, составленная
изъ ускоренія точки C (направленнаго къ солнцу, т.-е. противо-
положно направленію радіуса вектора ρ) и изъ центро-стреми-
тельнаго ускоренія точки $Ю$, направленнаго по $ЮС_1$ къ центру
 C_1 (черт. 16 и 17) параллели точки $Ю$ и равнаго $\omega^2 R \cos \lambda$;
поэтому проэкція на оси координатъ Ξ , Υ , Z ускоренія \dot{w}_0 точки
 $Ю$ неизмѣняемой среды равны:

$$\dot{w}_0 \cos(\dot{w}\Xi) = -\frac{\epsilon M}{\rho^2} \cos(P\Xi) - \omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda$$

$$\dot{w}_0 \cos(\dot{w}\Upsilon) = -\frac{\epsilon M}{\rho^2} \cos(P\Upsilon)$$

$$\dot{w}_0 \cos(\dot{w}Z) = -\frac{\epsilon M}{\rho^2} \cos(PZ) - \omega^2 R \cos^2 \lambda.$$

Скорость $(\xi'_0, \eta'_0, \zeta'_0)$, съ которою брошена матеріальная точка
 m , есть скорость относительная по отношенію къ средѣ; абсолютная
же начальная скорость точки m есть геометрическая сумма изъ выше-
сказанной начальной скорости u_0 $(\xi'_0, \eta'_0, \zeta'_0)$ и изъ скорости точки $Ю$.

Абсолютное ускореніе матеріальной точки сообщается ей равно-
дѣйствующею изъ силы притяженія ея къ центру земли:

$$\frac{\epsilon M m}{((\xi^2 + \eta^2 + (R + \zeta)^2)^{3/2}}$$

(гдѣ M — масса земли) и изъ силы притяженія ея къ центру солнца,

$$\frac{\varepsilon M m}{P_1^2} \dots \dots \dots (239)$$

Гдѣ P_1 есть длина радіуса вектора, проведеннаго изъ центра солнца къ положенію, занимаемому точкою m .

На основаніи всего сказаннаго, уравненія (239) въ настоящемъ случаѣ будутъ имѣть, по сокращеніи на m , слѣдующій видъ:

$$\xi'' = -\varepsilon \frac{M}{\rho^3} \xi + S_1 + (\omega^2 \chi - 2\eta' \omega) \sin \lambda \dots \dots (240, a)$$

$$\eta'' = -\varepsilon \frac{M}{\rho^3} \eta + S_2 + \omega^2 \eta + 2\chi' \omega \dots \dots \dots (240, b)$$

$$\zeta'' = -\varepsilon \frac{M}{\rho^3} (\zeta + R) + S_3 + (\omega^2 \chi - 2\eta' \omega) \cos \lambda; \dots (240, c)$$

здѣсь введены слѣдующія обозначенія:

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + (\zeta + R)^2, \quad \chi = \xi \sin \lambda + (\zeta + R) \cos \lambda$$

$$S_1 = \varepsilon M \left(\frac{\cos (P \Xi)}{\rho^2} - \frac{\cos (P_1 \Xi)}{P_1^2} \right),$$

$$S_2 = \varepsilon M \left(\frac{\cos (P \Upsilon)}{\rho^2} - \frac{\cos (P_1 \Upsilon)}{P_1^2} \right),$$

$$S_3 = \varepsilon M \left(\frac{\cos (P \mathbf{Z})}{\rho^2} - \frac{\cos (P_1 \mathbf{Z})}{P_1^2} \right).$$

Начальное положеніе матеріальной точки предполагается въ точкѣ KO , поэтому:

$$\xi_0 = 0, \quad \eta_0 = 0, \quad \zeta_0 = 0.$$

Члены S_1 , S_2 , S_3 суть проэкціи на оси Ξ , Υ , \mathbf{Z} геометрической разности между ускореніями, сообщаемыми притяженіемъ солнца матеріальной точкѣ и центру земли; эти разности представляютъ собою

ускоренія весьма малы сравнительно съ ускореніемъ силы тяжести, въ чемъ можете убѣдиться на основаніи слѣдующаго разсчета.

Положимъ, что матеріальная точка находится близъ той части поверхности земли, которая обращена къ солнцу, и что солнце находится въ зенитѣ, такъ что центръ земли, матеріальная точка и центръ солнца находятся на одной прямой линіи; тогда члены S будутъ имѣть слѣдующія значенія:

$$S_1=0, S_2=0, S_3=\epsilon M \left(\frac{1}{(P-R)^2} - \frac{1}{P^2} \right).$$

Выразивъ ϵ въ ускореніи силы тяжести на поверхности земли (формула 205 bis) и разложивъ первую дробь, заключающуюся въ большихъ скобкахъ выраженія S_3 , въ рядъ, получимъ:

$$S_3=2g \frac{M}{M} \left(\left(\frac{R}{P} \right)^2 + \dots \dots \right).$$

Извѣстно, что масса солнца въ 354020 разъ болѣе массы земли, что средній радіусъ земли равенъ 859,5 географическимъ милямъ и что среднее разстояніе отъ земли до солнца равно 20680000 географическихъ миль: подставивъ эти цифры въ выраженіе S_3 , получимъ:

$$S_3=g \cdot 0,000000051=0,00000049 \frac{\text{метр}}{(\text{секунда})^2}.$$

Слѣдовательно, S_3 составляетъ половину десятиллионной доли ускоренія силы тяжести; если матеріальная точка будетъ свободно падать въ продолженіи 100 секундъ, то вслѣдствіе ускоренія g она упадетъ на глубину 49000 метровъ, ускореніе же S_3 уменьшитъ этотъ путь на 2,45 миллиметра, то есть на пять стотысячныхъ долей всего пути.

Если же точка будетъ брошена снизу вверхъ со скоростью 980 метровъ въ секунду, то она вернется назадъ по истеченіи 200 секундъ, ускореніе же S_3 замедлитъ возвращеніе ея на миллионную долю секунды.

При тѣхъ средствахъ наблюдений, которыя намъ извѣстны, мы можемъ измѣрять большія длины съ точностью одной двухсотъ тысячной доли измѣряемой длины, а время можемъ измѣрять съ точностью до одной миллионной доли промежутка времени; поэтому обнаружить существованіе ускореній S_1, S_2, S_3 мы не можемъ.

Съ другой стороны замѣтимъ, что продолжительность полета брошеннаго тѣла не достигаетъ и ста секундъ даже при самыхъ большихъ скоростяхъ, которыя мы можемъ сообщить бросаему тѣлу; вслѣдствіе всего сказаннаго, мы вправѣ пренебречь членами S_1, S_2, S_3 .

Тогда уравненія (240) получаютъ такой видъ, что интегрируются безъ затрудненій; для того, чтобы убѣдиться въ этомъ, стоитъ лишь, при посредствѣ нижеслѣдующихъ формулъ, ввести абсолютныя координаты x, y, z вмѣсто относительныхъ ξ, η, ζ :

$$\xi = (x \cos \omega t - y \sin \omega t) \sin \lambda - z \cos \lambda$$

$$\eta = x \sin \omega t + y \cos \omega t$$

$$\zeta + R = (x \cos \omega t - y \sin \omega t) \cos \lambda + z \sin \lambda;$$

тогда, вмѣсто уравненій (240), будемъ имѣть слѣдующія:

$$x'' = -g \frac{R^2}{\rho^3} x, \quad y'' = -g \frac{R^2}{\rho^3} y, \quad z'' = -g \frac{R^2}{\rho^3} z,$$

интегрированіе которыхъ произведемъ по правиламъ, указаннымъ въ § 27.

Но такъ какъ относительное движеніе матеріальной точки должно прекратиться вскорѣ послѣ начала его, вслѣдствіе паденія ея на землю, то намъ достаточно будетъ имѣть такія выраженія для координатъ ξ, η, ζ , которыя выражали бы состояніе движенія точки въ первыя минуты послѣ его начала; для этого мы воспользуемся способомъ интегрированія помощію рядовъ, указаннымъ въ началѣ параграфа 18-го.

Примѣняя здѣсь этотъ способъ, мы получимъ выраженія для

ξ , η , ζ въ видѣ рядовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ времени t :

$$\xi = \xi_0' t + \xi_0'' \frac{t^2}{2} + \xi_0''' \frac{t^3}{1.2.3} + \dots \quad (241, a)$$

$$\eta = \eta_0' t + \eta_0'' \frac{t^2}{2} + \eta_0''' \frac{t^3}{1.2.3} + \dots \quad (241, b)$$

$$\zeta = \zeta_0' t + \zeta_0'' \frac{t^2}{2} + \zeta_0''' \frac{t^3}{1.2.3} + \dots \quad (241, c)$$

Выраженія для ξ_0'' , η_0'' , ζ_0'' получимъ изъ уравненій (240), подставивъ во вторыя части ихъ начальныя величины координатъ и скоростей; получимъ:

$$\xi_0'' = R\omega^2 \cos \lambda \sin \lambda - 2\eta_0' \omega \sin \lambda$$

$$\eta_0'' = 2\chi_0' \omega$$

$$\zeta_0'' = -g + R\omega^2 \cos^2 \lambda - 2\eta_0' \omega \cos \lambda.$$

Прежде, чѣмъ идти далѣе, мы измѣнимъ положеніе осей координатъ E и Z такимъ образомъ, чтобы въ выраженіе новой ξ_0'' не входилъ членъ, заключающій $R\omega^2$.

Обратимъ вниманіе на величины:

$$R\omega^2 \cos \lambda \sin \lambda, \quad R\omega^2 \cos^2 \lambda - g;$$

онѣ представляютъ проеціи на оси E и Z геометрической суммы двухъ ускореній: ускоренія g (черт. 18 линія $ЮК$), направленнаго къ центру C земли, и ускоренія $R\omega^2 \cos \lambda$, направленнаго по продолженію радіуса $C_1Ю$ параллели точки $Ю$. Величину и направленіе геометрической суммы $ЮГ$ этихъ двухъ ускореній $ЮК$ и $ЮЦ$ мы условимся обозначать буквою G ; и такъ:

$$G = \sqrt{g^2 - 2gR\omega^2 \cos^2 \lambda + R^2 \omega^4 \cos^2 \lambda}, \dots \quad (242)$$

$$G \cos(GE) = R\omega^2 \cos \lambda \sin \lambda, \quad G \cos(GZ) = -g + R\omega^2 \cos^2 \lambda \quad (242 bis)$$

Возьмемъ за ось Z (за новую ось Z) направленіе противо-

положное ускоренію G и за ось X (за новую ось E) — направле-
ніе перпендикулярное къ оси Z и идущее къ югу отъ точки $Ю$;
тогда очевидно проекція G на ось X будетъ нуль.

Назовемъ черезъ Δ уголъ, составляемый осью Z съ эквато-
ромъ; очевидно:

$$\Delta = \lambda + (Z, Z);$$

координаты точки относительно осей X и Z условимся обозначать
буквами x и z .

Координаты центра земли C по отношенію къ новымъ осямъ
будутъ слѣдующія:

$$- R \sin \alpha, \quad - R \cos \alpha,$$

гдѣ α есть уголъ, составляемый осями Z и Z между собою.

При осяхъ координатъ X, Y, Z , дифференціальныя уравненія от-
носительнаго движенія тяжелой точки будутъ имѣть слѣдующій видъ:

$$x'' = -g \frac{R^2}{\rho^3} (x + R \sin \alpha) + (\omega^2 - 2\eta') \omega \sin \Delta \dots \dots (243, a)$$

$$\eta'' = -g \frac{R^2}{\rho^3} \eta + (\omega\eta + 2\delta') \omega, \dots \dots \dots (243, b)$$

$$z'' = -g \frac{R^2}{\rho^3} (z + R \cos \alpha) + (\omega^2 - 2\eta') \omega \cos \Delta; \dots \dots (243, c)$$

гдѣ:

$$\rho^2 = (x + R \sin \alpha)^2 + \eta^2 + (z + R \cos \alpha)^2,$$

$$\delta = (x + R \sin \alpha) \sin \Delta + (z + R \cos \alpha) \cos \Delta.$$

Изъ этихъ уравненій слѣдуетъ:

$$\left. \begin{aligned} x_0'' &= -2\eta_0' \omega \sin \Delta \\ \eta_0'' &= +2(x_0' \sin \Delta + z_0' \cos \Delta) \omega \\ z_0'' &= -2\eta_0' \omega \cos \Delta - G \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots (244)$$

или что:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= R \cos \lambda, \quad \delta_0' = x_0' \sin \Delta + \dot{\delta}_0' \cos \Delta, \\ -g \sin \alpha + \omega^2 R \cos \lambda \sin \Delta &= G \cos (G\mathcal{X}) = 0 \\ -g \cos \alpha + \omega^2 R \cos \lambda \cos \Delta &= G \cos (G\mathcal{Y}) = -G. \end{aligned}$$

Далѣе, составивъ третьи производныя и подставивъ въ нихъ аженія начальныя координаты и скорости, получимъ:

$$\begin{aligned} x_0''' &= -g \frac{x_0'}{R} + 3g \frac{\rho_0'}{R} \sin \alpha + (\omega \delta_0' - 2\eta_0'') \omega \sin \Delta \\ \eta_0''' &= -g \frac{\eta_0'}{R} + (\omega \eta_0' + 2\delta_0'') \omega \\ \dot{\delta}_0''' &= -g \frac{\dot{\delta}_0'}{R} + 3g \frac{\rho_0'}{R} \cos \alpha + (\omega \delta_0' - 2\eta_0'') \omega \cos \Delta; \end{aligned}$$

и надо подставить:

$$\begin{aligned} \rho_0' &= x_0' \sin \alpha + \dot{\delta}_0' \cos \alpha, \quad \omega \delta_0' - 2\eta_0'' = -3\dot{\delta}_0' \omega, \\ \omega \eta_0' + 2\delta_0'' &= -3\eta_0' \omega - 2G \cos \Delta; \end{aligned}$$

и окажется, что:

$$\left. \begin{aligned} x_0''' &= -3\omega^2 \dot{\delta}_0' \sin \Delta - g \frac{x_0'}{R} + 3g \frac{\rho_0'}{R} \sin \alpha \\ \eta_0''' &= -3\omega^2 \eta_0' - g \frac{\eta_0'}{R} - 2G\omega \cos \Delta \\ \dot{\delta}_0''' &= -3\omega^2 \dot{\delta}_0' \cos \Delta - g \frac{\dot{\delta}_0'}{R} + 3g \frac{\rho_0'}{R} \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots \text{г. (245)}$$

Четвертыя производныя координатъ выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} x^{(4)} &= -g \frac{R^2}{\rho^3} \left(x'' - 6 \frac{x' \rho'}{\rho} + 3(x + R \sin \alpha) \frac{4(\rho')^2 - \rho \rho''}{\rho^3} \right) + \\ &\quad + (\omega \delta'' - 2\eta''') \omega \sin \Delta; \dots \end{aligned}$$

Чтобы составить выражения начальных значений производных четвертого порядка, составим сначала, при помощи предыдущих формул, выражения следующих величин:

$$\delta_0''' = -3\omega^2 \delta_0' - \frac{g}{R} \delta_0' + 3 \frac{g}{R} \rho_0' \cos \lambda$$

$$\omega \delta_0'' - 2\eta_0''' = 4\omega^2 \eta_0' + 2 \frac{g}{R} \eta_0' + 3G\omega \cos \Delta$$

$$\omega \eta_0'' + 2\delta_0''' = -4\omega^2 \delta_0' - 2 \frac{g}{R} \delta_0' + 6 \frac{g}{R} \rho_0' \cos \lambda.$$

Послѣ нѣкоторыхъ преобразованій найдемъ:

$$x^{(4)} = 3G \left(\omega^2 \sin \Delta \cos \Delta - \frac{g}{R} \sin \alpha \cos \alpha \right) +$$

$$+ 4 \left(\omega^2 + \frac{g}{R} \right) \omega \eta_0' \sin \Delta - 6 \frac{g}{R} \omega \eta_0' \sin \alpha \cos \lambda +$$

$$+ 3 \frac{g}{R^2} \left((\eta_0')^2 - 5(\rho_0')^2 \right) \sin \alpha + 3 \frac{g}{R^2} (3x_0' \rho_0' - \delta_0' x); \dots (246, a)$$

$$\eta_0^{(4)} = -4 \left(\omega^2 + \frac{g}{R} \right) \omega \delta_0' + 6 \frac{g}{R} \omega \rho_0' \cos \lambda + 6 \frac{g}{R^2} \eta_0' \rho_0'; \dots (246, b)$$

$$\delta_0^{(4)} = 3G \left(\omega^2 \cos^2 \Delta - \frac{g}{R} \cos^2 \alpha \right) + \frac{g}{R} G +$$

$$+ 4 \left(\omega^2 + \frac{g}{R} \right) \omega \eta_0' \cos \Delta - 6 \frac{g}{R} \omega \eta_0' \cos \alpha \cos \lambda +$$

$$+ 3 \frac{g}{R^2} \left((\eta_0')^2 - 5(\rho_0')^2 \right) \cos \alpha + 3 \frac{g}{R^2} (3\delta_0' \rho_0' + x_0' x) \dots \dots (246, c)$$

$$x = x_0' \cos \alpha - \delta_0' \sin \alpha.$$

Принявъ во вниманіе равенства:

$$\left. \begin{aligned} G \cos \alpha &= g - R\omega^2 \cos^2 \lambda, & G \sin \alpha &= R\omega^2 \sin \lambda \cos \lambda, \\ G \cos \Delta &= (g - R\omega^2) \cos \lambda, & G \sin \Delta &= g \sin \lambda, \end{aligned} \right\} \dots \dots (247)$$

можемъ упростить выраженіе перваго члена второй части равенства (246, a); а именно мы найдемъ, что онъ равенъ:

$$- 3 \frac{g}{G} R\omega^4 \sin^2 \lambda \cos \lambda.$$

Составимъ ряды для слѣдующихъ случаевъ:

А) Матерьяльная точка пущена свободно, безъ начальной от-
сительной скорости, то есть:

$$\xi_0' = 0, \eta_0' = 0, \zeta_0' = 0;$$

огда выраженія для координатъ будутъ слѣдующія:

$$\xi = -\frac{g}{G} R \omega^4 \frac{t^4}{8} \sin^2 \lambda \cos \lambda + \dots \dots \dots (248, a)$$

$$\eta = -G \omega \frac{t^3}{3} \cos \Lambda + \dots \dots \dots (248, b)$$

$$\zeta = -G \frac{t^2}{2} + G \left(\frac{g}{3R} + \omega^2 \cos^2 \Lambda - \frac{g}{R} \cos^2 \alpha \right) \frac{t^4}{8} + \dots \dots (248, c)$$

Второе выраженіе показываетъ, что точка уклоняется въ отри-
цательную сторону оси Υ (то есть къ *востоку*) отъ плоскости
меридіана точки $Ю$; величина этого отклоненія пропорціональна
синусу истинной широты Λ точки $Ю$.

Взявъ $G=9,8$ единицъ ускоренія, Λ равнымъ 51° и $t=5,687$
секунды, получимъ приблизительно:

$$\zeta = 158,5 \text{ метра, } \eta = -27,56 \text{ миллиметра;}$$

то есть, при паденіи точки съ высоты 158,5 метровъ подъ ши-
ротой въ 51° (сѣверной широты), отклоненіе къ востоку полу-
чается въ 27 съ половиною миллиметровъ; но опытамъ, произ-
веденнымъ Рейхомъ въ Фрейбургѣ (находящимся подъ широтой
1 градуса) оказалось, что при паденіи съ этой высоты получается
отклоненіе въ 28,3 миллиметра къ востоку; кромѣ того, при тѣхъ
же опытахъ, наблюдалось еще нѣкоторое отклоненіе къ югу.

Формула (248, а) даетъ, напротивъ, отклоненіе къ сѣверу
притомъ совершенно ничтожное: для $t=6$ секундъ, полу-
чается 8 миллионныхъ долей миллиметра; поэтому можно сказать,
что, по формуламъ (248), движеніе падающей точки совершается
приблизительно въ плоскости $З\Upsilon$.

При $t=6$ секундахъ, второй членъ ряда (248, с) представляеть длину въ 2,6 миллиметра; если пренебречь этимъ членомъ, а также всѣми членами, заключающими степени t выше 3-й, то движеніе свободно падающей точки выразится такъ:

$$\xi=0, \quad \eta=-G\omega \frac{t^3}{3} \cos \Delta, \quad \zeta=-G \frac{t^2}{2};$$

а траекторія окажется полукубическою параболою, заключающеюся въ плоскости $\mathcal{Z}\Upsilon$.

В) Если начальная относительная скорость направлена по оси \mathcal{Z} , то есть, если точка брошена вертикально снизу вверхъ, то выраженія относительныхъ координатъ будутъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\xi = \frac{gt^2}{2G^2} \mathcal{Z}_0' R \omega^4 \sin^2 \lambda \cos \lambda,$$

$$\eta = \left(\mathcal{Z}_0' - G \frac{t}{3} \right) t^2 \omega \cos \Delta,$$

$$\zeta = \mathcal{Z}_0' t - G \frac{t^2}{2} - \mathcal{Z}_0' \frac{t^3}{6} \left[\mathcal{Z} \left(\omega^2 \cos^2 \Delta - \frac{g}{R} \cos^2 \alpha \right) + \frac{g}{R} \right],$$

если пренебречь членами, заключающими четвертыя и высшія степени времени.

Чтобы составить себѣ хотя приблизительное понятіе о видѣ этого движенія, пренебрежемъ членами, заключающими величины:

$$R\omega^4, \quad \mathcal{Z}_0' \omega^2, \quad \frac{g}{R};$$

тогда получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 0, \quad \eta = \left(\mathcal{Z}_0' - G \frac{t}{3} \right) t^2 \omega \cos \Delta \\ \zeta &= \mathcal{Z}_0' t - G \frac{t^2}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (249)$$

Изъ этихъ выраженій видно, что въ тотъ моментъ t_1 , въ который точка достигаетъ наибольшей высоты, она будетъ отклонена къ западу отъ вертикальной плоскости на длину:

$$\eta_1 = \frac{2(\mathcal{Z}_0')^2}{3G^2} \omega \cos \Delta;$$

ментъ $t_2=2t$ точка вернется на ось Γ и будетъ отклонена отъ $Ю$ къ *западу* на длину:

$$\eta_2 = \frac{4(\eta_0')^2}{3G^2} = \cos \Delta = 2\eta_1.$$

съ та часть относительной траекторіи, которая пробѣгается въ теченіе промежутка времени отъ $t=0$ до $t=t_2$, на- ся въ квадрантъ положительныхъ осей Γ и $З$.

Чтобы составить себѣ приблизительное понятіе о видѣ дви- маторьяльной точки, брошенной съ начальной скоростью u_0 угломъ α къ истинному горизонту точки $Ю$ и въ верти- ой плоскости, составляющей азимутъ β съ плоскостью мер- ми пренебрежемъ членами, заключающими величины:

$$\omega^2 \zeta_0', \quad \omega^2 \eta_0', \quad \omega^2 \beta_0', \quad \frac{g}{R},$$

ми членами высшаго порядка малости; тогда получимъ слѣ- іа выраженія:

$$\left. \begin{aligned} t' &= \eta_0' t^2 \omega \sin \Delta \\ t' + (\zeta_0' \sin \Delta + \beta_0' \cos \Delta) t^2 \omega - G \frac{t^2}{8} \omega \cos \Delta \\ t' &= \eta_0' t^2 \omega \cos \Delta - G \frac{t^2}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (250)$$

$$\zeta_0' = u_0 \cos \alpha \cos \beta, \quad \eta_0' = u_0 \cos \alpha \sin \beta, \quad \beta_0' = u_0 \sin \alpha.$$

равнивъ эти выраженія съ тѣми, которые получились бы при вижности земли (при $\omega=0$) и при дѣйствіи на точку уско-

G , направленного по отрицательной оси $З$, мы увидимъ, ращеніе земли оказываетъ слѣдующее вліяніе на полетъ бро- го тяжелаго тѣла.

) Движеніе параллельно оси $З$ совершается не съ ускореніемъ съ ускореніемъ

$$G + 2u_0 \omega \cos \Delta \cos \alpha \sin \beta,$$

добавочный членъ котораго пропорціоналенъ косинусу истинной широты Δ и синусу азимута β ; поэтому, при одной и той же скорости u_0 и при томъ же углѣ α , брошенное тѣло поднимется на большую высоту при восточномъ азимутѣ ($\beta < 0$), чѣмъ при западномъ ($\beta > 0$).

б) Трассаторія не заключается въ вертикальной плоскости:

$$\eta = \xi \operatorname{tg} \beta,$$

какъ было бы при неподвижности земли, но имѣетъ видъ витой кривой линіи; если представить себѣ подвижную вертикальную плоскость, заключающую въ себѣ движущуюся точку, то законъ измѣненія азимута B этой плоскости выразится слѣдующею формулою:

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} \beta + t\omega \sin \Delta}{1 - t\omega \sin \Delta \operatorname{tg} \beta} + \frac{(\xi_0' - G \frac{t}{3})}{\xi_0' - \eta_0' t\omega \sin \Delta} t\omega \cos \Delta \dots (251)$$

Изъ этой формулы видно, что брошенное тѣло отклоняется, на сѣверномъ полушаріи, *вправо* отъ первоначальнаго направленія; въ самомъ дѣлѣ второй членъ суммы (251) сохраняетъ положительную величину въ теченіи времени отъ $t=0$ до $t=\frac{3u_0 \sin \alpha}{G}$; поэтому:

$$B > (\beta + \operatorname{arctg}(t\omega \sin \Delta)).$$

Если тѣло брошено горизонтально, и начальная скорость его настолько велика, что можно пренебречь вторымъ членомъ суммы (251), то тогда:

$$\operatorname{tg}(B - \beta) = t\omega \sin \Delta;$$

то есть уголъ $(B - \beta)$ возрастаетъ пропорціонально времени и синусу широты Δ , и притомъ это отклоненіе *не зависитъ отъ первоначальнаго азимута* β .

с) Можно показать, что вращеніе земли увеличиваетъ дальность полета при западномъ азимутѣ β и уменьшаетъ при восточномъ.

Выраженія (250) могутъ быть получены также при помощи слѣдующихъ дѣйствій.

Пренебрежемъ въ дифференціальныя уравненія движенія (243) членами:

$$\omega^2 \xi, \omega^2 \eta, \omega^2 \zeta$$

и, замѣнивъ ρ черезъ R , пренебрежемъ отношеніями:

$$\frac{\xi}{R}, \frac{\eta}{R}, \frac{\zeta}{R};$$

тогда получимъ дифференціальныя уравненія слѣдующаго вида:

$$\left. \begin{aligned} \xi'' &= -2\eta'\omega \sin \Delta \\ \eta'' &= +2(\xi' \sin \Delta + \zeta' \cos \Delta)\omega \\ \zeta'' &= -2\eta'\omega \cos \Delta - G \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (252)$$

Первые интегралы этихъ уравненій будутъ:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}' &= \xi_0' - 2\eta\omega \sin \Delta \\ \eta' &= \eta_0' + 2(\xi \sin \Delta + \zeta \cos \Delta)\omega \\ \zeta' &= \zeta_0' - 2\eta\omega \cos \Delta - Gt; \end{aligned}$$

они даютъ намъ выраженія проэкцій скорости въ функціяхъ времени и координатъ; подставивъ эти выраженія въ уравненія (252) и отбросивъ члены, содержащіе:

$$\omega^2 \xi, \omega^2 \eta, \omega^2 \zeta,$$

будемъ имѣть дифференціальныя уравненія:

$$\begin{aligned} \xi'' &= -2\eta_0'\omega \sin \Delta \\ \eta'' &= 2(\xi_0' \sin \Delta + \zeta_0' \cos \Delta)\omega - 2tG\omega \cos \Delta \\ \zeta'' &= -2\eta_0'\omega \cos \Delta - G; \end{aligned}$$

(двукратное интегрированіе этихъ уравненій приведетъ насъ къ выраженіямъ (250).

§ 31. Положенія равновѣсія свободной матерьяльной точки. Условія устойчивости.

Свободная матерьяльная точка, подверженная дѣйствию какихъ либо силъ, можетъ оставаться въ покоѣ въ тѣхъ точкахъ пространства, въ которыхъ силы, приложенныя къ покоящейся точкѣ, взаимно уравновѣшиваются; такія положенія матерьяльной точки называются *положеніями равновѣсія* ея.

Напримѣръ, матерьяльная точка, подверженная притяженію, направленному къ неподвижному центру C и прямопропорціональному разстоянію отъ C , будетъ имѣть положеніе равновѣсія въ этомъ центрѣ C .

Тотъ же центръ будетъ положеніемъ равновѣсія даже и тогда, когда, кромѣ притяженія къ нему, на точку будетъ дѣйствовать сопротивленіе среды, пропорціональное первой степени скорости; въ самомъ дѣлѣ, если матерьяльная точка будетъ помѣщена въ центръ C безъ начальной скорости, то обѣ силы будутъ равны нулю, и матерьяльная точка останется въ покоѣ.

Тотъ же центръ будетъ положеніемъ равновѣсія и въ томъ случаѣ, когда, вмѣсто притяженія, на точку дѣйствуетъ сила отталкивающая ее отъ центра и пропорціональная разстоянію отъ него.

Матерьяльная точка, помѣщенная въ положеніи равновѣсія безъ начальной скорости, будетъ оставаться въ покоѣ до тѣхъ поръ, пока какая либо посторонняя сила или причина не выведетъ ее изъ этого положенія.

Положимъ, что дѣйствіемъ нѣкоторой временной причины, матерьяльная точка будетъ отклонена изъ положенія равновѣсія M , въ одну изъ близлежащихъ точекъ пространства и будетъ выпущена изъ этой точки M_0 съ начальною скоростью v_0 ; послѣ этого, дѣйствіе временной причины прекращается, и матерьяльной точкѣ предоставляется совершать движеніе подъ вліяніемъ тѣхъ силъ, которыя взаимно уравновѣшиваются въ точкѣ M , но не уравновѣшиваются въ близлежащихъ частяхъ пространства.

Движеніе это можетъ быть различнаго характера, смотря по расположенію силъ въ сосѣдствѣ съ точкою M , смотря по величинѣ

и направленію начальнаго отклоненія $\overline{M, M_0}$ и смотря по величинѣ и направленію начальной скорости v_0 .

При нѣкоторыхъ силахъ матеріальная точка совершаетъ движеніе, не выходя изъ предѣловъ нѣкотораго объема, окружающаго точку M_0 ; притомъ размѣры этого объема тѣмъ менѣе, чѣмъ менѣе отклоненіе $\overline{M, M_0}$ и скорость v_0 , а если послѣднія (то есть $\overline{M, M_0}$ и v_0) бесконечно-малы, то движеніе совершается въ бесконечно-малыхъ предѣлахъ около положенія равновѣсія M_0 .

Если движеніе имѣетъ такой характеръ при весьма малыхъ начальныхъ отклоненіяхъ по всевозможнымъ направленіямъ изъ положенія равновѣсія и при всевозможныхъ направленіяхъ весьма малыхъ начальныхъ скоростей, то положеніе равновѣсія называютъ *устойчивымъ*.

При другихъ же силахъ матеріальная точка въ своемъ движеніи все болѣе и болѣе удаляется отъ положенія равновѣсія, даже вслѣдствіе самыхъ незначительныхъ начальныхъ отклоненій и скоростей; такое положеніе равновѣсія называютъ *неустойчивымъ*.

Напримѣръ, центръ C есть положеніе устойчиваго равновѣсія матеріальной точки, притягиваемой къ нему силою, пропорціональною разстоянію; потому что матеріальная точка, по отклоненіи ея на разстояніе конечной величины отъ центра C и по сообщеніи ей начальной скорости конечной величины, будетъ совершать движеніе вокругъ C по эллипсу конечныхъ размѣровъ (см. примѣръ 5 на стр. 82).

Напротивъ, тотъ же центръ будетъ положеніемъ неустойчиваго равновѣсія, если онъ отталкиваетъ отъ себя матеріальную точку силою, пропорціональною разстоянію; потому что движущаяся точка уходитъ въ бесконечность даже вслѣдствіе самыхъ незначительныхъ отклоненій изъ центра C , какъ это видно изъ слѣдующихъ формулъ:

$$x = x_0 \left(\frac{e^{xt} + e^{-xt}}{2} \right), \quad y = y_0 \left(\frac{e^{xt} + e^{-xt}}{2} \right),$$

при составленіи которыхъ предполагалось, что центръ C взятъ за начало координатъ, и что начальная скорость равна нулю; изъ этихъ формулъ видно, что, даже при весьма малыхъ началь-

ныхъ отклоненіяхъ x_0, y_0 , координаты x и y получаютъ безконечно большія значенія при $t = \infty$.

Устойчивость равновѣсія матерьяльной точки въ центрѣ C , притягивающемъ ее силою, пропорціональною разстоянію, проявляется довольно наглядно въ средѣ, оказывающей движенію матерьяльной точки сопротивление, пропорціональное скорости; тогда движущаяся точка будетъ постепенно приближаться къ притягивающему центру, описывая вокругъ него спираль, все болѣе и болѣе суживающуюся (см. стр. 83, черт. 6).

Положенія равновѣсія матерьяльной точки, на которую дѣйствуютъ силы, имѣющія потенціалъ U , суть всѣ тѣ точки пространства, координаты которыхъ удовлетворяютъ тремъ уравненіямъ:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0; \dots\dots\dots (253)$$

это могутъ быть: или изолированныя точки, или сплошныя линіи, поверхности и объемы, напримѣръ:

Примѣръ 22. Силы, приложения къ матерьяльной точкѣ, суть: силы притяженія, пропорціональныя разстояніямъ, къ двумъ центрамъ, находящимся на оси X въ точкахъ $(x_1 = a)$ и $(x_2 = -a)$, и сила, параллельная положительной оси Z и пропорціональная квадрату разстоянія матерьяльной точки отъ плоскости XU ; величины этихъ трехъ силъ — слѣдующія:

$$\mu^2 r_1, \quad \mu^2 r_2, \quad \lambda^2 z^2,$$

гдѣ r_1 и r_2 означаютъ разстоянія матерьяльной точки отъ притягивающихъ центровъ.

Въ этомъ случаѣ потенціальная функція будетъ:

$$U = \frac{\lambda^2}{3} z^3 - \frac{\mu^2}{2} ((x-a)^2 + y^2 + z^2) - \frac{\mu^2}{2} ((x+a)^2 + y^2 + z^2).$$

Уравненія (253) будутъ слѣдующаго вида:

$$-2\mu^2 x = 0, \quad -2\mu^2 y = 0, \quad \lambda^2 z^2 - 2\mu^2 z = 0:$$

изъ нихъ находимъ, что равновѣсіе силъ возможно въ двухъ точкахъ пространства:

- 1) $x=0, y=0, z=0$;
- 2) $x=0, y=0, z=\frac{2\mu^2}{\lambda^2}$.

Примѣръ 23. Притяженія тѣ же, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, но вмѣсто силы, параллельной оси Z , дѣйствуетъ сила, отталкивающая матерьяльную точку отъ оси X пропорціонально квадрату разстоянія точки отъ этой оси; величина этой силы:

$$\lambda^2(y^2 + z^2).$$

Потенціальная функція здѣсь будетъ слѣдующая:

$$U = \frac{\lambda^2}{8}(y^2 + z^2)^2 - \frac{\mu^2}{2}r_1^2 - \frac{\mu^2}{2}r_2^2;$$

приравнявъ нулю первыя производныя ея, получимъ уравненія:

$$-2\mu^2x=0, (\lambda^2\sqrt{y^2+z^2}-2\mu^2)y=0, (\lambda^2\sqrt{y^2+z^2}-2\mu^2)z=0,$$

изъ которыхъ слѣдуетъ, что положенія равновѣсія суть:

- 1) начало координатъ: $x=0, y=0, z=0$,
- 2) каждая изъ точекъ круга:

$$x=0, y^2 + z^2 = \frac{4\mu^4}{\lambda^4}.$$

Примѣръ 24. При дѣйствіи силъ, имѣющихъ потенциалъ:

$$U = \mu^2\left(r^2 + \frac{\lambda^4}{r^2}\right),$$

положенія равновѣсія матерьяльной точки суть всѣ точки поверхности сферы, имѣющей радіусъ λ .

Въ каждой такой точкѣ пространства, координаты которой удовлетворяютъ тремъ уравненіямъ (253), равновѣсіе будетъ устойчивымъ или неустойчивымъ, смотря потому, имѣетъ ли потенциальная функція U въ этой точкѣ максимумъ, или минимумъ.

Пусть M , есть одна изъ точекъ равновѣсія, U ,—численное значеніе, получаемое потенціальною функціею въ этой точкѣ; x , y , z ,—координаты этой точки, удовлетворяющія тремъ уравненіямъ (253).

Въ точкѣ M ($x_0 + \delta x$, $y_0 + \delta y$, $z_0 + \delta z$), бесконечно-близкой къ точкѣ M_0 , потенціальная функція имѣетъ слѣдующее численное значеніе:

$$U_0 + \delta^2 U;$$

$$\begin{aligned} \delta^2 U = & \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} (\delta x)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} (\delta y)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} (\delta z)^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \delta y \delta z + \\ & + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \delta z \delta x + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \delta x \delta y; \end{aligned}$$

гдѣ во вторыя производныя должны быть подставлены координаты точки M_0 .

Функція U имѣетъ максимумъ въ точкѣ M_0 , если $\delta^2 U$ имѣетъ отрицательныя величины при всякихъ знакахъ бесконечно-малыхъ величинъ δx , δy , δz и при всякихъ отношеніяхъ между ними; какъ извѣстно, это можетъ быть только тогда, когда вторыя производныя удовлетворяютъ условіямъ:

$$\left. \begin{aligned} U_{xx} < 0, \quad U_{yy} U_{xx} - U_{xy}^2 > 0, \\ (U_{yy} U_{xx} - U_{xy}^2)(U_{zz} U_{xx} - U_{xz}^2) - (U_{xx} U_{yz} - U_{zx} U_{xy})^2 > 0; \end{aligned} \right\} (254)$$

(здѣсь вторыя производныя обозначены для сокращенія объема формулъ особыми символами; такъ

$$U_{yz} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}.)$$

Если условія (254) удовлетворены, то, въ непосредственноиъ соседствѣ съ точкою M_0 , поверхности уровня имѣютъ видъ эллипсоидовъ съ бесконечно-малыми осями, имѣющихъ центры въ точкѣ M_0 ; параметръ такой поверхности уровня есть: $U_0 - k^2$; а уравненіе ея:

$$-k^2 = U_{xx} x^2 + U_{yy} y^2 + U_{zz} z^2 + 2 U_{yz} yz + 2 U_{zx} zx + 2 U_{xy} xy; (255)$$

k есть весьма малая постоянная, имѣющая тѣмъ большую величину, чѣмъ поверхность уровня далѣе отъ точки M .

Положимъ, что матеріальная точка отклонена изъ положенія равновѣсія M въ весьма близкую къ нему точку M_0 , и здѣсь сообщена весьма малая начальная скорость v_0 ; пусть:

$$U_e - k^2$$

есть параметръ той поверхности уровня, на которой находится точка M_0 .

Движеніе, совершаемое матеріальной точкою, должно удовлетворять закону живой силы:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U_e - k^2 - (U_e - k_0^2),$$

и:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + k_0^2 - k^2;$$

изъ этого уравненія видно, что точка не можетъ выйти внаружу изъ поверхности уровня, для которой

$$k^2 = \frac{mv_0^2}{2} + k_0^2.$$

Потому что живая сила не можетъ быть отрицательною; поэтому точка M , въ которой потенциальная функція имѣетъ максимумъ, есть положеніе устойчиваго равновѣсія.

Такъ, въ примѣрахъ 22-мъ и 23-мъ начало координатъ есть положеніе устойчиваго равновѣсія.

ГЛАВА IV.

Механика несвободной матерьяльной точки.

§ 32. Матерьяльная точка несвободна, если существуют преграды, не позволяющія ей имѣть какую угодно скорость по какому угодно направленію изъ той точки пространства, въ которой она находится.

Всякія преграды могутъ быть разсматриваемы: одні — какъ поверхности тѣлъ непроницаемыхъ матерьяльною точкою, другія — какъ поверхности, удерживающія на себѣ точку.

Каждая преграда перваго рода не позволяетъ матерьяльной точкѣ, находящейся на преграждающей поверхности, сойти съ нея въ сторону непроницаемаго тѣла, дѣйствительнаго или воображаемаго, ограниченнаго этою поверхностью; точка можетъ двигаться вдоль по поверхности или сойти съ нея въ свободную сторону; поэтому такая преграда называется *поверхностью, не удерживающею матерьяльной точки*.

Напримѣръ, матерьяльная точка, прикрѣпленная къ одному концу гибкой, нерастяжимой и неизмѣющей массы нити, другою концемъ которой прикрѣпленъ въ началѣ координатъ, имѣетъ преградою поверхность сферы, радіусъ которой равенъ длинѣ нити, а центръ находится въ началѣ координатъ. Пока нить ненатянута, — матерьяльная точка находится внутри сферы, гдѣ она совершенно свободна; если же нить натянута, то точка, находясь на поверхности сферы, можетъ имѣть движеніе вдоль по сферѣ или внутрь ея; внаружу же сферы ея движеніе преграждено нерастяжимостью нити. Эта сфера есть очевидно поверхность, не удерживающая точку отъ перемѣщеній, направленныхъ внутрь ея.

Каждая преграда втораго рода не позволяетъ матерьяльной точкѣ сойти съ нѣкоторой поверхности, ни въ ту, ни въ другую сторону ея, такъ что точка можетъ двигаться только вдоль по

поверхности; такую преграду называют *поверхностью, удерживающею на себѣ матерьяльную точку*.

Примѣромъ такой поверхности можетъ служить поверхность сферы, на которой должна оставаться матерьяльная точка, привѣшенная къ одному концу безконечно-тонкаго, вполнѣ твердаго стержня, другой конецъ котораго постоянно находится въ началѣ координатъ; предполагается, что стержень можетъ совершать какое бы то ни было вращательное движеніе вокругъ этой неподвижной точки.

§ 33. Ограниченіе свободы движенія точки поверхностью, удерживающею ее на себѣ.

Координаты матерьяльной точки должны постоянно удовлетворять уравненію поверхности, удерживающей ее на себѣ.

Если эта поверхность неподвижна, то уравненіе ея заключаетъ въ себѣ координаты и постоянные параметры.

Если же поверхность движется или измѣняетъ съ теченіемъ времени свой видъ или размѣры, то уравненіе ея будетъ заключать: координаты, постоянные параметры и время t .

Напримѣръ, поверхность сферы, центръ которой движется равномерно со скоростью k по оси X , а радіусъ возрастаетъ равномерно со скоростью A , выразится слѣдующимъ уравненіемъ:

$$(x - x_0 - kt)^2 + y^2 + z^2 - (R + At)^2 = 0.$$

гдѣ x_0 есть абцисса центра, а R — величина радіуса, въ моментъ $t=0$.

Если матерьяльная точка движется по поверхности, выражаемой уравненіемъ:

$$f(x, y, z, t) = 0, \dots \dots \dots (256)$$

то скорость ея должна удовлетворять слѣдующему уравненію:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \dots \dots \dots (257)$$

которое можно представить подъ такимъ видомъ:

$$\Delta f \cdot v \cos(v.N) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \dots \dots \dots (258)$$

гдѣ N есть направленіе положительной нормали, возстановленной къ поверхности (256) изъ той точки ея, въ которой движущаяся матеріальная точка находится въ моментъ t ; косинусы угловъ, составляемыхъ этою нормалью съ осями координатъ, выражаются такъ:

$$\left. \begin{aligned} \cos(N,X) &= \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial x}, \\ \cos(N,Y) &= \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \cos(N,Z) &= \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (259)$$

$$\Delta f = + \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \dots \dots \dots (259 \text{ bis})$$

Уравненіе (258) выражаетъ, что проеція скорости v на направленіе положительной нормали должна имѣть величину:

$$-\frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial t} \dots \dots \dots (260)$$

Проеція скорости на касательную плоскость къ поверхности можетъ быть какою угодно.

Частная производная отъ f по t равна нулю, если поверхность неподвижна; тогда уравненіе (258) будетъ выражать, что скорость должна заключаться въ касательной плоскости, что понятно и само собою.

Если поверхность, не измѣняя ни своего вида, ни размѣровъ, имѣетъ какое либо движеніе, то можно представить себѣ, что она принадлежитъ нѣкоторой движущейся неизмѣняемой средѣ, такъ что всѣ точки поверхности суть точки этой среды. Означимъ черезъ w скорость той точки M поверхности и среды, съ которою матеріальная точка въ моментъ t совпадаетъ; эта скорость

должна удовлетворять тому же уравненію (258), которому удовлетворяет и v , потому что матеріальная точка имѣла бы ее (т.-е. скорость w), если бы оставалась въ постоянномъ совпаденіи съ точкою M , а не двигалась бы вдоль по поверхности; и такъ:

$$\Delta f w \cos(w, N) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots (261)$$

Вычтя уравненіе (261) изъ уравненія (258), получимъ:

$$\Delta f (v \cos(v, N) - w \cos(w, N)) = 0,$$

или:

$$\Delta f \cdot u \cos(u, N) = 0, \dots\dots\dots (262)$$

гдѣ u есть скорость относительнаго движенія матеріальной точки по отношенію къ той неизмѣняемой средѣ, съ которою движущаяся поверхность неизмѣнно связана; уравненіе (262) выражаетъ, что относительная скорость u должна заключаться въ касательной плоскости къ поверхности.

Если поверхность деформируется, то можно представить себѣ, что она принадлежитъ нѣкоторой деформирующейся средѣ, такъ что всѣ точки поверхности суть точки этой среды. Разсуждая такъ же, какъ выше, придемъ къ такому же заключенію, а именно, что *скорость относительнаго движенія матеріальной точки по отношенію къ средѣ должна заключаться въ касательной плоскости къ поверхности.*

§ 34. Ограниченіе свободы движенія точки поверхности, не удерживающею ее съ одной стороны.

Условимся писать уравненіе каждой неударивающей поверхности такимъ образомъ, чтобы во второй части уравненія былъ нуль, и чтобы первая часть дѣлалась большею нуля при подстановленіи въ нее координатъ точекъ той части пространства внѣ поверхности, въ которую матеріальная точка можетъ сойти съ поверхности.

Такъ, напримѣръ, уравненіе поверхности сферы радіуса R , имѣющей центръ въ началѣ координатъ, будемъ писать такъ:

$$R^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \dots\dots\dots (263)$$

если поверхность эта не удерживает материальную точку, находящуюся на ней, от перемещений внутрь ея; потому что координаты точекъ, находящихся внутри сферы, дѣлаютъ первую часть этого уравненія болѣе нуля и обращаютъ его въ неравенство:

$$R^2 - (x^2 + y^2 + z^2) > 0.$$

Если же та же самая сфера не удерживаетъ материальную точку отъ перемещений внаружу ея, то уравненіе ея станемъ писать такъ:

$$(x^2 + y^2 + z^2) - R^2 = 0 \dots\dots\dots (264)$$

для того, чтобы первая часть его дѣлалась болѣею нуля при подстановленіи въ нее координатъ точекъ, находящихся внѣ сферы.

При соблюденіи этого условія, въ свободную сторону поверхности будутъ направлены положительные нормали, возстановленные изъ точекъ поверхности; въ самомъ дѣлѣ, если близъ точки $M(x, y, z)$ поверхности:

$$f(x, y, z, t) = 0 \dots\dots\dots (265)$$

возьмемъ другую точку $M_1(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$, такую, чтобы направленіе $\overline{MM_1}$ составляло острый уголъ съ направленіемъ положительной нормали N (259, 259 bis), возстановленной изъ точки M , то можемъ утверждать, что произведеніе:

$$\Delta f \cdot \overline{MM_1} \cos(\overline{MM_1}, N)$$

или равный ему тричленъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z$$

болѣе нуля; знакъ же этого тричлена, при безконечной малости величинъ $\delta x, \delta y, \delta z$, опредѣляетъ собою знакъ величины:

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t);$$

тъ эта величина также болѣе нуля, а слѣдовательно точка находится внѣ поверхности съ свободной стороны ея.

Матерьяльная точка свободна, когда находится внѣ поверхности (265); тогда координаты ея удовлетворяютъ неравенству:

$$f(x, y, z, t) > 0,$$

ростъ ея можетъ имѣть какую угодно величину и какое угодно влечіе.

Если въ какой либо моментъ t матерьяльная точка находится на поверхности (265), то въ моментъ $(t + dt)$ координаты ея:

$$x + Dx = x + x' dt + x'' \frac{(dt)^2}{1.2} + \dots$$

$$y + Dy = y + y' dt + y'' \frac{(dt)^2}{1.2} + \dots$$

$$z + Dz = z + z' dt + z'' \frac{(dt)^2}{1.2} + \dots$$

ны удовлетворять, или равенству:

$$f(x + Dx, y + Dy, z + Dz, t + dt) = 0, \dots \quad (266)$$

или неравенству:

$$f(x + Dx, y + Dy, z + Dz, t + dt) > 0, \dots \quad (267)$$

и потому, осталась ли точка на поверхности, или сошла съ нея. Разложимъ первую часть равенства (266) или неравенства по восходящимъ степенямъ дифференціала dt ; принявъ во внимание уравненіе (265), получимъ:

$$+ Dx, y + Dy, z + Dz, t + dt) = \frac{df}{dt} dt + \frac{d^2 f}{dt^2} \frac{(dt)^2}{1.2} + \dots \quad (268)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' + \frac{\partial f}{\partial t} \dots \dots \dots (269)$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x} x'' + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + \frac{\partial f}{\partial z} z'' + Kf \dots \dots \dots (270)$$

$$\begin{aligned} Kf = & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x')^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (y')^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} (z')^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \\ & + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} x' y' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} x' z' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} x' + \\ & + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} y' z' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} y' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t} z' \dots \dots \dots (271) \end{aligned}$$

Послѣ этого можемъ сказать, что если матерьяльная точка въ моментъ t находится на поверхности (265), то координаты ея, скорость и ускоренія должны удовлетворять равенству

$$\frac{df}{dt} dt + \frac{d^2 f}{dt^2} \frac{(dt)^2}{1.2} + \dots = 0, \dots \dots \dots (272)$$

или неравенству:

$$\frac{df}{dt} dt + \frac{d^2 f}{dt^2} \frac{(dt)^2}{1.2} + \dots > 0, \dots \dots \dots (273)$$

смотря потому, остается ли точка къ концу безконечно-малаго промежутка времени dt на той же поверхности, или сходить съ нея.

Отсюда слѣдуетъ, что первая полная производная отъ f по t не можетъ быть отрицательною, такъ какъ знакъ ея (при положительномъ dt) опредѣляетъ знакъ всего ряда; а потому скорость матерьяльной точки, находящейся на неудерживающей поверхности (265), должна удовлетворять слѣдующему условію:

$$\frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' + \frac{\partial f}{\partial t} \geq 0, \dots \dots \dots (274)$$

то есть:

$$v \cos(v, N) \geq - \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial t} \dots \dots \dots (275)$$

Если поверхность неподвижна, то условіе (275) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$v \cos(v, N) \geq 0; \dots \dots \dots (276)$$

что скорость материальной точки, находящейся на неподдерживающей поверхности, можетъ имѣть величину и какое угодно направленіе, составляющее нормалью острый или прямой уголъ, понятно само собою.

Если поверхность движется или деформируется, то мы можемъ отнести эту поверхность въ пространство; означимъ ту точку поверхности и среды, съ которою точка совпадаетъ въ моментъ t .

Точка M всегда остается принадлежащею поверхности и удовлетворяетъ уравненію:

$$w \cos(w, N) = -\frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial t}; \dots \dots \dots (261)$$

и равенства (261) слѣдуетъ:

$$u \cos(u, N) \geq 0; \dots \dots \dots (277)$$

что скорость относительнаго движенія точки по отношенію къ поверхности должна составлять острый или прямой уголъ съ нормалью къ поверхности.

Кроме того, которому должно удовлетворять ускореніе точки, находящейся на данной поддерживающей поверхности. Изъ приведенныхъ условій, ограничивающихъ произвольности движущейся точки, существуютъ еще условія, которымъ подчиняется ускореніе ея.

Если точка остается на данной поверхности, условія эти являются:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^3 f}{dt^3} = 0, \quad \frac{d^4 f}{dt^4} = 0, \dots$$

гдѣ значеніе перваго изъ нихъ.

Онъ имѣетъ слѣдующій видъ при неподвижности по-

$$\frac{f}{x} x'' + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + \frac{\partial f}{\partial z} z'' + f_x(x', y', z') = 0, \dots \dots \dots (278)$$

гдѣ f_2 есть слѣдующая однородная функція второй степени отъ скоростей x', y', z' :

$$f_2(x', y', z') = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x')^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (y')^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} (z')^2 + \\ + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} y' z' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} z' x' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} x' y'.$$

Равенство (278) можетъ быть представлено еще такъ:

$$\Delta f \cdot \dot{v} \cos(\dot{v}, N) + f_2(x', y', z') = 0, \dots \dots \dots (279)$$

или:

$$\Delta f \cdot \frac{dv}{dt} \cos(v, N) + \Delta f \cdot \frac{v^2}{\rho} \cos(\rho, N) + f_2 = 0,$$

гдѣ ρ означаетъ величину и направленіе радіуса кривизны траекторіи, описываемой матеріальною точкою на неподвижной поверхности.

Принявъ во вниманіе, что скорость перпендикулярна въ нормали N , мы найдемъ, что рассматриваемое нами условіе можетъ быть выражено также слѣдующимъ равенствомъ:

$$\frac{1}{\rho} \cos(\rho, N) = - \frac{f_2(a_x, a_y, a_z)}{\Delta f}, \dots \dots \dots (280)$$

гдѣ a_x, a_y, a_z означаютъ косинусы угловъ, составляемыхъ направленіемъ скорости съ осями координатъ X, Y, Z^* .

Равенство (279), или равенство:

$$\dot{v} \cos(\dot{v}, N) = - \frac{v^2 f_2(a_x, a_y, a_z)}{\Delta f} \dots \dots \dots (279 \text{ bis})$$

опредѣляетъ величину проекціи ускоренія на нормаль N въ каждой точкѣ поверхности; величина эта зависитъ отъ величины и направленія скорости, такъ что *въ каждой точкѣ поверхности,*

*) Косинусы эти должны удовлетворять равенству:

$$\frac{\partial f}{\partial x} a_x + \frac{\partial f}{\partial y} a_y + \frac{\partial f}{\partial z} a_z = 0.$$

предельныхъ величинахъ v^2 , a_x , a_y , a_z , проекція ускоренія нормаль къ поверхности должна имѣть вполне определенное значеніе для того, чтобы движущаяся точка не оставалась на поверхности.

равенство (280) опредѣляетъ величину радіуса кривизны траекторіи зависимости отъ направленія скорости и отъ угла, составляющаго кривизну траекторіи съ нормалью къ поверхности. движущую поверхность:

$$f(x, y, z, t) = 0$$

иемаго вида мы представляемъ себѣ принадлежащую и движущейся неизмѣняемой средѣ.

разнимъ абсолютныя координаты x, y, z въ координатахъ ξ, η, ζ , относительно нѣкоторыхъ осей X, Y, Z , неизмѣнно-связанныхъ (лю); тогда первая часть уравненія поверхности должна выразиться нѣкоторою функциею координатъ ξ, η, ζ , являющею времени явнымъ образомъ, потому что поверхность находится въ относительномъ покоѣ по отношенію къ средѣ.

ложимъ:

$$f(x, y, z, t) = \Phi(\xi, \eta, \zeta).$$

гдѣствіе такой перемѣны координатъ, равенство:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x} x'' + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + \frac{\partial f}{\partial z} z'' + Kf = 0,$$

f выражается формулою (271)) принимаетъ видъ:

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \xi'' + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \eta'' + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \zeta'' + \Phi_1(\xi, \eta, \zeta) = 0, \dots (281)$$

чный виду равенства (278).

юда, также какъ и для неподвижной поверхности, получимъ:

$$u \cos(u, N) = - \frac{u^2 \Phi_1(a_\xi, a_\eta, a_\zeta)}{\Delta \Phi}, \dots \dots \dots (282)$$

гдѣ $\alpha_\xi, \alpha_\eta, \alpha_\zeta$ суть косинусы угловъ, составляемыхъ направлениемъ относительной скорости u съ осями Ξ, Υ, Z ; эти косинусы должны удовлетворять равенству:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \alpha_\xi + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \alpha_\eta + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \alpha_\zeta = 0.$$

Подъ Φ , и $\Delta \Phi$ мы подразумѣваемъ

$$\Delta \Phi = + \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\right)^2}, \dots \dots (283)$$

$$\Phi_2(\xi', \eta', \zeta') = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} (\xi')^2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} \xi' \eta' \dots (284)$$

Равенство (282) опредѣляетъ величину проекціи на нормаль относительнаго ускоренія движущейся точки по отношенію къ неизмѣняемой средѣ; въ каждой точкѣ поверхности, при опредѣленныхъ величинахъ $u, \alpha_\xi, \alpha_\eta, \alpha_\zeta$, проекція относительнаго ускоренія u на нормаль къ поверхности должна имѣть вполне опредѣленное значеніе для того, чтобы движущаяся точка не оставила поверхности.

Деформирующуюся поверхность:

$$f(x, y, z, t) = 0 \dots \dots \dots (285)$$

мы представляемъ себѣ принадлежащую нѣкоторой деформирующейся средѣ, такъ что во все время движенія поверхность состоитъ изъ однѣхъ и тѣхъ же точекъ этой среды.

Буквами x, y, z мы будемъ теперь обозначать координаты матерьяльной точки; координаты же точекъ среды и поверхности мы будемъ обозначать такъ, какъ въ V-й главѣ кинематической части, а именно a, b, c будутъ означать координаты какой либо точки среды въ моментъ $t = 0$, а ξ, η, ζ — координаты той же самой точки среды въ моментъ t .

Положимъ, что движеніе среды, а съ нею и поверхности, выражается слѣдующими функціями:

$$x = \mathfrak{F}_1(a, b, c, t), \quad y = \mathfrak{F}_2(a, b, c, t), \quad z = \mathfrak{F}_3(a, b, c, t) \dots (286)$$

Если въ уравненіе:

$$f(x, y, z, t) = 0 \dots \dots \dots (287)$$

x, y, z подставить функций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$, то должны будем получить f , удовлетворяющее начальными координатами всех тех точек которые находятся на рассматриваемой поверхности; говоря иначе, x, y, z из равенств (286) и (287), мы должны в уравнение начального положения поверхности:

$$f(a, b, c, 0) = 0, \dots \dots \dots (288)$$

уравнение, не заключающее времени явным образом. Уравнение (285) должно удовлетворяться тождественно функциями времени

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

иными абсолютное движение точки, движущейся по рассматриваемой поверхности; точно также уравнение (288) должно удовлетворяться тождественно функциями времени:

$$a = \varphi_1(t), \quad b = \varphi_2(t), \quad c = \varphi_3(t),$$

иными относительное движение той же точки по отношению к движущейся среде (Кинем. часть, стр. 197, строки 15—22 сверху).

И функция f будет приведена к виду (288), то условия:

$$\frac{df}{dt} = 0, \quad \frac{d^2f}{dt^2} = 0$$

следующим равенствам:

$$\frac{\partial f}{\partial a} a' + \frac{\partial f}{\partial b} b' + \frac{\partial f}{\partial c} c' = 0 \dots \dots \dots (289)$$

$$a'' + \frac{\partial f}{\partial b} b'' + \frac{\partial f}{\partial c} c'' + \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} (a')^2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} a' b' = 0; \quad (290)$$

И стороны производимы от f по a, b, c могут быть получены, рассматривая f как функцию от x, y, z и t , а x, y, z — как функций от a, b, c, t ; так что:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial a} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial a} \right)^2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial a} +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial a^2} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial a^2};$$

Вслѣдствіе этого, равенства (289) и (290) получаютъ такой видъ:

$$u \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos(u, X) + \frac{\partial f}{\partial y} \cos(u, Y) + \frac{\partial f}{\partial z} \cos(u, Z) \right) = 0$$

$$\Delta f \cdot u \cos(u, N) + u^2 f_2(c_1, c_2, c_3) = 0, \dots \dots \dots (291)$$

гдѣ u есть скорость относительнаго движенія (проекція которой на оси координатъ выражаются формулами (240) кинематической части); c_1, c_2, c_3 — косинусы угловъ, составляемыхъ направлениемъ этой скорости съ осями координатъ; \ddot{u} — ускореніе относительнаго движенія точки по отношенію къ деформирующей поверхности; проекція этого ускоренія на ось X выражается такъ:

$$\ddot{u} \cos(u, X) = \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} a'' + \frac{\partial^2 x}{\partial b^2} b'' + \frac{\partial^2 x}{\partial c^2} c'' + \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} (a')^2 + \frac{\partial^2 x}{\partial b^2} (b')^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 x}{\partial c^2} (c')^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial b \partial c} b' c' + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial c \partial a} c' a' + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial a \partial b} a' b' *). \dots (292)$$

Равенство (291) аналогично равенству (279).

*) Въ дополненіе къ сказанному въ V-й главѣ кинематической части слѣдуетъ прибавить, что ускореніе абсолютнаго движенія точки M въ какой либо моментъ t есть геометрическая сумма, составленная:

1) изъ ускоренія \dot{w} той точки измѣняемой среды, съ которою точка M въ этотъ моментъ совпадаетъ,

$$\dot{w} \cos(w, X) = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2},$$

2) изъ ускоренія \ddot{u} относительнаго движенія

и 3) изъ добавочнаго ускоренія. проекція котораго на ось X выражается такъ:

$$2 \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial a} a' + \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial b} b' + \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial c} c' \right).$$

Если среда неизмѣняемая, то добавочное ускореніе есть противоположное поворотному.

§ 36. О кривизнѣ линій, проведенныхъ по поверхности и о кривизнѣ поверхностей.

Формула (280) выражаетъ кривизну линіи, проведенной по поверхности, въ функціи слѣдующихъ величинъ: $x, y, z, a_x, a_y, a_z, \cos(\rho, N)$; первые три суть координаты той точки, въ которой опредѣляется кривизна кривой, слѣдующія три: a_x, a_y, a_z суть косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ касательною къ кривой въ этой точкѣ; послѣдняя величина есть косинусъ угла, составляемаго плоскостью кривизны кривой съ нормалью къ поверхности въ той же точкѣ.

Изъ формулы этой можно видѣть слѣдующее.

1. Различныя кривыя линіи, проведенныя по поверхности черезъ одну точку ея, имѣющія въ этой точкѣ общую касательную и общую плоскость кривизны, имѣютъ въ ней одинаковый радіусъ кривизны.

2. Различныя кривыя линіи, проведенныя по поверхности черезъ одну точку ея, и имѣющія въ этой точкѣ общую касательную, но различныя плоскости кривизны, имѣютъ въ этой точкѣ такіе радіусы кривизны, что отношеніе:

$$\frac{\cos(\rho, N)}{\rho} \dots \dots \dots (293)$$

для всѣхъ ихъ одинаково.

Означимъ черезъ \mathfrak{R} величину радіуса кривизны линіи пересѣченія поверхности плоскостью, проведенною черезъ нормаль N и черезъ общую касательную ко всѣмъ кривымъ; такая кривая называется *нормальнымъ сѣченіемъ* поверхности.

Предыдущее отношеніе (293) равняется единицѣ, дѣленной на \mathfrak{R} , если радіусъ кривизны нормальнаго сѣченія направленъ по N ; въ противномъ же случаѣ отношеніе (293) равняется минусъ единицѣ, дѣленной на \mathfrak{R} .

Слѣдовательно:

$$\rho = \mp \mathfrak{R} \cos(\rho, N),$$

то есть *радіусъ кривизны какой либо кривой, проведенной по поверхности, равенъ проекціи на плоскость ея кривизны радіуса кривизны нормальнаго сѣченія, проведеннаго черезъ касательную къ кривой.*

Для того, чтобы формулы не заключали явнымъ образомъ двойственнаго знака, условимся считать кривизну нормальнаго сѣченія отрицательною, если радіусъ кривизны его направленъ въ сторону отрицательной нормали; обозначать ее будемъ знакомъ \mathfrak{R} .

$$\mathfrak{K} = - \frac{f_z(a_x, a_y, a_z)}{\Delta f} \dots \dots \dots (294)$$

5. Формула (294) упрощается, если уравнение поверхности будет решено относительно z и представлено подъ видомъ:

$$F(x, y) - z = 0;$$

тогда будетъ:

$$\Delta f = \sqrt{p^2 + q^2 + 1}; f_z = ra_x^2 + 2sa_xa_y + ta_y^2,$$

гдѣ:

$$p = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2};$$

а потому:

$$\mathfrak{K} = - \frac{ra_x^2 + 2sa_xa_y + ta_y^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \dots \dots \dots (295)$$

6. Формула (294) упрощается тоже, если ось Z параллельна нормали N ; тогда:

$$a_z = 0, \quad a_x = \cos \varphi, \quad a_y = \sin \varphi, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

гдѣ φ есть уголъ, составляемый касательною къ кривой съ осью X^{012} ; будетъ:

$$\frac{\partial f}{\partial z} \mathfrak{K} = - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin^2 \varphi \right) \dots (296)$$

7. Формула (296) послужить намъ для сужденія о законѣ, которому слѣдуютъ кривизны нормальныхъ сѣченій, заключающихся въ различныхъ плоскостяхъ, проведенныхъ черезъ одну и ту же нормаль; для большей наглядности формулы, преобразуемъ ее слѣдующимъ образомъ.

Квадраты косинуса и синуса угла φ выразимъ въ косинусѣ двойнаго угла φ :

$$\mathfrak{K} = - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{2 \frac{\partial f}{\partial z}} - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{2 \frac{\partial f}{\partial z}} \cos 2\varphi - \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)}{\frac{\partial f}{\partial z}} \sin 2\varphi,$$

приведемъ коэффициенты у косинуса и синуса къ слѣдующему

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{2 \frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\mathfrak{D}}{2} \cos 2\varphi_0, \quad \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\mathfrak{D}}{2} \sin 2\varphi_0,$$

лучимъ слѣдующее выраженіе кривизны нормального сѣченія:

$$\mathfrak{K} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{2 \frac{\partial f}{\partial z}} - \frac{\mathfrak{D}}{2} \cos 2(\varphi - \varphi_0) \dots \dots \dots (297)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} \mathfrak{D} = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2} \dots \dots \dots (298)$$

формулы (297) хорошо видно, какъ измѣняется кривизна нормальнаго сѣченія при вращеніи сѣкущей плоскости вокругъ нормали. Наименьшую имѣетъ сѣченіе плоскостью, составляющею уголъ φ_0 съ плоскостью X ; наибольшую — сѣченіе плоскостью перпендикулярною къ первой, т. е. сѣченіе, составляющее уголъ $\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$ съ плоскостью ZX . Эти нормальные сѣченія называются *главными*, а кривизны ихъ — *главными кривизнами* по отношению къ рассматриваемой точкѣ.

Назовемъ наибольшую кривизну знакомъ \mathfrak{K}_M , наименьшую — знакомъ \mathfrak{K}_m ; изъ предыдущихъ формулъ найдемъ слѣдующія выраженія для произведенія этихъ кривизнъ:

$$\mathfrak{K}_M + \mathfrak{K}_m = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \dots \dots \dots (299)$$

$$\mathfrak{K}_M \mathfrak{K}_m = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \dots \dots \dots (300)$$

Изъ формулы (297) видно также, что сумма кривизнъ двухъ взаимноперпендикулярныхъ нормальныхъ сѣченій въ каждой точкѣ поверхности есть постоянная, независящая отъ угла φ , опредѣляющаго положеніе сѣченія. Формула (299) выражаетъ величину этой суммы.

9. Подобно тому, какъ средняя кривизна какой либо дуги измѣряется отношеніемъ нѣкотораго угла къ длинѣ дуги, аналогично этому средняя кривизна какой либо изогнутой площади измѣряется отношеніемъ нѣкотораго тѣлеснаго угла къ величинѣ площади.

Пусть S величина нѣкоторой площади, взятой на кривой поверхности и ограниченной замкнутымъ контуромъ.

Представимъ себѣ коническую поверхность, имѣющую вершиною начало координатъ, а производящими — линіи параллельныя нормалямъ къ поверхности, проведеннымъ черезъ точки контура площади S .

Представимъ себѣ, кромѣ того, сферу радіуса равнаго единицѣ, имѣющую центръ также въ началѣ координатъ.

Пусть Σ есть величина площади той части поверхности сферы, которая заключается внутри вышеозначенной конической поверхности.

Величина тѣлеснаго угла, образуемаго коническою поверхностью при ея вершинѣ, измѣряется отношеніемъ площади Σ въ единицѣ площади.

Отношеніе:

$$\frac{\Sigma}{S} \frac{1}{(\text{един. длины})^2}$$

называется *среднею кривизною* площади S .

Кривизна поверхности въ какой либо точкѣ ея A есть величина средней кривизны безконечно-малой площадки, заключающей въ себѣ (или на своемъ контурѣ) точку A .

Означимъ черезъ v_x, v_y, v_z косинусы угловъ, составляемыхъ нормалью къ поверхности съ осями координатъ; координаты точки, находящейся на поверхности вышеозначенной сферы, выразятся величинами:

$$(\text{един. длины}) v_x = \frac{(\text{един. длины}) \partial f}{\Delta f \partial x}$$

$$(\text{един. длины}) v_y = \frac{(\text{един. длины}) \partial f}{\Delta f \partial y}$$

$$(\text{един. длины}) v_z = \frac{(\text{един. длины}) \partial f}{\Delta f \partial z}.$$

Площади Σ и S выразятся слѣдующими интегралами:

$$\Sigma = (\text{един. длины})^2 \int \int \frac{dv_x dv_y}{v_z}; \quad S = \int \int \frac{dx dy}{v_z}.$$

и v_x и v_y могут быть выражены функциями отъ x и y ; по-

$$(\text{един. длины})^2 \iint \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dx dy.$$

о слѣдуетъ, что кривизна поверхности въ какой либо точкѣ ея

$$\text{кривизна поверхности} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

ь Z параллельна нормали, восстановленной изъ точки A по-
), для этой точки:

$$= 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dots$$

ивизна въ точкѣ A выразится второю частью равенства (300);
идуетъ, что во всякой точкѣ поверхности:

$$(\text{кривизна поверхности}) = \mathcal{R}_M \mathcal{R}_m \dots \dots \dots (301)$$

удно составить для сумм кривизнъ ортогональныхъ свѣченій
нымъ поверхности болѣе общія выраженія, чѣмъ тѣ, которыя
ныне (формулы (299) (300)); а именно, легко убѣдиться, что:

$$\mathcal{R}_M + \mathcal{R}_m = -\frac{\Delta_1 f}{\Delta f} + \frac{f_2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)}{(\Delta f)^2}, \dots \dots \dots (302)$$

$$\mathcal{R}_M \mathcal{R}_m = -\frac{1}{(\Delta f)^4} \begin{vmatrix} 0, & f_x, & f_y, & f_z \\ f_x, & f_{xx}, & f_{xy}, & f_{xz} \\ f_y, & f_{xy}, & f_{yy}, & f_{yz} \\ f_z, & f_{xz}, & f_{yz}, & f_{zz} \end{vmatrix}; \dots \dots (303)$$

редѣлительъ, производныя означены сокращенными знаками; въ
те (302):

$$\Delta_1 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

11. Если уравненіе поверхности будетъ рѣшено относительно z и мы пожелаемъ выразить вышесказанныя величины въ p, q, r, s, t , то получимъ:

$$\mathcal{R}_M + \mathcal{R}_m = - \frac{r(1+q^2) - 2pq s + t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \dots\dots (304)$$

$$\mathcal{R}_M \mathcal{R}_m = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2} \dots\dots\dots (305)$$

§ 37. Условіе, которому должно удовлетворять ускореніе точки, движущейся по данной неударживающей поверхности.

Когда точка сходитъ съ поверхности, тогда та изъ ряда производныхъ:

$$\frac{df}{dt}, \quad \frac{d^2f}{dt^2}, \quad \frac{d^3f}{dt^3}, \dots\dots\dots$$

которая первая не обращается въ нуль, получаетъ значеніе положительное.

Слѣдовательно, если

$$\frac{df}{dt} = 0,$$

то ускореніе точки, находящейся на данной неударживающей поверхности, должно удовлетворять условію:

$$\frac{d^2f}{dt^2} \geq 0. \dots\dots\dots (306)$$

Это условіе при неподвижной поверхности принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\dot{v} \cos(\dot{v}, N) \geq - \frac{v^2 f_2(a_x, a_y, a_z)}{\Delta f}, \dots\dots\dots (307)$$

при подвижной поверхности неизмѣняемой формы — слѣдующій:

$$\dot{u} \cos(\dot{u}, N) \geq - \frac{u^2 \Phi_2(\alpha_\xi, \alpha_\eta, \alpha_\zeta)}{\Delta \Phi}, \dots\dots\dots (308)$$

а при деформирующейся поверхности — следующий:

$$\dot{u} \cos(u, N) \geq - \frac{v^2 f_2(c_1, c_2)}{\Delta f} \dots \dots \dots (309)$$

Если же скорость точки составляет острый угол с нормалью, то есть, если

$$\frac{df}{dt} > 0,$$

то ускорение ее не подлежит никакому ограничению.

§ 38. Итак, абсолютная скорость и абсолютное ускорение материальной точки, стиснутой в своем движении поверхностью:

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

должны удовлетворять следующим условиям.

1. Если поверхность удерживает на себе точку:

$$\Delta f \cdot v \cos(v, N) = - \frac{\partial f}{\partial t} \dots \dots \dots (258)$$

$$\Delta f \cdot \dot{v} \cos(\dot{v}, N) = - Kf, \dots \dots \dots (310)$$

где Kf есть сокращенное обозначение следующего выражения:

$$v^2 f_2(a_x, a_y, a_z) + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} x' + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial z} z' \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \dots (271)$$

$$v^2 f_2(a_x, a_y, a_z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x')^2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} x' y'.$$

2. Если точка находится на поверхности неудерживающей, то абсолютная скорость должна удовлетворять условию:

$$\Delta f \cdot v \cos(v, N) \geq - \frac{\partial f}{\partial t}; \dots \dots \dots (275)$$

а) если скорость удовлетворяет равенству:

$$\Delta f \cdot v \cos(v, N) = - \frac{\partial f}{\partial t},$$

то абсолютное ускореніе точки должно удовлетворять условію:

$$\Delta f \cdot \dot{v} \cos(\dot{v}, N) \geq -Kf; \dots\dots\dots (311)$$

б) если же скорость удовлетворяет неравенству:

$$\Delta f \cdot v \cos(v, N) > -\frac{\partial f}{\partial t},$$

то абсолютное ускореніе точки не подлежит никакому ограниченію.

3. Если точка находится внѣ неудерживающей поверхности, то ни скорость, ни ускоренія ея не подлежат никакимъ ограниченіямъ.

§ 39. Реакція поверхности.

Три основныя начала (§ 14), положенныя въ основаніе механики свободной точки, составляютъ также основаніе механики несвободной матерьяльной точки.

На основаніи этихъ началъ, абсолютное ускореніе, сообщаемое несвободной матерьяльной точкѣ всѣми силами, одновременно приложенными къ ней, имѣетъ направленіе равнодѣйствующей этихъ силъ и равно величинѣ равнодѣйствующей, дѣленной на массу точки.

Въ силу тѣхъ же началъ, зная абсолютное ускореніе несвободной матерьяльной точки, мы дѣлаемъ заключеніе о величинѣ и направленіи равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ.

Изъ этого и изъ условій, приведенныхъ въ предыдущемъ параграфѣ, слѣдуетъ, что равнодѣйствующая всѣхъ силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, стѣсненной въ своихъ движеніяхъ поверхностью:

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

удовлетворяетъ слѣдующимъ условіямъ:

1. Если поверхность удерживаетъ на себѣ точку, то проеція на нормаль къ поверхности *равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, равна*

$$-m \frac{Kf}{\Delta f} \dots\dots\dots (312)$$

2. Если поверхность неудерживающая и точка находится на ней и если

срость точки перпендикулярна къ нормали, то проекція
ной равнодѣйствующей на нормаль

$$N = -m \frac{K}{\Delta f} \dots \dots \dots (313)$$

и же скорость точки составляет острый уголъ съ нор-
дѣйствующая, равнодѣйствующая не принадлежит не-
равнотенно

применяемъ неваріантность, прекращающъ всаіа движенія
ой точки, неогласно, въ снестравеніи преграды.

на такого дѣйствія преграды, должна, заключаться въ
в члмъ, приложенной къ, материальной точкѣ, по-
я только тогда, когда, время, причины движенія, дебу-
гравитационную точку, преодолѣть преграду, таа сила
времени, преграды.

и преграды развиваются до такой величины и получаютъ
явленіе, что равнодѣйствующая, собственная, неа
на въ, прочія, силы, приложенныя къ точкѣ, удовле-
гову изъ, условій (312), (313), которое, свойственно
преграды.

точка силы мы условимся называть *зидодействительными*.
и, равнодѣйствующая изъ задаваемой силы F , прило-
материальной точкѣ, находящейся на удерживающей
и:

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

нтіе R этой преграды, должна, удовлетворять, условію
оты, законъ, имманентъ, неа, снестравеніи, неа

$$F \cos(F, N) + R \cos(R, N) = -m \frac{K}{\Delta f} \dots \dots \dots (312)$$

испанн движенія, дебу, держащими къ, утому, материальную точку,
не только всѣ прочія (за исключеніемъ реакціи преграды)
сенныя къ материальной точкѣ, но также и инерція ея.

Это равенство опредѣляетъ только величину проекціи реакціи на нормаль; проекція же реакціи на касательную плоскость остается неопредѣленною, какъ по величинѣ, такъ и по направленію.

Такой результатъ получили мы, рассматривая преграду, какъ кинематическое условіе стѣсняющее свободу движенія точки нѣкоторою поверхностью, и не дѣлая никакихъ предположеній, ни относительно вида и физической природы тѣлъ, образующихъ преграду, ни относительно природы вещества матерьяльной точки; поэтому то мы получили вполнѣ опредѣленную величину для той части реакціи, которая существенно необходима для удовлетворенія условію, положенному преградой.

Вслѣдствіе этого мы вправѣ принять, что сила $R \cos (R, N)$, направленная по нормали къ поверхности, есть собственно *реакція поверхности*; составляющую же $R \sin (R, N)$, дѣйствующую въ касательной плоскости, мы отнесемъ къ числу силъ, зависящихъ отъ физическихъ свойствъ тѣлъ, образующихъ преграду; объ этой составляющей будемъ говорить ниже.

Въ силу вышесказаннаго, мы будемъ принимать, что реакція поверхности на матерьяльную точку, находящуюся на этой поверхности, направлена по нормали къ поверхности.

Реакція удерживающей поверхности можетъ быть направлена по положительной или по отрицательной нормали; въ первомъ случаѣ величина ея \mathfrak{R} , опредѣляемая по формулѣ:

$$\mathfrak{R} = -m \frac{Kf}{\Delta f} - F \cos (F, N), \dots \dots \dots (312)$$

выразится числомъ положительнымъ, во второмъ — отрицательнымъ; сообразно съ этимъ, мы будемъ называть реакцію, направленную по положительной нормали — *положительною*, а направленную по отрицательной нормали — *отрицательною*.

Если движеніе матерьяльной точки по данной удерживающей поверхности будетъ извѣстно, то формула (312) дастъ намъ величину реакціи во всякій моментъ движенія.

§ 40. Дифференціальныя уравненія движенія материальной точки по данной удерживающей поверхности дѣйствіи заданныхъ силъ.

Пусть

$$f(x, y, z, t) = 0$$

уравненіе поверхности, m — масса материальной точки, X, Y , проекціи на оси координатъ равнодѣйствующей приложенныхъ ей задаваемыхъ силъ.

Проекціи реакціи на оси координатъ будутъ:

$$\frac{\Re}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\Re}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\Re}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Въ силу основныхъ началъ (§ 14), дифференціальныя уравненія движенія этой точки (въ прямолинейныхъ прямоугольных дѣйствіяхъ) будутъ слѣдующія:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned} \right\}, \dots\dots\dots (314)$$

$$\lambda = \frac{\Re}{\Delta f}, \dots\dots\dots (315)$$

$$\Delta f = + \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

Въ координаты x, y, z связаны уравненіемъ поверхности:

$$f(x, y, z, t) = 0 \dots\dots\dots (316)$$

Для опредѣленія движенія точки можно поступить слѣдующимъ образомъ: исключить λ изъ уравненій (314), вслѣдствіе получатся два дифференціальныя уравненія, не заключающія λ ; уравненія интегрировать, принимая во вниманіе, что x, y, z связаны уравненіемъ (316).

Для опредѣленія же λ имѣемъ формулу:

$$\lambda = - \frac{(mKf + X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z})}{(\Delta f)^2}, \dots (317)$$

или же можно опредѣлять λ изъ котораго либо изъ уравненій (314).

§ 41. Законъ живой силы для точки, движущейся по поверхности.

Изъ дифференціальныхъ уравненій (314) можно составить уравненіе:

$$\frac{d\left(\frac{m}{2} v^2\right)}{dt} = Xx' + Yy' + Zz' + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' \right),$$

если поступить такъ, какъ во второй половинѣ параграфа 21-го.

Это уравненіе получитъ видъ уравненія (111) того же параграфа, если поверхность неподвижна, потому что тогда при всякомъ положеніи точки имѣетъ мѣсто слѣдующее равенство:

$$\frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' = 0.$$

Разсуждая затѣмъ такъ же, какъ въ § 26, мы придемъ къ слѣдующему заключенію:

Если матеріальная точка находится на неподвижной поверхности неизмѣняемаго вида и если приложенныя къ ней задаваемыя силы имѣютъ потенциалъ, то движеніе точки подчиняется закону живой силы, выражаемому интеграломъ:

$$\frac{mv^2}{2} - U = h \dots (150)$$

§ 42. Геодезическая линія.

Положимъ, что данная поверхность неподвижна и что приложенныя къ матеріальной точкѣ задаваемыя силы взаимно уравновѣшиваются во все время движенія ея, тогда единственная

а, приложенная въ точкѣ, будетъ реакція поверхности, величина и знакъ которой опредѣляется по формулѣ:

$$\mathfrak{R} = \lambda \Delta f = -m \frac{v^2 f_z(a_x, a_y, a_z)}{\Delta f}, \dots \dots \dots (318)$$

(см. формулу 294):

$$\mathfrak{R} = mv^2 \mathfrak{K},$$

гдѣ \mathfrak{K} есть величина кривизны нормальнаго сѣченія, проведеннаго черезъ направление скорости точки.

Дифференціальныя уравненія (314) получаютъ, въ этихъ случаяхъ, слѣдующій общій видъ:

$$mx'' = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad my'' = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad mz'' = \lambda \frac{\partial f}{\partial z}; \dots \dots \dots (319)$$

Интегралъ, выражающій законъ живой силы, будетъ:

$$\frac{mv^2}{2} = h,$$

$$v^2 = v_0^2;$$

что означаетъ, что *скорость материальной точки сохраняетъ постоянную величину.*

Такъ какъ скорость постоянна, то проекція ускоренія на касательную къ траекторіи равна нулю, а потому проекціи ускоренія на оси координатъ могутъ быть выражены слѣдующимъ образомъ:

$$x'' = v_0^2 \frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{v_0^2}{\rho} \cos(\rho X)$$

$$y'' = v_0^2 \frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{v_0^2}{\rho} \cos(\rho Y)$$

$$z'' = v_0^2 \frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{v_0^2}{\rho} \cos(\rho Z).$$

Подставляя эти выраженія въ дифференціальныя уравненія (319), найдемъ, что они получаютъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\lambda}{mv_0^2} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{\lambda}{mv_0^2} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{\lambda}{mv_0^2} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (320)$$

изъ нихъ слѣдуетъ:

$$\frac{\cos(\rho, X)}{\cos(N, X)} = \frac{\cos(\rho, Y)}{\cos(N, Y)} = \frac{\cos(\rho, Z)}{\cos(N, Z)}$$

то есть, что *радіусъ кривизны траекторіи направленъ по нормали къ поверхности, а, слѣдовательно, плоскость кривизны ея проходитъ черезъ нормаль.*

Кривая линія, проведенная по поверхности такимъ образомъ, чтобы плоскость кривизны во всякой точкѣ ея заключала въ себѣ нормаль къ поверхности, возстановленную въ той же точкѣ, называется *геодезическою линіею.*

Слѣдовательно, если къ матеріальной точкѣ, удерживаемой неподвижною поверхностью, не приложено никакихъ задаваемыхъ силъ, то точка, или находится въ покое, или движется съ постоянною скоростью, описывая *геодезическую линію*; эта линія проходитъ черезъ начальное положеніе точки и касается къ направленію начальной скорости.

Такимъ образомъ, каждая задача этого рода сводится на задачу о проведеніи по данной поверхности геодезической линіи черезъ данную точку и по данному направленію, проведенному изъ этой точки.

При рѣшеніи какъ этихъ, такъ и многихъ другихъ задачъ о движеніи точки по поверхности, выборъ системы координатъ, наиболее подходящей къ вопросу, играетъ весьма существенную роль, такъ какъ очень часто, при удачномъ выборѣ координатъ, формулы не только упрощаются, но и получаютъ большую наглядность.

Конечно, слѣдуетъ отдавать предпочтеніе такой системѣ координатъ, при которой заданная поверхность есть одна изъ координатныхъ поверхностей; напимѣръ, при движеніи точки по цилиндрической поверхности съ круговымъ свѣченіемъ, перпендикулярнымъ къ оси, слѣдуетъ отдать предпочтеніе кругово-цилиндрической системѣ координатъ, ось которой совпадаетъ съ осью данной поверхности; движе-

точки по поверхности шара или по поверхности прямого конуса удобнее разсматривать въ сферическихъ координатахъ. примѣръ 25. Опредѣлимъ движеніе матеріальной точки по боковой поверхности прямого круговаго конуса, предполагая, что къ ней не при- никакихъ задаваемыхъ силъ.

Возьмемъ вершину и ось конуса за полюсъ и за полярную ось сферической системы координатъ; пусть φ_0 есть уголъ между производящими и оснической поверхности.

Нормаль къ поверхности будетъ служить координатная ось β ; реакція будетъ направлена вдоль по β или по ея продолженію.

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$\begin{aligned} r'' - r \sin^2 \varphi_0 \cdot (\psi')^2 &= 0, \\ - r \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \cdot (\psi')^2 &= \frac{\mathfrak{R}}{m}, \\ \frac{1}{r \sin \varphi_0} \frac{d(r^2 \sin^2 \varphi_0 \cdot \psi')}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Проекціи ускоренія на координатныя оси сферическихъ координатъ:

гл. 255, формулы (208) кинематической части).

Решеніе изъ этихъ уравненій дастъ интегралъ:

$$r^2 \psi' = C_1 = r_0^2 \frac{v_0 \cos(\varphi_0 \Gamma)}{\sin \varphi_0},$$

служить для опредѣленія величины и знака реакціи:

$$\mathfrak{R} = - \frac{m C_1^2}{r^3} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0.$$

Тѣ же мы не воспользуемся теперь вовсе, такъ какъ уже имѣемъ этотъ интегралъ:

$$v^2 = (r')^2 + r^2 \sin^2 \varphi_0 (\psi')^2 = v_0^2.$$

Изъ этихъ первыхъ интеграловъ, слѣдуя обычному приему, получимъ еще уравненіе траекторіи:

$$r \cos(\psi \sin \varphi_0 + \Gamma_1) = \frac{C_1 \sin \varphi_0}{v_0}, \dots \dots \dots (321)$$

— произвольная постоянная.

Если коническая поверхность будет развернута на плоскость, положеніе точекъ на которой будетъ выражено въ полярныхъ координатахъ:

$$\rho = r, \quad \theta = \psi \sin \varphi_0,$$

то геодезическая кривая (321) обратится въ прямую линію:

$$\rho \cos (\theta + \Gamma_1) = \frac{C_1 \sin \varphi_0}{v_0}.$$

Величина завитія *) геодезической линіи въ какой либо точкѣ ея можетъ быть выражена произведеніемъ изъ полуразности главныхъ кривизнъ поверхности въ этой точкѣ и синуса удвоеннаго угла, составляемаго плоскостью кривизны геодезической линіи съ плоскостью одного изъ главныхъ нормальныхъ сѣченій; для вывода этой формулы, возьмемъ общее выраженіе завитія какой либо кривой, приведенное на стр. 260 кинематической части, (формулы (311) и (312)), и примѣнимъ его къ геодезической линіи, для которой:

$$\rho \frac{d^2x}{ds^2} = \cos (N, X); \quad \rho \frac{d^2y}{ds^2} = \cos (N, Y); \quad \rho \frac{d^2z}{ds^2} = \cos (N, Z).$$

Положимъ, что плоскость XU параллельна касательной плоскости къ поверхности въ той точкѣ, къ которой относится нашъ выводъ; тогда, въ этой точкѣ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \cos (\rho, X) = 0, \quad \cos (\rho, Y) = 0,$$

$$\frac{dx_b}{ds} = 0, \quad \frac{dy_b}{ds} = 0;$$

(последніа два равенства слѣдуютъ изъ формулъ (313), стр. 261 кинематической части).

*) См. стр. 259 кинематической части.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{dx}{ds} \frac{d \cos(N, Y)}{ds} - \frac{dy}{ds} \frac{d \cos(N, X)}{ds} = \\
 &= \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)}{\frac{\partial f}{\partial z}} \cos 2\varphi;
 \end{aligned}$$

величины \mathfrak{D} и φ_0 , входящія въ формулы параграфа 36-го, получаемъ:

$$\frac{1}{\mathfrak{I}} = -\frac{\mathfrak{D}}{2} \sin 2(\varphi - \varphi_0); \dots \dots \dots (322)$$

геодезической кривой, плоскость кривизмы которой составляетъ $\varphi - \varphi_0$) съ плоскостью нормальнаго сѣченія наименьшей етси:

$$-\frac{\mathfrak{K}_M - \mathfrak{K}_m}{2} \sin 2(\varphi - \varphi_0) \dots \dots \dots (322 \text{ bis})$$

Геодезическая кривизна кривой линіи, проведенной на поверхности.

Если на поверхности проведена какая либо кривая линія, плоскость кривизмы въ точкѣ M составляетъ съ нормалью N , восстановленною изъ этой точки, вѣкторный уголъ; пусть MT есть направленіе линіи, проведенной къ кривой черезъ ту же точку M . Черезъ ту же точку M , геодезическую линію, касательную и къ данной кривой въ точкѣ M .

Въ кривизмѣ отложимъ отъ точки M равныя дуги безразмѣрны ds ; пусть MM_1 есть дуга данной кривой, а MM'_1 — дуга геодезической.

Въ M_1 проведемъ касательную къ данной кривой, а черезъ касательную къ геодезической линіи; уголъ $d\eta$, заключающійся между этими касательными, называется *геодезическимъ угломъ* MM_1 .

Въ точкѣ M_1 къ точкѣ M , величина отношенія геодезической къ длинѣ дуги MM_1 , приближается къ предѣлу, называемому *геодезическою кривизною* кривой въ точкѣ M_1 :

$$\text{геодезическая кривизна} = \frac{d\eta}{ds}.$$

Представимъ себѣ, что изъ какой либо точки O проведены три н
 правленія: OT — параллельно касательной MT , OT_1 — параллельно кас
 тельной къ данной кривой въ точкѣ M_1 , и OT' — параллельно кас
 тельной къ геодезической линіи въ точкѣ M' ; кромѣ того, представимъ
 себѣ сферу радіуса равнаго единицѣ, имѣющую центръ въ точкѣ O ; на
 поверхности этой сферы образуется сферическій треугольникъ съ бези
 нечно-малыми сторонами:

$$TT_1 = d\epsilon = \frac{ds}{\rho}; \quad TT' = d\epsilon_1 = \frac{ds}{\mathfrak{R}} = \frac{ds}{\rho} \cos(\rho N)$$

$$T_1T' = d\eta.$$

Изъ известной формулы сферической тригонометріи:

$$\cos(T, T') = \cos(TT_1) \cos(TT') + \sin(TT_1) \sin(TT') \cos(T_1T'),$$

пренебрегая безконечно-малыми величинами порядка выше 2-го, пол
 чимъ.

$$1 - \frac{(d\eta)^2}{2} = 1 - \frac{(d\epsilon)^2}{2} - \frac{(d\epsilon_1)^2}{2} + d\epsilon d\epsilon_1 \cos(T_1T');$$

а отсюда:

$$\left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\epsilon}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\epsilon_1}{ds}\right)^2 - 2 \frac{d\epsilon}{ds} \frac{d\epsilon_1}{ds} \cos(\rho N),$$

такъ какъ уголъ (T_1T') обращается, въ предѣлѣ, въ уголъ между по
 سطностями кривизны обѣихъ кривыхъ.

Далѣе, какъ легко видѣть, получимъ:

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{\sin(\rho N)}{\rho}; \dots\dots\dots (32)$$

это значитъ, что геодезическая кривизна кривой равняется кривизнѣ
 помноженной на синусъ угла, составляемаго плоскостью кривизны крив
 съ нормалью къ поверхности.

Длина:

$$\vartheta = \frac{ds}{d\eta}$$

называется радіусомъ геодезической кривизны кривой въ точкѣ M ; слѣ
 вательно:

$$\frac{\sin(\rho N)}{\rho} = \frac{1}{\vartheta} \dots\dots\dots (32')$$

замѣтимъ, что между тремя радіусами кривизны: ρ , \mathfrak{R} , \mathfrak{s} ющая зависимость:

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\mathfrak{R}^2} + \frac{1}{\mathfrak{s}^2} \dots \dots \dots (325)$$

ГЛАВА ПЯТАЯ. ВОПРОСЫ О ДВИЖЕНІИ ПО ДАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ МАТЕРЬЯЛЬНОЙ ТОЧКИ, ПОДЪ ДАННЫМИ СИЛАМИ.

а. На боковой поверхности прямого круговаго конуса материальная точка, притягиваемая къ оси конуса силою, пропорціоною отъ нея; опредѣлить движеніе точки.

а. Сферическими координатами также, какъ и въ примѣрѣ

точки до полярной оси выразится произведеніемъ изъ r ; очевидно, что потенціалъ данной притягивающей силы

$$= m \frac{\mu^2}{2} r^2 \sin^2 \varphi_0,$$

линейный коэффициентъ.

линейной силы:

$$(\dot{\varphi})^2 + r^2 \sin^2 \varphi_0 (\dot{\psi})^2 = 2h - \mu^2 r^2 \sin^2 \varphi_0 \dots \dots \dots (326)$$

получается, такой же, какъ въ примѣрѣ 25-мъ, получается изъ уравненія, выражающаго, что проекція ускоренія на ось β ; этотъ интегралъ:

$$r^2 \sin^2 \varphi_0 \cdot \psi' = C_1 \dots \dots \dots (327)$$

проекція силы на ось β равна отрицательно-взятой величинѣ на $\cos \varphi_0$, то реакція по положительной оси β вые формулою:

$$\mathfrak{N} = -mr \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 ((\dot{\psi})^2 - \mu^2),$$

или функциею отъ r :

$$\mathfrak{N} = -m \cos \varphi_0 \left(\frac{C_1^2}{(r \sin \varphi_0)^3} - \mu^2 r \sin \varphi_0 \right) \dots \dots \dots (328)$$

Изъ интеграловъ (326) и (327), при помощи обычнаго приѣма, получимъ уравненіе траекторіи и опредѣлимъ движеніе точки по ней.

Слѣдуетъ замѣтить, что, если развернуть боковую поверхность конуса на плоскость, то точка на поверхности конуса, имѣющая сферическія координаты r, ψ , изобразится на плоскости точкою, имѣющею полярныя координаты $r, \varphi = \psi \sin \varphi_0$; для того же, чтобы всякая неразрывная линія, находящаяся на поверхности конуса, изобразилась неразрывною же линіею на плоскости, необходимо представить себѣ, что боковая поверхность конуса состоитъ изъ безчисленнаго множества бесконечно-тонкихъ слоевъ, составляющихъ цѣлую поверхность, наведенную на боковую поверхность конуса безчисленное число разъ.

Введя φ въ интегралы (326) и (327), приведемъ ихъ къ слѣдующему виду:

$$(r')^2 + r^2(\theta')^2 = 2h - (\mu \sin \varphi_0)^2 r^2, \dots \dots \dots (329)$$

$$r^2 \theta' = \frac{C_1}{\sin \varphi_0}; \dots \dots \dots (330)$$

а это суть первые интегралы движенія на плоскости матерьяльной точки, подверженной притяженію:

$$(\mu \sin \varphi_0)^2 \cdot r = \mu^2 (r \sin \varphi_0) \sin \varphi_0$$

къ началу координатъ *).

Отсюда видно, что рѣшеніе данной задачи сводится на рѣшеніе другой задачи о движеніи матерьяльной точки той же массы на плоскости подъ вліяніемъ силы, направленной по радіусу вектору и равной проеціи заданной силы на производящую конической поверхности.

Эту вторую точку мы назовемъ изображеніемъ данной. При рѣшеніи задачи о движеніи этого изображенія на плоскости, надо имѣть въ виду, что начальное положеніе его имѣетъ слѣдующія координаты: r_0 и $(\psi_0 \sin \varphi_0)$, гдѣ r_0 и ψ_0 суть начальныя координаты данной точки; кромѣ того, данная точка и ея изображеніе имѣютъ начальныя скорости одинаковой величины и составляющія одинаковые углы съ производящею.

Рѣшивъ задачу о движеніи изображенія на плоскости, можемъ перейти къ рѣшенію данной задачи, представивъ себѣ, что плоскость, съ движущимся по ней изображеніемъ, снова наведена на поверхность конуса;

*) Эта сила есть проеція заданной силы на производящую конуса.

тогда изображение будет совершать на поверхности конуса то самое движение, которое совершает данная точка.

Въ настоящемъ случаѣ изображение движется на плоскости по эллипсу, имѣющему центръ въ началѣ координатъ.

Примѣчаніе. Такимъ же образомъ могутъ быть рѣшены и многіе другіе вопросы о движеніи матеріальной точки по развертываемой на плоскость линейчатой поверхности подѣ вліяніемъ задавннѣ силы, направленной вдоль по той производящей, на которой точка находится. Каждая такая задача сводится на задачу о движеніи изображеніи точки по поверхности, развернутой на плоскость, и при дѣйствіи той же силы, направленной по той прямой линіи, которою производящая изобразится.

Предлагаемъ читателю рѣшить, напримѣръ, вопросъ о движеніи по данной конической поверхности матеріальной точки, притягиваемой къ вершинѣ поверхности силою, обратно пропорціональною квадрату разстоянія отъ нея.

Примѣръ 27-й. Движеніе тяжелой матеріальной точки по поверхности неподвижной сферы.

Возьмемъ полюсъ сферическихъ координатъ въ центрѣ сферы, помарнуемъ ось направимъ параллельно направленію силы тяжести.

Такъ какъ сила тяжести имѣетъ потенциалъ mgz , поверхность же неподвижна, то движеніе точки удовлетворяетъ закону живой силы:

$$v^2 = 2h + 2gz, \dots\dots\dots (331)$$

или:

$$v^2 = 2gz + v_0^2 - 2gz_0 \dots\dots\dots (332)$$

Проекція силы тяжести на координатную ось z равна нулю; поэтому:

$$R^2 \sin^2 \varphi \cdot \frac{d\psi}{dt} = C = Rv_0 \sin \varphi_0 \cos(v_0\gamma); \dots\dots\dots (333)$$

(332) и (333) суть первые интегралы движенія.

Реакція, направленная по координатной оси x или противоположно ей, выразится формулою:

$$\frac{\mathfrak{R}}{m} = -g \cos \varphi - \frac{v^2}{R} = -\frac{(gz + v^2)}{R} \dots\dots\dots (334)$$

Далѣе, для опредѣленія движенія точки, произведемъ слѣдующія дѣйствія:

Исключимъ ψ' изъ интеграла (331):

$$R^2(\varphi')^2 + R^2 \sin^2 \varphi (\psi')^2 = 2h + 2gz$$

и изъ интеграла (333): получимъ:

$$(R \sin \varphi \cdot \varphi')^2 = \frac{2g}{R^2} U, \dots \dots \dots (335)$$

гдѣ U есть слѣдующій многочленъ третьей степени отъ z :

$$U = \left(\frac{h}{g} + z\right)(R^2 - z^2) - \frac{C^2}{2g}, \dots \dots \dots (336)$$

а координата z равняется $R \cos \varphi$.

Изъ дифференціального уравненія (335) видно, что координата z движущейся точки не можетъ сдѣлать многочленъ U отрицательнымъ, такъ какъ это противорѣчило бы знаку первой части этого уравненія.

Отсюда слѣдуетъ, что движущаяся точка не можетъ пройти ни черезъ нижнюю, ни черезъ верхнюю точку сферы, потому что въ нихъ $z^2 = R^2$ и многочленъ (336) получаетъ отрицательное значеніе.

При $z = z_0$ многочленъ получаетъ положительное значеніе, а именно:

$$U_0 = \frac{v_0^2}{2g} R^2 \sin^2 \varphi_0 \sin^2 (v_0 \gamma).$$

Изъ этого видно, что U должно имѣть одинъ дѣйствительный корень гдѣ либо между $z = -R$ и $z = z_0$ и одинъ дѣйствительный корень гдѣ либо между z_0 и $z = +R$; первый корень означимъ черезъ z_1 или $R \cos \alpha$, второй — чрезъ z_2 или $R \cos \beta$.

Многочленъ U получаетъ положительныя значенія для всякихъ z , заключающихся между предѣлами z_1 и z_2 , а потому траекторія движенія расположена между параллельными кругами: нижнимъ $\varphi_1 = \beta$ и верхнимъ $\varphi_2 = \alpha$ *).

Третій корень z_3 многочлена U имѣетъ величину отрицательную, меньшую ($-R$); это видно изъ того, что при $z = -\infty$ многочленъ обращается въ $+\infty$, а при $z = -R$ получаетъ отрицательное значеніе.

Изъ двухъ параллельныхъ круговъ, служащихъ предѣлами траекторіи,

*) При $\cos (v_0 \gamma) = 1$ можетъ быть три случая:

1) $z_0 = z_1$, 2) $z_0 = z_2$, 3) $z_1 = z_2 = z_0$.

ний может находиться на верхней или на нижней полусфере (т.-е. s может быть положительным или отрицательным), нижний же параллельный круг ни в каком случае не может быть на верхней полусфере, сейчас докажем.

Между коэффициентами многочлена U и корнями уравнения $U=0$ существует зависимость, выражаемая тремя равенствами:

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 + s_3 &= -\frac{h}{g} \\ s_1 s_2 + (s_1 + s_2) s_3 &= -R^2 \\ s_1 s_2 s_3 &= \frac{h}{g} R^2 - \frac{C^2}{2g}. \end{aligned}$$

Из второго получим:

$$s_3 = -\frac{s_1 s_2 + R^2}{s_1 + s_2} \dots \dots \dots (337)$$

Почти же из всех трех, как s_3 , так и $\frac{h}{g}$, найдем следующее равенство:

$$\begin{aligned} -\frac{(s_1 s_2 + R^2)^2}{s_1 + s_2} + (s_1 + s_2) R^2 &= -\frac{C^2}{2g}, \\ \frac{(R^2 - s_1^2)(R^2 - s_2^2)}{s_1 + s_2} &= \frac{R^4 \sin^2 \beta \sin^2 \alpha}{s_1 + s_2} = \frac{C^2}{2g} \dots \dots (338) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что сумма $(s_1 + s_2)$ должна быть непременно величиною положительною; а так как и разность $(s_1 - s_2)$ больше нуля, то s_1 не может быть величиною отрицательною.

Так как s , находящееся в уравнении (335), должно быть не больше не меньше s_3 , то выразим его следующими образом:

$$s = s_1 \cos^2 \eta + s_2 \sin^2 \eta = s_1 - (s_1 - s_2) \sin^2 \eta; \dots (339)$$

а будут:

$$\begin{aligned} s - s_1 &= -(s_1 - s_2) \sin^2 \eta, \quad s - s_2 = (s_1 - s_2) \cos^2 \eta, \\ s - s_3 &= \frac{R^2 + 2s_1 s_2 + s_1^2}{s_1 + s_2} (1 - k^2 \sin^2 \eta), \\ -R \sin \varphi d\varphi &= ds = -2(s_1 - s_2) \sin \eta \cos \eta d\eta, \dots (340) \end{aligned}$$

гдѣ:

$$k^2 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{R^2 + 2x_1x_2 + x_1^2}; \dots\dots\dots (341)$$

поэтому дифференціальное уравненіе (335) получить такой видъ:

$$\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{R} \left(\frac{R^2 + 2x_1x_2 + x_1^2}{2R(x_1 + x_2)}\right) (1 - k^2 \sin^2 \eta),$$

откуда:

$$\frac{d\eta}{dt} = \pm \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta} \sqrt{\frac{g}{R} \cdot \frac{(R^2 + 2x_1x_2 + x_1^2)}{2R(x_1 + x_2)}} \dots (342)$$

Разность $(1 - k^2 \sin^2 \eta)$ не можетъ обратиться въ нуль ни при какомъ дѣйствительномъ η , потому что, какъ сейчасъ покажемъ, k^2 менѣе единицы, если только корни x_1 и x_2 не равны.

Въ самомъ дѣлѣ, составивъ выраженіе для $(1 - k^2)$:

$$1 - k^2 = \frac{R^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{R^2 + 2x_1x_2 + x_1^2} = \frac{R^2 - x_1^2 + (x_1 + x_2)^2}{R^2 - x_2^2 + (x_1 + x_2)^2}$$

и принимая во вниманіе, что x_1^2 болѣе x_2^2 , мы заключимъ, что k^2 менѣе единицы.

Такъ какъ вторая часть уравненія (342) не можетъ обратиться въ нуль, то производная η' не можетъ измѣнить своего знака ни разу во все время движенія; такъ что знакъ начального значенія ея η'_0 опредѣляетъ знакъ корня второй части уравненія (342).

Начальное значеніе производной η' выражается формулою:

$$\eta'_0 = \frac{-x'_0}{2(x_1 - x_2) \sin \eta_0 \cos \eta_0},$$

а начальная величина x_0 опредѣляетъ величину квадрата синуса η_0 :

$$\sin^2 \eta_0 = \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_2}; \dots\dots\dots (343)$$

знаки же величинъ $\sin \eta_0$ и $\cos \eta_0$ предыдущими формулами не опредѣляются и могутъ быть выбраны по нашему произволу; если мы условимся, что:

$$\left. \begin{aligned} 0 > \eta_0 > -\frac{\pi}{2} \text{ при } x'_0 > 0, \\ 0 < \eta_0 < \frac{\pi}{2} \text{ при } x'_0 < 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (344)$$

то η_0 будет во всякомъ случаѣ болѣе нуля, а потому корни второй части уравненія (342) должны будемъ приписать знакъ положительный.

Слѣдовательно, при соблюденіи условій (344), уголъ η будетъ непрерывно возрастать вмѣстѣ съ временемъ по закону, выражаемому формулою:

$$t = \sqrt{\frac{R}{g} \cdot \frac{2B(s_1 + s_2)}{R^2 + 2s_1s_2 + s_1^2}} (F(\eta, k) - F(\eta_0, k)), \dots (345)$$

гдѣ $F(\eta, k)$ означаетъ слѣдующій интегралъ:

$$F(\eta, k) = \int_0^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}}, \dots (346)$$

$F(\eta, k)$ — такой же интегралъ, имѣющій η_0 верхнимъ предѣломъ.

Интегралъ $F(\eta, k)$, называемый эллиптическимъ интеграломъ перваго рода, выражаетъ некоторую трансцендентную функцію отъ η ; намъ должно ознакомиться съ некоторыми свойствами этого интеграла.

1) Во первыхъ, очевидно:

$$F(-\eta, k) = -F(\eta, k) \dots (347)$$

2) Во вторыхъ, замѣнивъ, подъ интеграломъ (346), η черезъ $(\zeta - \pi)$ получимъ слѣдующее равенство:

$$\int_0^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}} = \int_\pi^{\eta + \pi} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta}},$$

или:

$$F(\eta, k) = \int_0^{\eta + \pi} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta}} - \int_0^\pi \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta}},$$

то есть:

$$F(\eta, k) = F(\eta + \pi, k) - F(\pi, k)$$

$$F(\eta + \pi, k) = F(\eta, k) + F(\pi, k) \dots (348)$$

3) Положивъ въ последней формулѣ η равнымъ $(-\frac{\pi}{2})$ и принявъ во вниманіе, что на основаніи формулы (347):



$$F\left(-\frac{\pi}{2}, k\right) = -F\left(\frac{\pi}{2}, k\right),$$

получимъ:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \frac{1}{2} F'(\pi, k) \dots \dots \dots (349)$$

4) Далѣе, изъ формулъ (348) и (349) найдемъ:

$$F\left(\frac{3\pi}{2}, k\right) = 3F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$$

и такъ далѣе; такъ что, если n есть цѣлое число, то:

$$F\left(\frac{n\pi}{2}, k\right) = nF\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \dots \dots \dots (350)$$

5) Пусть $\eta = n\pi + \lambda\pi$, гдѣ n есть цѣлое число, а λ — дробь, меньшая единицы; примѣняя n разъ формулу (348), найдемъ:

$$F(\eta, k) = F(\lambda\pi, k) + nF(\pi, k) \dots \dots \dots (351)$$

6) Наконецъ, положимъ въ формулѣ (348) $\eta = -\lambda\pi$, гдѣ λ — дробь, меньшая половины:

$$F(\pi - \lambda\pi, k) = F(-\lambda\pi, k) + F(\pi, k);$$

отсюда, на основаніи равенствъ (347) и (349), получимъ:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - F(\lambda\pi, k) = F(\pi - \lambda\pi, k) - F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \dots \dots (352)$$

Званіе этихъ свойствъ интеграла (346) позволяетъ намъ вывести слѣдующія заключенія изъ равенствъ (346) и (389).

Назовемъ черезъ τ тотъ моментъ времени, въ который, при отрицательномъ η_0 , уголъ η обращается въ нуль; при положительномъ η_0 моментъ τ будетъ отрицательнымъ.

Проекція скорости движущейся точки на ось β будетъ обращаться въ нуль каждый разъ, какъ она приходитъ на одну изъ крайнихъ параллелей; это будетъ въ слѣдующіе моменты:

$$t = \tau, \tau + \frac{T}{2}, \tau + T, \tau + \frac{3}{2}T, \tau + 2T, \tau + \frac{5}{2}T, \dots$$

гдѣ:

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{R}{g} \cdot \frac{2R(s_1 + s_2)}{R^2 + 2s_1s_2 + s_1^2}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right);$$

въ эти моменты уголъ φ получаетъ слѣдующія значенія:

$$\varphi = \beta, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \alpha, \dots$$

такъ что переходъ точки отъ нижняго круга къ верхнему совершается всегда въ теченіи промежутка времени $\frac{T}{2}$ и такое же время требуется для обратнаго движенія.

Пусть η_1 есть нѣкоторый уголъ, меньшій $\frac{\pi}{2}$, которому соответствуетъ уголъ φ_1 , опредѣленный по формулѣ:

$$\cos \varphi_1 = \cos \beta - (\cos \beta - \cos \alpha) \sin^2 \eta_1; \dots, \quad (353)$$

наконецъ, пусть t_1 есть соответствующій моментъ времени. (Этотъ моментъ заключается въ промежуткѣ между моментами τ и $\tau + \frac{T}{2}$).

Въ дальнѣйшемъ своемъ движеніи материальная точка поднимется до параллели α , гдѣ будетъ въ моментъ $(\tau + \frac{T}{2})$, затѣмъ начнетъ опускаться и снова придетъ на параллель φ_1 въ тотъ моментъ t_2 , въ который η возрастетъ до величины $\eta_2 = (\pi - \eta_1)$, такъ какъ тогда будетъ: $\sin \eta_2 = \sin \eta_1$; на основаніи свойства (352) интеграла F мы заключимъ, что:

$$\left(\tau + \frac{T}{2}\right) - t_1 = t_2 - \left(\tau + \frac{T}{2}\right),$$

то есть, что поднятіе точки отъ параллели φ_1 до параллели α и обратное нисхожденіе ея отъ α до φ_1 , совершаются въ теченіи равныхъ промежутковъ времени.

Затѣмъ точка, коснувшись нижней параллели $\varphi = \beta$, снова начнетъ подниматься и снова достигнетъ параллели φ_1 въ такой моментъ t_3 , въ который η возрастетъ до величины $\eta_3 = \pi + \eta_1$, потому что тогда тоже $\sin \eta_3 = \sin \eta_1$; изъ равенства (348) заключимъ, что:

$$t_3 - t_1 = T.$$

Чтобы опредѣлить законъ измененія угла φ , возьмемъ дифференціальное уравненіе (333) и подставимъ въ него вмѣсто C его выраженіе (338); получимъ:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \frac{R^2 \sqrt{2g} \sin \beta \sin \alpha}{(R^2 - s^2) \sqrt{s_1 + s_2}}, \dots \quad (354)$$

гдѣ верхній знакъ соответствуетъ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ $\cos(v_0\gamma)$ больше нуля, нижній — тѣмъ, въ которыхъ этотъ косинусъ меньше нуля.

Исключивъ dt изъ (342) и (354), будемъ имѣть слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$d\psi = \pm \frac{R^2 \sin \beta \sin \alpha}{\sqrt{R^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1^2}} \left(\frac{2R d\eta}{(R^2 - \varepsilon^2) \Delta \eta} \right) \dots \dots (355)$$

гдѣ, для краткости, принято временно обозначеніе:

$$\Delta \eta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta};$$

(этотъ знакъ не слѣдуетъ смѣшивать съ такимъ же знакомъ, служившимъ намъ для обозначенія величины, встрѣчавшейся въ предыдущихъ параграфахъ).

Въ полученномъ дифференціальномъ уравненіи (355) произведемъ слѣдующее разложеніе:

$$\frac{2R}{R^2 - \varepsilon^2} = \frac{1}{R + \varepsilon} + \frac{1}{R - \varepsilon}, \dots \dots \dots (355 \text{ bis})$$

затѣмъ выразимъ ε въ η по формулѣ (339) и наконецъ произведемъ интегрированіе въ предѣлахъ отъ $\eta=0$ до η ; получимъ:

$$\begin{aligned} \psi - \Psi = & \pm \frac{R^2 \sin \beta \sin \alpha}{\sqrt{R^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1^2}} \left[\frac{1}{(R + \varepsilon_1)} \int_0^\eta \frac{d\eta}{(1 + n_1 \sin^2 \eta) \Delta \eta} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{(R - \varepsilon_1)} \int_0^\eta \frac{d\eta}{(1 + n_2 \sin^2 \eta) \Delta \eta} \right], \dots \dots \dots (356) \end{aligned}$$

гдѣ:

$$n_1 = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R + \varepsilon_1}, \quad n_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R - \varepsilon_1},$$

а Ψ есть координата той меридіональной плоскости, въ которой движущаяся точка заключается въ моментъ τ .

Входящіе въ это выраженіе интегралы, называемые эллиптическими интегралами третьяго рода, обладаютъ, подобно интегралу F , свойствами, выражаемыми формулами:

$$L(-\eta) = -L(\eta); \quad L(\eta + \pi) = L(\eta) + L(\pi), \quad L(\pi) = 2L\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

гдѣ L означаетъ такой интегралъ третьяго рода.

На основаніи этихъ свойствъ, можемъ вывести изъ предыдущихъ уравненій слѣдующее заключеніе относительно закона измѣненія угла ψ .

Во время каждаго перехода точки отъ одной изъ крайнихъ параллелей до другой, уголъ ψ возрастаетъ на одну и ту же величину ω , выражаемую определеннымъ интеграломъ:

$$\omega = \pm \frac{R^2 \sin \beta \sin \alpha}{\sqrt{R^2 + 2s_1 s_2 + s_1^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2R d\eta}{(R^2 - s^2) \Delta \eta} \dots \dots (357)$$

Можно показывать, что абсолютная величина угла ω болѣе прямого угла.

Для того, чтобы доказать это, мы примемъ во вниманіе, что:

$$\frac{2R}{R^2 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{1}{\Delta \eta} > \frac{2R}{R^2 \sin^2 \varphi},$$

такъ какъ $\Delta \eta$ менѣе единицы; поэтому:

$$+ \sqrt{\omega^2} > \frac{R^2 \sin \beta \sin \alpha}{\sqrt{R^2 + 2s_1 s_2 + s_1^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2R d\eta}{R^2 - s^2};$$

примѣнивъ, къ подынтегральной функціи этого интеграла, разложеніе (355 bis) и выразивъ s функціею отъ η по формулѣ (339), мы легко опредѣлимъ величину каждаго изъ получившихся интеграловъ и найдемъ слѣдующее:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2R d\eta}{R^2 - s^2} = \frac{\pi}{R} \frac{\cos \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right)}{\sin \alpha \cos \beta},$$

тому:

$$+ \sqrt{\omega^2} > \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2R^2 + 2s_1 s_2 + 2R^2 \sin \alpha \sin \beta}{2R^2 + 2s_1 s_2 - R^2 \sin^2 \beta}},$$

этотъ корень, очевидно, болѣе единицы, такъ какъ $(+2 \sin \alpha)$ болѣе, чѣмъ $(- \sin \beta)$, а потому и подавно абсолютная величина угла ω болѣе, чѣмъ $\frac{\pi}{2}$.

На чертежѣ 19-мъ представлена проекція на горизонтальную плоскость траекторіи, описываемой точкою въ одномъ изъ такихъ движеній; наружный и внутренний круги суть проекціи предѣльныхъ параллелей; углы a_1Ob_1 , b_1Oa_2 , a_2Ob_2 , . . . равны ω .

Реакція \mathfrak{R} по координатной оси α (т.-е. по продолженію радіуса вектора) выразится функциею одного z , если v^2 , заключающееся въ формулѣ (334), будетъ исключено изъ нея при помощи выраженія (331); тогда получимъ:

$$\mathfrak{R} = -m \frac{(3gz + 2h)}{R} \dots \dots \dots (358)$$

Обратимъ вниманіе на слѣдующіе случаи движенія точки.

Если корни z_1 и z_2 , равны другъ другу, то многочленъ U можетъ быть представленъ подѣ слѣдующимъ видомъ:

$$U = -(z - z_1)^2 \frac{(R^2 - z^2 + (z + z_1)^2)}{2z_1},$$

а такъ какъ z_1 болѣе нуля, то при всякихъ z , относящихся къ точкамъ поверхности сферы, многочленъ U получаетъ отрицательныя значенія; исключеніе составляютъ лишь точки параллельнаго круга $z = z_1$, для которыхъ U обращается въ нуль.

Такъ какъ изъ уравненія (335) слѣдуетъ, что тогда (при $z = z_1$) производная φ' равна нулю, то точка будетъ двигаться по параллельному кругу и уголъ φ будетъ постоянно равенъ своей начальной величинѣ $\varphi_0 (z_1 = R \cos \varphi_0)$.

Изъ выраженія (338) слѣдуетъ тогда:

$$C^2 = gR^3 \frac{\sin^4 \varphi_0}{\cos \varphi_0},$$

съ другой же стороны, такъ какъ начальная скорость должна быть касательною къ кругу параллели $\varphi = \varphi_0$, изъ выраженія (333) получимъ

$$C^2 = v_0^2 R^2 \sin^2 \varphi_0;$$

изъ сравненія этихъ выраженій найдемъ, что квадратъ начальной скорости долженъ имѣть слѣдующую величину:

$$v_0^2 = gR \frac{\sin^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0};$$

эта скорость остается постоянною во все время движенія.

Движеніе по углу ψ опредѣлится изъ уравненія:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{C}{R^2 \sin^3 \varphi_0} = \sqrt{\frac{g}{R \cos \varphi_0}};$$

слѣдовательно, движеніе равномернo и продолжительность одного полнаго оборота по окружности равна:

$$2\pi \sqrt{\frac{R \cos \varphi_0}{g}} \dots \dots \dots (359)$$

§ 15. Реакція неудерживающей поверхности. Мѣсто схода движущейся точки съ такой поверхностью.

Реакція удерживающей поверхности можетъ быть направлена какъ по положительной, такъ и по отрицательной нормали.

Реакція направлена по положительной нормали тогда, когда:

$$F \cos (F, N) + m \frac{Kf}{\Delta f} < 0; \dots \dots \dots (360)$$

она есть противодѣйствіе сходу точки съ поверхности по отрицательную сторону ея; а точка сошла бы въ эту сторону, если бы приняла ускореніе, сообщаемое ей силою F , такъ какъ это ускореніе удовлетворяло бы слѣдующему неравенству:

$$\Delta f \cdot \dot{v} \cos (\dot{v}, N) + Kf < 0,$$

то есть:

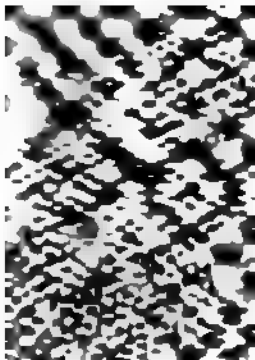
$$\frac{d^2 f}{dt^2} < 0.$$

Реакція направлена по отрицательной нормали тогда, когда:

$$F \cos (F, N) + m \frac{Kf}{\Delta f} > 0; \dots \dots \dots (361)$$

она есть противодѣйствіе сходу точки съ поверхности по положительную сторону ея; точка сошла бы въ эту сторону, если бы приняла ускореніе, сообщаемое ей силою F , такъ какъ это ускореніе удовлетворяло бы неравенству:

$$\Delta f \cdot \dot{v} \cos (\dot{v}, N) + Kf > 0,$$



то есть:

$$\frac{d^2f}{dt^2} > 0,$$

Неудерживающая поверхность не оказывает никакого противодействия причинамъ, побуждающимъ точку сойти съ поверхности по положительную сторону ея; а потому, если скорость точки, находящейся на поверхности, удовлетворяетъ равенству (258) (§ 38), а заставляемыя силы — неравенству (361), то реакція будетъ равна нулю.

Слѣдовательно, *неудерживающая поверхность не оказываетъ реакціи, направленной по отрицательной нормали; реакція ея можетъ быть направлена только по положительной нормали.*

Если скорость точки удовлетворяетъ равенству (258), а заставляемыя силы — неравенству (360), то неудерживающая поверхность оказываетъ реакцію по положительной нормали, противодействуя точкѣ сойти внутрь непроницаемаго тѣла (дѣйствительнаго или воображаемаго), ограниченаго этою поверхностью; величина реакціи, выражаемая формулою:

$$\mathfrak{R} = -F \cos(F, N) - m \frac{Kf}{\Delta f}, \dots \dots \dots (312)$$

такова, что ускореніе точки, сообщаемое ей равнодѣйствующею силы F и реакціи \mathfrak{R} , удовлетворяетъ равенству:

$$\frac{d^2f}{dt^2} = 0.$$

Точка движется по неудерживающей поверхности до тѣхъ поръ, пока заставляемыя силы удовлетворяютъ неравенству (360); въ той точкѣ A поверхности, въ которой скорость точки и заставляемыя силы удовлетворятъ равенству:

$$F \cos(F, N) + m \frac{Kf}{\Delta f} = 0,$$

реакція обращается въ нуль.

Если, при дальнѣйшемъ движеніи точки по поверхности, сумма

$$F \cos (F, N) + m \frac{Kf}{\Delta f}$$

становится положительною, то движеніе точки по поверхности возможно только при существованіи реакціи, направленной по отрицательной нормали; но такой реакціи удерживающая поверхность оказать не можетъ, а потому точка должна сойти съ поверхности.

Она сходитъ съ поверхности въ точкѣ *A* и движется далѣе свободно внѣ поверхности подѣ вліяніемъ приложенныхъ къ ней заданныхъ силъ; начальною скоростью на этомъ свободномъ движеніи матеріальной точки служить та скорость, съ которою она пришла въ точку *A*.

Такое движеніе продолжается до встрѣчи точки съ поверхностью.

Положимъ, что сфера, по которой движется тяжелая матеріальная точка (примѣръ 27-й), не удерживаетъ точку отъ перемѣщеній внутрь ея полости; по условію, сдѣланному въ началѣ параграфа 34-го, положительная нормаль въ этомъ случаѣ должна быть направлена къ центру сферы, то есть противоположно направленію положительной координатной оси *z*; въ примѣръ 27-мъ мы получили выраженіе (334) для реакціи по этой оси, поэтому реакція \mathfrak{N}_N по положительной нормали къ сферѣ:

$$R^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

выразится слѣдующею формулою:

$$\mathfrak{N}_N = \frac{m}{R} (v^2 + gz) \dots \dots \dots (362)$$

Изъ этой формулы видно, что движущаяся точка можетъ сойти съ поверхности сферы только въ тѣхъ точкахъ ея, въ которыхъ сумма $(v^2 + gz)$ обращается въ нуль, и послѣ того становится отрицательною.

Поэтому, если $z_2 > 0$, такъ что все движеніе точки совершается по нижней полусферѣ, то точка не оставитъ сферы.

Если же $z_2 < 0$ и притомъ сумма $(v_2^2 + gz_2)$ тоже менѣ нуля, то движущаяся точка должна будетъ оставить поверхность, еще не дойдя до этой верхней параллели.

§ 46. Треніе матеріальної точки о поверхність.

При движеніи одного тѣла по другому, будетъ ли это скольженіе или катаніе, является сопротивленіе движенію, называемое треніемъ.

Свѣдѣнія наши о законахъ тренія почерпнуты изъ наблюденій.

Разсматривая матеріальную точку, находящуюся на данной поверхности, какъ неизмѣримо-малое тѣло, а поверхность — какъ поверхность реального тѣла, и пригѣняя къ нимъ законы тренія, найденныя изъ наблюденій, можемъ высказать эти законы въ слѣдующемъ видѣ.

1) Треніе есть сопротивленіе движенію матеріальной точки по поверхности, приложенное къ точкѣ и направленное противоположно относительной скорости точки по отношенію къ поверхности.

2) Треніе можетъ дѣйствовать и на точку, покоящуюся на поверхности, если проекція на касательную плоскость равнодѣйствующей всѣхъ прочихъ задаваемыхъ силъ не равна нулю; тогда треніе противоположно этой проекціи.

3) Величина тренія, приложеннаго къ движущейся точкѣ, пропорціональна абсолютной величинѣ нормальной реакціи

$$\mathcal{M} = kV\overline{N^2} = k\Delta f \cdot V\overline{\lambda^2}, \dots \dots \dots (363)$$

гдѣ квадратные корни предполагаются положительными.

Коэффициентъ k есть отвлеченное число, величина котораго зависитъ отъ физической природы трущихся тѣлъ.

4) Величина тренія, приложеннаго къ матеріальной точкѣ, находящейся въ относительномъ покоѣ по отношенію къ данной поверхности, выражается тою же формулою (363), но численный коэффициентъ можетъ принимать всякія величины, отъ нуля до нѣкотораго числа k_1 , большаго k ; такъ что треніе между взаимно-покоющимися тѣлами можетъ достигать болѣе величинъ, чѣмъ треніе между тѣми же тѣлами, находящимися въ относительномъ движеніи.

Предположивъ существованіе тренія, опредѣляемаго этими введенными изъ опыта законами, можемъ составить слѣдующія диффе-

ренціальныя уравненія (365) движенія матеріальной точки, находящейся на неподвижной поверхности, выражаемой уравненіемъ:

$$f(x, y, z) = 0, \dots \dots \dots (364)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} - k \sqrt{\lambda^2} \cdot \frac{\Delta f}{v} \frac{dx}{dt} \dots \dots \dots (365, a)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - k \sqrt{\lambda^2} \cdot \frac{\Delta f}{v} \frac{dy}{dt} \dots \dots \dots (365, b)$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - k \sqrt{\lambda^2} \cdot \frac{\Delta f}{v} \frac{dz}{dt}, \dots \dots \dots (365, c)$$

гдѣ X, Y, Z суть проэкціи на оси координатъ равнодѣйствующей изъ приложенныхъ къ матеріальной точкѣ задаваемыхъ силъ.

Нормальная реакція выразится здѣсь тою же самою формулою (317) *), какъ и для точки, неподверженной тренію; чтобы получить эту формулу изъ дифференціальныя уравненій, помножимъ каждое на ту частную производную отъ f , которая заключается во второмъ членѣ второй части этого уравненія, по сложеніи, воспользуемся равенствами:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0$$

и (279); тогда получимъ:

$$- m f_2(x', y', z') = X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda (\Delta f)^2,$$

откуда слѣдуетъ такое выраженіе для реакціи по положительной нормали (въ случаѣ поверхности неподвижной):

$$\mathfrak{R} = \lambda \Delta f = - \frac{X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} + m f_2(x', y', z')}{\Delta f} \dots \dots (366)$$

Если поверхность находится въ движеніи, или деформируется,

*) Примѣненномъ къ неподвижной поверхности.

то трение будетъ противоположно относительной скорости материальной точки по отношенію къ той средѣ, которой принадлежитъ поверхность; поэтому тогда въ дифференціальньхъ уравненіяхъ (365), вѣсто отношеній:

$$\frac{x'}{v}, \frac{y'}{v}, \frac{z'}{v},$$

должны входить косинусы угловъ, составляемыхъ направлениемъ относительной скорости съ неподвижными осями координатъ.

Примѣръ 28. По наклонной неподвижной плоскости движется тяжелая материальная точка; опредѣлить движеніе, принимая въ расчетъ трение между точкою и плоскостью.

Пусть J есть уголъ наклоненія плоскости къ горизонту; расположимъ оси X^{000} и Y^{000} въ наклонной плоскости, ось X^{000} — горизонтально, положительную ось Y^{000} по линіи наибольшаго ската внизъ, положительную ось Z^{000} направимъ перпендикулярно къ наклонной плоскости и притомъ вверхъ.

Здѣсь:

$$X=0, \quad Y=mg \sin J, \quad Z=-mg \cos J,$$

а уравненіе поверхности есть: $z=0$; поэтому формула (366) дастъ слѣдующую величину для реакціи по положительной оси Z^{000} :

$$\mathcal{R}=\lambda=mg \cos J.$$

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ слѣдующія:

$$x''=-\frac{kg \cos J}{v} x', \quad y''=g \sin J-\frac{kg \cos J}{v} y';$$

они тождественны съ дифференціальными уравненіями движенія свободной тяжелой материальной точки въ вертикальной плоскости, если ускореніе силы тяжести равно $g \sin J$ и если движеніе происходитъ въ средѣ, оказывающей сопротивленіе постоянной величины $mk g \cos J$. Рѣшеніе такой задачи приведено на страницахъ 143—144 этой книги; примѣняя это рѣшеніе къ нашему примѣру, надо замѣнить: g — черезъ $g \sin J$, а k — черезъ $k \cot g J$.

§ 47. Дифференціальныя уравненія, получающіяся чрезъ проекирование силъ и ускоренія на направленіе скорости, на нормаль къ поверхности и на бинормаль нормальнаго сѣченія.

Въ нѣкоторыхъ вопросахъ о движеніи точки по неподвижной поверхности оказывается полезною слѣдующая форма дифференціальныхъ уравненій:

$$m \frac{dv}{dt} = F \cos (F, v) - k \sqrt{\mathfrak{N}^2} \dots \dots \dots (367, a)$$

$$\pm m \frac{v^2}{\rho} = F \cos (F, B) \dots \dots \dots (367, b)$$

$$mv^2 \mathfrak{K} = F \cos (F, N) + \mathfrak{R}; \dots \dots \dots (367, c)$$

гдѣ N означаетъ направленіе положительной нормали, \mathfrak{N} — реакцію по этой нормали, B — направленіе, перпендикулярное къ v и N , и имѣющее то же самое положеніе по отношенію къ направленіямъ v и N , какое имѣетъ положительная ось Y^{000} по отношенію къ положительнымъ осямъ X^{000} (v) и Z^{000} (N); \mathfrak{K} есть кривизна нормальнаго сѣченія, проведеннаго черезъ направленіе скорости v ; отношеніе $(1:g)$ есть геодезическая кривизна траекторіи.

Дифференціальныя уравненія (367) получаютъ изъ равенствъ, выражающихъ, что проеція ускоренія движущейся точки на каждое изъ направленій v , B , N равняется, дѣленной на массу точки, проеціи на то же направленіе равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ; изъ числа этихъ силъ, реакція направлена по N (или противоположно), а треніе — противоположно скорости. Въ самомъ дѣлѣ, проеціи ускоренія на эти направленія выразятся такъ:

$$\dot{v} \cos (\dot{v}, v) = \frac{dv}{dt}, \quad \dot{v} \cos (\dot{v}, B) = \frac{v^2}{\rho} \cos (\rho, B)$$

$$\dot{v} \cos (\dot{v}, N) = \frac{v^2}{\rho} \cos (\rho, N),$$

гдѣ ρ означаетъ величину и направленіе радіуса кривизны траекторіи.

Но намъ извѣстно, что:

$$\frac{\cos (\rho, N)}{\rho} = \mathfrak{K} \dots \dots \dots (294 \text{ bis})$$

(см. § 36 формулы (293) и (294)).

Далѣе, $\cos(\rho, B) = \pm \sin(\rho, N)$; гдѣ верхній знакъ долженъ быть въ тѣхъ случаяхъ, когда направленіе ρ составляетъ съ направленіемъ B острый уголъ; намъ же извѣстно (§ 43), что:

$$\frac{\sin(\rho, N)}{\rho} = \frac{1}{g}, \dots \dots \dots (324)$$

а потому:

$$\dot{v} \cos(\dot{v}, B) = \pm \frac{v^2}{g}; \quad \dot{v} \cos(\dot{v}, N) = v^2 \mathfrak{R}.$$

Примѣчаніе: Исключивъ величину ρ изъ равенствъ (294 bis) и (324), получимъ слѣдующее выраженіе геодезической кривизны:

$$\frac{1}{g} = \mathfrak{R} \operatorname{tg}(\rho, N), \dots \dots \dots (368)$$

поэтому дифференціальное уравненіе (367, b) можно писать и такъ:

$$\pm mv^2 \mathfrak{R} \operatorname{tg}(\rho, N) = F \cos(F, B) \dots \dots (367, b, \text{bis})$$

Этими уравненіями воспользуемся въ слѣдующемъ примѣрѣ.

Примѣръ 29. Движеніе матеріальной точки по какой либо неподвижной поверхности, предполагая, что, за исключеніемъ нормальной реакціи и тренія, никакихъ другихъ силъ не приложено къ точкѣ.

Въ этомъ случаѣ $F=0$, а потому изъ уравненія (367, b, bis) будетъ слѣдовать:

$$\operatorname{tg}(\rho, N) = 0,$$

то есть, что плоскость кривизны траекторіи проходитъ черезъ нормаль; значить траекторія есть геодезическая линія.

Уравненіе (367, c) получить слѣдующій видъ:

$$\mathfrak{R} = mv^2 \mathfrak{R} = \pm \frac{mv^2}{g},$$

а поэтому уравненіе (367, a) приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{dv}{dt} = -k \frac{v^2}{\mathfrak{R}}, \dots \dots \dots (369)$$

гдѣ \mathfrak{R} есть величина радіуса кривизны нормального сѣченія.

Если v разсматривать, какъ функцію отъ s , то уравненіе (369) представится такъ:

$$\frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{ds} = -2k \frac{v^2}{2\mathfrak{R}};$$

въ такомъ видѣ оно можетъ быть интегрируемо по s ; получимъ:

$$v^2 = v_0^2 e^{f(s)}; \quad f(s) = -2k \int_{s_0}^s \frac{ds}{R} \dots \dots \dots (370)$$

Изъ этого выраженія видно, что скорость точки непрерывно уменьшается, приближаясь къ нулю ассимптотически; уменьшеніе это тѣмъ быстрѣе, чѣмъ болѣе коэффициентъ тренія и чѣмъ болѣе кривизна геодезической линіи.

§ 48. При изложеніи механики отдѣльной несвободной точки, приходится принимать въ расчетъ силовое дѣйствіе преграды на эту точку, состоящее изъ нормальной реакціи и тренія, приложенныхъ къ точкѣ; при этомъ мы задаемъ себѣ движеніе, или кинематическое состояніе поверхности, образующей преграду, не принимая во вниманіе того, что матеріальная точка оказываетъ, въ свою очередь, нѣкоторое силовое дѣйствіе на тѣло, образующія преграду.

Если, по характеру вопроса, окажется необходимымъ принять въ расчетъ это дѣйствіе, то мы встрѣтимся съ однимъ изъ вопросовъ, относящихся къ механикѣ системы точекъ, потому что намъ придется тогда разсматривать преграду не какъ кинематическое условіе, но какъ систему движущихся матеріальныхъ тѣлъ, или, по крайней мѣрѣ, какъ систему матеріальныхъ точекъ. Отсюда слѣдуетъ, что только при изложеніи механики системы точекъ представится настоятельная необходимость установить понятіе о силовомъ дѣйствіи матеріальной точки на преграду; но мы сдѣлаемъ это теперь.

На время предположимъ, что матеріальная точка m есть тѣло неизмѣримо-малыхъ размѣровъ.

При дѣйствіи преграды на точку m , одно изъ тѣлъ, образующихъ преграду, находится въ непосредственномъ прикосновеніи съ точкою m ; наприимѣръ, если преграда образуется поверхностью непроницаемаго тѣла, то матеріальная точка m , когда она несвободна, находится въ непосредственномъ прикосновеніи съ этимъ тѣломъ, или, если матеріальная точка находится на одномъ концѣ твердаго стержня, а другой конецъ его находится въ неподвижной

точкѣ, вокругъ которой стержень можетъ вращаться, то матерьяльная точка находится въ непосредственномъ прикосновеніи съ концомъ стержня. То тѣло преграды, которое находится въ непосредственномъ прикосновеніи съ несвободною матерьяльною точкою, назовемъ тѣломъ B .

Пусть M есть та точка преграждающей поверхности, въ которой матерьяльная точка m къ ней прикасается; эта точка M принадлежитъ тѣлу B .

Относительно силового дѣйствія точки m на преграду, въ аналитической механикѣ дѣлается предположеніе, что это дѣйствіе есть сила, приложенная къ точкѣ M тѣла B и направленная противоположно дѣйствію преграды на точку m .

Такимъ образомъ, взаимнодѣйствія между преградою и точкою m рассматриваются, какъ противоположныя взаимнодѣйствія между точкою m и точкою M тѣла B ; въ силу основнаго начала C (стр. 19) они суть силы равныя *).

Опредѣляя же матерьяльную точку, какъ массу, сосредоточенную въ геометрической подвижной точкѣ, мы должны будемъ придать слѣдующую форму опредѣленію понятія о силовомъ дѣйствіи точки m на преграду.

§ 49. Дѣйствіе матерьяльной точки на преграду. Давленіе точки на поверхность.

Опредѣленіе. Дѣйствіе матерьяльной точки m на преграду есть сила, приложенная къ той точкѣ M преграждающей поверхности, съ которою m совпадаетъ; предполагается, что точка M

*) Съ точки зрѣнія молекулярной физики, взаимнодѣйствіе между двумя тѣлами A и B (черт. 20), являющееся при ихъ прикосновеніи, есть результатъ молекулярныхъ взаимнодѣйствій между каждою такою частицею a тѣла A и каждою такою частицею b тѣла B , разстояніе между которыми не болѣе радіуса дѣйствія частичныхъ силъ. Вслѣдствіе крайней малости этого радіуса, взаимнодѣйствіе между тѣлами, прикасающимися въ одной точкѣ K , приводится къ взаимнодѣйствію между весьма малыми частями α и β этихъ тѣлъ. Кромѣ того, такъ какъ молекулярныя силы взаимнодѣйствія между каждою парюю частицъ предполагаются равными и прямо противоположными, то и взаимнодѣйствія между α и β оказываются равными и прямо противоположными.

ЕСТЬ ВИДѢТЬ СЪ ТѢМЪ ОДНА ИЗЪ ТОЧЕКЪ ОДНОГО ИЗЪ ТѢЛЪ, ОБРАЗУЮЩИХЪ ПРЕГРАДУ.

Сила, приложенная къ точкѣ M , состоитъ: изъ давленія точки m на поверхность, равнаго и противоположнаго реакціи по нормали, и изъ силы тренія, равной и противоположной силѣ тренія, приложенной къ точкѣ m .

Реакція неудерживающей поверхности можетъ быть направлена только по положительной нормали (§ 45), поэтому давленіе матерьяльной точки на такую поверхность можетъ быть направлено только по отрицательной нормали.

Полная величина силы дѣйствія матерьяльной точки на поверхность равна:

$$D = \sqrt{N^2 + x^2 N^2} = N\sqrt{1 + x^2}; \dots\dots\dots (371)$$

направленіе ея составляетъ съ нормалью уголъ, тангенсъ котораго равенъ x . Величина x равняется коэффициенту тренія k , если точка движется по поверхности; если же точка покоится на поверхности, то x можетъ получать величины, заключающіяся въ предѣлахъ отъ нуля до k_1 (§ 46).

§ 50. Дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки, свобода движенія которой ограничена двумя пересѣкающимися поверхностями.

Если обѣ поверхности — удерживающія, то матерьяльная точка можетъ имѣть движеніе только по линіи пересѣченія поверхностей, а, слѣдовательно, скорость точки будетъ направлена по касательной къ этой кривой линіи.

Пусть:

$$f_1(x, y, z, t) = 0 \dots\dots\dots (372)$$

$$f_2(x, y, z, t) = 0 \dots\dots\dots (373)$$

суть уравненія поверхностей; положимъ, что нѣтъ тренія между матерьяльною точкою и поверхностями и что X, Y, Z суть проэкціи

на оси координатъ равнодѣйствующей изъ задаваемыхъ силъ, приложенныхъ въ точкѣ.

Кромѣ задаваемыхъ силъ, къ матеріальной точкѣ приложены еще нормальныя реакціи обѣихъ поверхностей.

Проекціи на оси координатъ реакціи первой поверхности суть:

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}, \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y}, \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z};$$

проекціи реакціи второй поверхности равны:

$$\lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}.$$

Въ силу основныхъ началъ (§ 14), дифференціальныя уравненія движенія этой матеріальной точки будутъ слѣдующія:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (374)$$

Для опредѣленія движенія точки можно поступить слѣдующимъ образомъ: исключить λ_1 и λ_2 изъ уравненій (374), вслѣдствіе чего получится одно дифференціальное уравненіе, не заключающее этихъ множителей; полученное уравненіе надо интегрировать, принимая во вниманіе, что x , y , z и t связаны уравненіями (372) и (373). Постоянныя произвольныя опредѣлятся по начальному положенію точки и по начальной скорости ея.

Для опредѣленія величинъ реакцій поверхностей, составимъ, изъ дифференціальныхъ уравненій (374), слѣдующія два уравненія:

$$\begin{aligned} \lambda_1 (\Delta f_1)^2 + \lambda_2 \Delta f_1 \Delta f_2 \cos(N_1, N_2) &= m \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} x'' + \frac{\partial f_1}{\partial y} y'' + \frac{\partial f_1}{\partial z} z'' \right) - \\ &- \left(X \frac{\partial f_1}{\partial x} + Y \frac{\partial f_1}{\partial y} + Z \frac{\partial f_1}{\partial z} \right), \dots (375) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \Delta f_1 \cdot \Delta f_2 \cos(N_1, N_2) + \lambda_2 (\Delta f_2)^2 &= m \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} x'' + \frac{\partial f_2}{\partial y} y'' + \frac{\partial f_2}{\partial z} z'' \right) - \\ &- \left(X \frac{\partial f_2}{\partial x} + Y \frac{\partial f_2}{\partial y} + Z \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \dots \dots (376) \end{aligned}$$

Видъ вторыхъ частей этихъ уравненій показываетъ, какими образомъ они получились изъ уравненій (374); N_1 и N_2 означаютъ направленія положительныхъ нормалей къ поверхностямъ (372) и (373).

Члены, заключающіе ускореніе, могутъ быть исключены изъ уравненій (375) и (376), если принять во вниманіе, что ускореніе точки должно удовлетворять условіямъ:

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 f_2}{dt^2} = 0,$$

то есть равенствамъ:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} x'' + \frac{\partial f_1}{\partial y} y'' + \frac{\partial f_1}{\partial z} z'' + Kf_1 = 0. \dots\dots\dots (377)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} x'' + \frac{\partial f_2}{\partial y} y'' + \frac{\partial f_2}{\partial z} z'' + Kf_2 = 0; \dots\dots\dots (378)$$

вслѣдствіе этого, уравненія (375) и (376) получаютъ такой видъ:

$$\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 \cos(N_1, N_2) = - \frac{(mKf_1 + X \frac{\partial f_1}{\partial x} + Y \frac{\partial f_1}{\partial y} + Z \frac{\partial f_1}{\partial z})}{\Delta f_1}. \quad (379, a)$$

$$\mathfrak{R}_1 \cos(N_1, N_2) + \mathfrak{R}_2 = - \frac{(mKf_2 + X \frac{\partial f_2}{\partial x} + Y \frac{\partial f_2}{\partial y} + Z \frac{\partial f_2}{\partial z})}{\Delta f_2}. \quad (379, b)$$

гдѣ:

$$\mathfrak{R}_1 = \lambda_1 \Delta f_1, \quad \mathfrak{R}_2 = \lambda_2 \Delta f_2.$$

Если первая поверхность есть неудерживающая, то матерьяльная точка не оставляетъ ее, пока реакція \mathfrak{R}_1 имѣетъ величину положительную (т.-е. направлена по положительной нормали N_1); въ той точкѣ кривой линіи, въ которой реакція \mathfrak{R}_1 обращается въ нуль, а при дальнѣйшемъ движеніи по кривой должна была бы стать отрицательною, въ такой точкѣ кривой линіи матерьяльная точка оставляетъ эту поверхность и кривую линію, не сходя со второй поверхности; и дальнѣйшемъ движеніи матерьяльной точки, λ_1 равно нулю.

Если обѣ поверхности неудерживающія, то матерьяльная точка можетъ оставить и ту и другую.

§ 51. Законъ живой силы для матерьяльной точки, движущейся по кривой линіи.

Изъ дифференціальныхъ уравненій (374) составимъ уравненіе:

$$\frac{d\left(\frac{m}{2}v^2\right)}{dt} = Xx' + Yy' + Zz' + \lambda_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}x' + \frac{\partial f_1}{\partial y}y' + \frac{\partial f_1}{\partial z}z'\right) + \lambda_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}x' + \frac{\partial f_2}{\partial y}y' + \frac{\partial f_2}{\partial z}z'\right).$$

Если кривая неподвижна, то есть, если уравненія (372) и (373) не заключаютъ времени явнымъ образомъ, то тогда условія:

$$\frac{df_1}{dt} = 0 \quad \frac{df_2}{dt} = 0$$

выразятся такъ:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}x' + \frac{\partial f_1}{\partial y}y' + \frac{\partial f_1}{\partial z}z' = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}x' + \frac{\partial f_2}{\partial y}y' + \frac{\partial f_2}{\partial z}z' = 0,$$

и тогда первое уравненіе настоящаго параграфа получить видъ уравненія (111) параграфа 21-го.

Разсуждая далѣе такъ же, какъ въ § 26, придемъ къ слѣдующему заключенію:

Если матерьяльная точка находится на неподвижной кривой линіи неизмѣняемаго вида и если приложенныя къ ней задаваемыя силы имѣютъ потенциалъ, то движеніе точки подчиняется закону живой силы.

§ 52. Реакція неподвижной кривой линіи, удерживающей матерьяльную точку на себѣ. Давленіе точки на кривую.

Когда удерживающая кривая неподвижна, тогда то самое дифференціальное уравненіе, которое получается по исключеніи множителей λ_1 и λ_2 изъ уравненій (374), составитъ прямо, если выразимъ, что произведеніе изъ массы точки и проекціи

ускоренія на направление скорости равняется проекціи на то же направление равнодѣйствующей изъ задаваемыхъ силъ; получимъ:

$$m \frac{dv}{dt} = F \cos (F, \varphi) * \dots \dots \dots (380, a)$$

Выраженія (379, а, b) тоже могутъ быть составлены прямо; они выражаютъ проекціи на направленія нормалей N_1 и N_2 равнодѣйствующей изъ реакцій R_1 и R_2 ; означимъ черезъ \mathfrak{P} величину и направленіе этой равнодѣйствующей.

Составимъ равенство, выражающее, что сумма проекцій всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, на направленіе радіуса кривизны кривой равняется проекціи ускоренія на то же направленіе, помноженной на массу точекъ:

$$m \frac{v^2}{\rho} = F \cos (F, \rho) + \mathfrak{P} \cos (\mathfrak{P}, \rho) \dots \dots \dots (380, b)$$

Кромѣ того, сумма проекцій тѣхъ же силъ на направленіе бинормали равна нулю, такъ какъ бинормаль или вторая главная нормаль перпендикулярна къ плоскости кривизны кривой, а ускореніе движущейся точки заключается въ плоскости кривизны.

$$0 = F \cos (F, b) + \mathfrak{P} \cos (\mathfrak{P}, b); \dots \dots \dots (380, c)$$

направленіе бинормали b предполагается здѣсь проведеннымъ въ ту сторону, въ которую была бы направлена положительная ось Z''' , если бы положительная ось X''' имѣла направленіе скорости, а положительная ось Y''' направленіе главной нормали (черт. 21).

Такъ какъ \mathfrak{P} заключается въ нормальной плоскости къ кривой, то какъ величина, такъ и направленіе ея вполне опредѣляются изъ равенствъ (380, b, c).

Черезъ одну и ту же кривую линію можно провести безчисленное множество поверхностей и эта кривая можетъ быть разсматриваема, какъ линія пересѣченія которыхъ либо двухъ изъ нихъ.

*) Предоставляемъ читателю убѣдиться, что дифференціальное уравненіе 380, а' есть то самое, которое, въ случаѣ неподвижности кривой, получается изъ дифференціального уравненія (374) послѣ исключенія множителей λ_1 и λ_2 .

Если объ поверхности, выражаемы уравненіями (372) (373)— удерживающія, то мы можем замѣнить ихъ двумя другими поверхностями, проходящими черезъ ту же кривую линію и такихъ паръ поверхностей — безчисленное множество.

Какъ дифференціальное уравненіе (380, а), такъ и равенства (380, b, c), совершенно не зависятъ отъ вида этихъ поверхностей, поэтому можно, оставивъ въ сторонѣ всякія разсужденія, относящія къ этимъ поверхностямъ, предположить, что сама кривая линія удерживаетъ на себѣ матерьяльную точку, оказывая реакцію \mathfrak{P} тѣмъ причинамъ, которыя побуждаютъ матерьяльную точку сойти съ этой кривой.

Интегрируя дифференціальное уравненіе (380, а), опредѣлимъ движеніе точки по кривой; изъ равенствъ же (380, b, c) опредѣлится *реакція \mathfrak{P} кривой линіи*, заключающаяся въ нормальной плоскости кривой.

Означимъ черезъ F_n величину и направленіе проеціи силы F на нормальную плоскость; величина ея равна:

$$F_n = F \sin (F, v),$$

а проеціи ея на направленія ρ и b равны проеціямъ силы F на тѣ же направленія; поэтому равенства (380, b, c) можно представить такъ:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P} \cos (\mathfrak{P}, \rho) &= m \frac{v^2}{\rho} - F_n \cos (F_n, \rho) \\ \mathfrak{P} \cos (\mathfrak{P}, b) &= - F_n \cos (F_n, b) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (381)$$

Реакція \mathfrak{P} есть сила дѣйствія кривой линіи на матерьяльную точку m , приложенная къ этой точкѣ; обратно, силовое дѣйствіе точки m на кривую линію, такъ называемое *давленіе матерьяльной точки на кривую линію*, предполагается приложеннымъ къ той точкѣ M кривой, въ которой M находится и предполагается равнымъ и противоположнымъ реакціи \mathfrak{P} .

Поэтому давленіе также заключается въ нормальной плоскости,

а величина и направление его опредѣляется по слѣдующимъ формуламъ:

$$\left. \begin{aligned} D \cos(D, \rho) &= F_n \cos(F_n, \rho) - m \frac{v^2}{\rho} \\ D \cos(D, b) &= F_n \cos(F_n, b) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (382)$$

Эти формулы выражаютъ, что давленіе D есть равнодѣйствующая изъ силы F_n (проекціи силы F на нормальную плоскость), и изъ силы $m \frac{v^2}{\rho}$, направленной противоположно главной нормали.

Эта, направленная отъ центра кривизны кривой, сила представляетъ ту часть давленія точки на кривую, которая производится стремленіемъ матеріальной точки сохранить направление своего движенія; сила эта называется *центробѣжной силой*.

Реакція неподвижной кривой линіи есть равнодѣйствующая изъ силъ, равной и противоположной силѣ F_n и изъ силъ, равной и противоположной центробѣжной силѣ.

(На чертѣжѣ 21 изображены: сила F_n линією $\overline{MF_n}$, противоположная ей — линією \overline{MQ} ; центробѣжная сила — линією \overline{MP} ; сила, противоположная центробѣжной, изображена линією \overline{MK}).

§ 53. Примѣры рѣшенія вопросовъ о движеніи матеріальной точки по данной кривой линіи.

Примѣръ 30-й. Матеріальная точка движется по какой либо неподвижной кривой линіи, касательная къ которой измѣняетъ свое направленіе непрерывнымъ образомъ вдоль по всей кривой; никакихъ силъ, кромѣ реакціи кривой, не приложено къ точкѣ.

Въ этихъ случаяхъ движеніе удовлетворяетъ закону живой силы, а потому v имѣетъ постоянную величину; далѣе, легко найдеть: $s = s_0 + v_0 t$, если движеніе направлено въ сторону возрастающихъ s .

Давленіе точки на кривую приводится здѣсь къ одной только центробѣжной силѣ, которая, вслѣдствіе постоянства скорости, обратно пропорціональна радіусу кривизны.

Примѣръ 31-й. По какой либо кривой линіи движется матеріальная точка, къ которой приложена сила, направленная по

касательной, и стремящаяся приблизить движущуюся точку къ некоторой точкѣ S_0 кривой; величина силы пропорціональна величинѣ разстоянія движущейся точки отъ точки S_0 .

Дифференціальное уравненіе (380, а) получить здѣсь слѣдующій видъ:

$$m \frac{dv}{dt} = -m\mu^2 s, \text{ когда } v = \frac{ds}{dt}$$

$$m \frac{dv}{dt} = m\mu^2 s, \text{ когда } v = -\frac{ds}{dt};$$

такъ что, во всякомъ случаѣ:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -m\mu^2 s.$$

Интегралы этого дифференціального уравненія:

$$v^2 = \mu^2 (q^2 - s^2); \quad q^2 = s_0^2 + \frac{v_0^2}{\mu^2},$$

$$s = q \sin (\mu t + c), \quad c = \arcsin \frac{s_0}{q};$$

(см. стр. 66, примѣръ 8-й).

Давленіе матеріальной точки на кривую и здѣсь приводится къ одной центробѣжной силѣ.

Примѣръ 32-й. Движеніе тяжелой точки по циклоидѣ, заключающейся въ вертикальной плоскости XU , и расположенной такъ, какъ показано на чертежахъ 11 и 31 кинематической части; положительная ось U имѣетъ направленіе силы тяжести.

Уравненія кривой (см. стр. 14 кинематической части):

$$x = R(\omega + \sin \omega), \quad y = R(1 + \cos \omega).$$

Такъ какъ потенциалъ силы тяжести: $U = mgy$, то выраженіе закона живой силы будетъ, въ этомъ случаѣ, слѣдующее:

$$v^2 - v_0^2 = 2gR(\cos \omega - \cos \omega_0),$$

или:

$$v^2 - v_0^2 = 4gR \left(\sin^2 \frac{\omega}{2} - \sin^2 \frac{\omega_0}{2} \right),$$

или

$$v^2 - v_0^2 = \frac{g}{4R} (s_0^2 - s^2), \dots\dots\dots (383)$$

т. стр. 53 и 54 кинематической части).

Равенству (383) дадимъ видъ:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{4R}} \sqrt{q^2 - s^2}; \quad q^2 = s_0^2 + \frac{4Rv_0^2}{g};$$

интегрируя это уравнение, получимъ:

$$s = q \sin\left(t \sqrt{\frac{g}{4R}} + c\right); \quad c = \arcsin \frac{s_0}{q} \dots\dots\dots (384)$$

Давленіе на кривую состоитъ изъ центробѣжной силы и проекціи силы тяжести на нормаль къ кривой:

$$D = m \left(\frac{v_0^2}{\rho} + g \cos(N, Y) \right),$$

N означаетъ направленіе нормали, проведенной въ выпуклую сторону циклоиды.

По свойству циклоиды, уголъ (N, Y) равенъ $\frac{\omega}{2}$ (см. стр. 54 и черт. 31 кинематической части) и радіусъ кривизны вдвое болѣе длины \overline{MN} (см. тоже чертежъ);

$$\overline{MN} = 2R \cos \frac{\omega}{2}, \quad \rho = 4R \cos \frac{\omega}{2}.$$

Такъ какъ:

$$\cos \frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{16R^2 - s^2}}{4R},$$

D выразится въ s слѣдующимъ образомъ:

$$D = \frac{mg}{4R} \frac{q^2 + 16R^2 - s^2 - s_0^2}{\sqrt{16R^2 - s^2}}.$$

Изъ выраженія (384) видно, что тяжелая матеріальная точка совершаетъ періодическое колебательное движеніе по циклоидѣ, отклоняясь на стоянія $+q$ и $-q$ отъ нижней точки циклоиды; время T , потребное для

перехода точки изъ положенія $s = +q$ въ положеніе $s = -q$, или для обратнаго движенія, не зависятъ отъ величины q и равно

$$T = \pi \sqrt{\frac{4R}{g}}.$$

Примѣръ 33-й. Движеніе матерьяльной тяжелой точки по удерживающей окружности, заключающейся въ вертикальной плоскости.

Возьмемъ центръ окружности за начало координатъ, ось Y^{000} направимъ вертикально внизъ, ось X^{000} горизонтально въ плоскости круга.

По закону живой силы:

$$v^2 = (2gy + v_0^2 - 2gy_0),$$

или

$$v^2 = 2g(y - b), \dots \dots \dots (385)$$

гдѣ:

$$b = y_0 - H, \quad H = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Величины H и b имѣютъ слѣдующія значенія. Если представить себѣ, что свободная тяжелая матерьяльная точка будетъ брошена снизу вверхъ съ начальною скоростью v_0 , то она поднимется на высоту H надъ тѣмъ уровнемъ, съ котораго она была брошена; если этотъ начальный уровень былъ $y = y_0$, то свободная тяжелая точка, брошенная вверхъ со скоростью v_0 , поднимется до уровня $y = b$.

Если этотъ уровень пересѣкаетъ окружность (т.-е. если $b > -R$), то скорость обращается въ нуль въ точкахъ пересѣченія, какъ видно изъ уравненія (385); движеніе совершается только по той части окружности, которая ниже уровня $y = b$.

Если же этотъ уровень не пересѣкаетъ окружности (т.-е. если $b < -R$), то скорость движущейся точки не обращается въ нуль ни въ какой точкѣ окружности; въ самомъ дѣлѣ, положимъ:

$$b = -R - l,$$

гдѣ l болѣе нуля, тогда уравненіе (385) получить слѣдующій видъ:

$$v^2 = 2g(y + R + l),$$

а отсюда уже ясно видно, что v^2 не обращается въ нуль, пока точка

тся на окружности. Въ этихъ случаяхъ движеніе совершается по окружности безъ остановокъ и безъ перемены направленности.

Эти два рода случаевъ рассмотримъ отдѣльно.

$$\text{I. } b > -R.$$

Обозначимъ черезъ φ уголъ, составленный радіусомъ векторомъ уходящей точки съ положительною осью Y^{00} , тогда уравненіе (385) получитъ слѣдующій видъ:

$$R^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 2g(R \cos \varphi - b), \dots\dots\dots (386)$$

$$R^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 2gR(\cos \varphi - \cos \beta) = 4gR \left(\sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$\cos \beta = \frac{b}{R}.$$

Такъ какъ уголъ φ не можетъ быть болѣе β и не можетъ менѣе ($-\beta$), то выразимъ синусъ половины этого угла слѣдующимъ образомъ:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\beta}{2} \sin \eta; \dots\dots\dots (387)$$

и будетъ:

$$\cos \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \eta \cdot \frac{d\eta}{dt}, \dots\dots\dots (388)$$

Дифференціальное же уравненіе (386) получитъ, послѣ надлежащихъ сокращеній, слѣдующій видъ:

$$\frac{\left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2}{\left(1 - \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \eta \right)} = \frac{g}{R},$$

по извлеченіи корня и по отдѣленіи переѣнныхъ:

$$\frac{d\eta}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \eta}} = dt \sqrt{\frac{g}{R}} \dots\dots\dots (389)$$

Корень, находящийся въ знаменателѣ первой части, не обращается въ нуль ни при какихъ дѣйствительныхъ величинахъ η , если только $\beta < \pi$, а потому этотъ корень долженъ сохранять свой знакъ во все время движенія; изъ этого слѣдуетъ, что и знакъ дифференціала $d\eta$ остается, во все время движенія, постояннымъ; знакъ этотъ опредѣлится изъ равенства (388), примененнаго къ начальному моменту.

Въ это равенство входитъ, однако, нѣкоторая величина, которой мы можемъ придать знакъ плюсъ или минусъ, по желанію, это именно:

$$\cos \eta_0 = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{2}}};$$

если же мы условимся придавать этой величинѣ тотъ же самый знакъ, какой имѣетъ величина φ_0' , то тогда знакъ величины η_0' , слѣдовательно и производной η' будетъ во всѣхъ случаяхъ и всегда — положительный; тотъ же самый знакъ долженъ быть имѣть и корень знаменателя первой части дифференціального уравненія (389).

И такъ:

$$\eta_0 < \frac{\pi}{2}, \text{ если } \varphi_0' > 0,$$

$$\eta_0 > \frac{\pi}{2}, \text{ если } \varphi_0' < 0;$$

уголъ η непрерывно возрастаетъ отъ своего начального значенія и законъ возрастанія выражается равенствомъ:

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \eta}}, \dots \dots (390)$$

или:

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} (F(\eta, \sin \frac{\beta}{2}) - F(\eta_0, \sin \frac{\beta}{2})), \dots \dots (391)$$

гдѣ $F(\eta, k)$ есть тотъ самый интегралъ (формула (346)), который

ѣтился намъ при рѣшеніи примѣра 27-го; разница заключается въ выраженіи величины k , которая здѣсь равняется $\sin \frac{\beta}{2}$.

Въ примѣрѣ 27-мъ были доказаны нѣкоторые свойства интеграла $F(\eta, k)$, а затѣмъ, на основаніи этихъ свойствъ, оказалось возможнымъ получить понятіе о періодическомъ характерѣ движенія; то же самое можетъ быть сдѣлано и здѣсь.

Изъ формулы (387) видно, что слѣдующіи величинамъ η вѣдствуютъ слѣдующія величины φ :

$$\text{когда } \eta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, 3\pi, \frac{7\pi}{2}, \dots$$

$$\text{тогда } \varphi = 0, \beta, 0, -\beta, 0, \beta, 0, -\beta, \dots$$

какъ какъ φ измѣняется непрерывно, то радіусъ векторъ точки прѣшаетъ качанія, отклоняясь на уголъ β въ положительную сторону и на такой же уголъ — въ отрицательную.

Изъ того свойства интеграла (346), которое выражается равенствомъ:

$$F(\eta + \pi, k) = F(\eta, k) + F(\pi, k) \dots \dots \dots (348)$$

судеть, что переходъ точки изъ одного крайняго положенія B (ит. 22) въ другое B_1 , или обратный переходъ изъ B_1 въ B , прѣшается въ теченіи промежутка времени

$$T = \sqrt{\frac{R}{g}} F\left(\pi, \sin \frac{\beta}{2}\right) \dots \dots \dots (392)$$

то такое же время потребно для движенія отъ середины дуги до одной изъ крайнихъ точекъ и обратно въ S_0 .

Изъ свойства, выражаемаго равенствомъ

$$F(\pi, k) = 2F\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \dots \dots \dots (349)$$

судеть, что матеріальная точка совершаетъ переходъ отъ точки до одной изъ крайнихъ точекъ въ теченіи времени $\frac{T}{2}$; столько времени требуетъ и обратное движеніе.

Далѣе, изъ свойства (348) и на основаніи формулъ (387) и (391) слѣдуетъ, что, если въ нѣкоторый моментъ времени радиусъ векторъ OM (черт. 22) отклоненъ на уголъ φ отъ вертикальной линіи, то, по истеченіи промежутка времени, равнаго T , онъ будетъ отклоненъ на уголъ $(-\varphi)$, то есть, на тотъ же самый уголъ, но по другую сторону отъ вертикальной линіи; значить, въ теченіи этого промежутка времени, матерьяльная точка совершить движеніе отъ M къ B и отъ B къ M_1 или отъ M къ B_1 и отъ B_1 къ M_1 .

Величина промежутка времени T , называемая продолжительностью размаха круговаго маятника, вычисляется по формулѣ:

$$T = 2 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \eta}} \dots \dots \dots (393)$$

Примѣнивъ къ подынтегральной функціи слѣдующее разложеніе въ рядъ:

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} x^6 + \dots \dots \dots$$

(гдѣ x надо замѣнить произведеніемъ $\sin \frac{\beta}{2} \sin \eta$), и принявъ во вниманіе, что:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \eta d\eta = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \frac{\pi}{2},$$

получимъ слѣдующее выраженіе для T :

$$T = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4 \frac{\beta}{2} + \dots \dots \dots \right] \dots (394)$$

При достаточно-маломъ β можно ограничиться двумя первыми членами этого ряда.

Если же уголъ этотъ столь малъ, что можно положить:

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{\beta''}{2} \sin 1'',$$

гдѣ β'' означаетъ число секундъ, заключающееся въ этомъ углѣ, T выразится такъ:

$$T = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \left(1 + \frac{(\beta'')^2}{16} \sin^2 1'' \right). \dots \dots (395)$$

II. $b < -R$.

Положимъ $b = -R - l$, тогда уравненіе живой силы получитъ слѣдующій видъ:

$$v^2 = 2g(R \cos \varphi + R + l),$$

III:

$$R^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 2g(2R + l - 2R \sin^2 \frac{\varphi}{2});$$

зуда, по извлеченіи корня, по отдѣленіи переменныхъ и по интегрированіи, получимъ:

$$t = \pm \frac{2R}{\sqrt{2g(2R+l)}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{2R}{2R+l} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}, \dots \dots (396)$$

Въ знакъ плюсъ долженъ быть взятъ въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ начальная скорость направлена въ сторону увеличивающагося φ , а знакъ минусъ — въ случаяхъ противоположнаго направленія начальной скорости.

Изъ этого равенства видно, что уголъ φ непрерывно возрастаетъ или убываетъ и что возрастаніе угла φ на 2π совершается въ теченіи времени:

$$T = \frac{4R}{\sqrt{2g(2R+l)}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \frac{2R}{2R+l} \sin^2 \eta}}, \dots \dots (397)$$

такъ что въ теченіи этого времени точка пройдетъ всю окружность одинъ разъ.

III. $b = -R$.

Если положимъ $\beta = \pi$ въ случаяхъ I рода или $l = 0$ къ случаямъ II рода, то получимъ формулы, выражающія движеніе, совершаемое матерьяльною точкою въ томъ случаѣ, когда $b = -R$; такъ какъ

$$\int \frac{d\psi}{\cos \psi} = -\log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} \right),$$

то равенство (396) получить, при $l = 0$, слѣдующій видъ:

$$t = \pm \sqrt{\frac{R}{g}} \log \left[\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi - \varphi_0}{4} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi - \varphi}{4} \right)} \right], \dots \dots \dots (398)$$

гдѣ верхній знакъ долженъ быть взятъ при $\varphi'_0 > 0$, нижній — при $\varphi'_0 < 0$.

Если $\varphi'_0 > 0$, то φ возрастаетъ; это возрастаніе становится все болѣе и болѣе медленнымъ, по мѣрѣ приближенія къ π ; изъ (398) видно, что при $\varphi = \pi$, $t = \infty$.

Если $\varphi'_0 < 0$, то φ убываетъ и быстрота убыванія становится все менѣе, по мѣрѣ приближенія къ $(-\pi)$; изъ (398) видно, что тогда при $\varphi = -\pi$, $t = \infty$.

Во всякомъ случаѣ, при $b = -R$, движущаяся точка асимптотически приближается къ высшей точкѣ окружности.

Примѣръ 34. Кривая та же самая, что и въ предыдущемъ примѣрѣ, но она предполагается теперь неудерживающею для перемѣщеній матерьяльной точки внутрь площади, ею ограничиваемой; опредѣлить мѣсто схода тяжелой матерьяльной точки съ этой окружности и дальнѣйшее движеніе.

Согласно съ условіями, сдѣланными въ началѣ параграфа 34-го, напомнимъ уравненіе неудерживающей кривой слѣдующимъ образомъ:

$$R^2 - (x^2 + y^2) = 0;$$

ъ составимъ выраженіе для λ по формулѣ (317) (§ 40).

Дѣсь:

$$X=0, \quad Y=mg, \quad \frac{\partial f}{\partial x}=-2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=-2y, \quad \Delta f=2R,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2, \quad Kf=-2v^2,$$

и:

$$\lambda = m \frac{v^2 + gy}{2R^2} \dots \dots \dots (399)$$

о движеніе точки удовлетворяетъ закону живой силы:

$$v^2 = 2g(y - b), \quad b = y_0 - H, \quad H = \frac{v_0^2}{2g},$$

ому:

$$\lambda = m \frac{3g}{2R^2} \left(y - \frac{2}{3} b \right) \dots \dots \dots (400)$$

Изъ уравненія живой силы видно, что y не можетъ быть менѣе b .
 Поэтому, если $b > 0$, то разность $\left(y - \frac{2}{3} b \right)$ не можетъ быть
 $\frac{1}{3} b$; слѣдовательно, при $b > 0$ точка движется по кривой не
 оставляя ея; если она прикрѣплена къ концу гибкой не-
 кинной нити, другой конецъ которой прикрѣпленъ къ началу
 нити, то нить остается натянутою во все время движенія;
 ена натяженія нити равна $2\lambda R$.

Если $b < 0$, но $\frac{2}{3} b > -R$, то λ обращается въ нуль при:

$$y_1 = \frac{2}{3} b,$$

иъ $y = y_1$ ниже уровня $y = b$, если $b < 0$), а при дальнѣй-
 движеніи точки по окружности, λ должно сдѣлаться от-
 нымъ; поэтому въ точкѣ окружности:

$$x_1 = \sqrt{R^2 - \frac{4}{9} b^2} \quad y_1 = \frac{2}{3} b$$

движущаяся точка оставит кривую и станет описывать нѣкоторую параболу, касательную къ окружности въ этой точкѣ.

Опредѣлимъ видъ этой параболы и движеніе матеріальной точки послѣ того, какъ она оставитъ окружность.

Пусть t_1 есть моментъ времени, въ который движущаяся точка оставляетъ кривую; въ этотъ моментъ скорость движущейся точки имѣетъ слѣдующую величину и слѣдующее направленіе:

$$v_1 = \sqrt{-\frac{2}{3}gb} = \sqrt{-gy_1}, \quad \cos(v_1 X) = \frac{y_1}{R} = \frac{2}{3} \frac{b}{R}$$

$$\cos(v_1 Y) = -\frac{x_1}{R} = -\sqrt{1 - \frac{4}{9} \frac{b^2}{R^2}}.$$

Свободное движеніе точки будетъ слѣдующее:

$$x = x_1 + v_1 \frac{y_1}{R} (t - t_1)$$

$$y = y_1 + v_1 \frac{x_1}{R} (t - t_1) + g \frac{(t - t_1)^2}{2};$$

высшій уровень, до котораго она достигнетъ, будетъ ниже уровня $y = b$, а именно:

$$y_2 = y_1 - \frac{v_1^2}{2g} \left(\frac{x_1}{R} \right)^2 = b - \frac{4}{27} \frac{b^3}{R^2}.$$

На чертежѣ 23-мъ линія B_1B изображаетъ уровень $y = b$, линія K_1K — уровень $y = \frac{2}{3}b$, точка C — высшую точку параболы, точка D — мѣсто встрѣчи параболы съ окружностью.

Если $b < 0$ и $\frac{2}{3}b < -R$, то тогда разность $(y - \frac{2}{3}b)$ остается положительною при всякомъ положеніи точки на окружности, а потому движущаяся точка нигдѣ не сойдетъ съ окружности.

Примѣръ 35. Та же окружность предполагается неудерживающею для перемѣщеній матеріальной точки внаружу круга; опредѣлить мѣсто схода тяжелой матеріальной точки.

Въ этомъ случаѣ уравненіе круга слѣдуетъ писать такъ:

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

а потому:

$$\lambda = -m \frac{v^2 + gy}{2R^2} \dots \dots \dots (401)$$

Изъ этого выраженія прямо видно, что на нижней полусферѣ очка находится не можетъ.

Изъ выраженія же:

$$\lambda = -m \frac{3g}{2R^2} \left(y - \frac{2}{3} b \right)$$

можно заключить слѣдующее.

Если $y_0 < 0$ и притомъ $y_0 < \frac{2}{3} b$, то λ будетъ болѣе нуля до вѣхъ поръ, пока движущаяся точка не опустится до уровня $-\frac{2}{3} b$; на этомъ уровнѣ точка сходится съ окружности (см. черт. 4-й, на которомъ точка A изображаетъ начальное положеніе движущейся точки, линія $K_1 K$ — уровень $y = \frac{2}{3} b$).

Если $y_0 = \frac{2}{3} b$, то движущаяся точка оставляетъ окружность уже съ начальномъ своимъ положеніи, если скорость ея направлена внизъ.

Если $y_0 > \frac{2}{3} b$, то движущаяся точка оставляетъ окружность съ самаго начала движенія, какъ при направленіи начальной скорости внизъ, такъ и при направленіи ея вверхъ.

§ 54. Вопросы и задачи о движеніи несвободной материальной точки, которыя могутъ быть приведены къ предѣленію относительнаго движенія точки по отношенію къ нѣкоторой движущейся средѣ.

Задачи о движеніи материальной точки по данной движущейся поверхности или линіи могутъ быть рѣшены, или такъ, какъ показано выше, или еще слѣдующимъ образомъ.

Представимъ себѣ движущуюся среду, которой принадлежит лная поверхность или линія, и составимъ дифференціальныя уравненія относительнаго движенія материальной точки по отношенію къ этой средѣ; интегрируя эти дифференціальныя уравненія, найдемъ рѣшеніе задачи.

Если движущаяся поверхность или линия не измѣняетъ своего вида, то среда будетъ неизмѣняемая, неизмѣнно связанная съ этою поверхностью или линіею.

Дифференціальныя уравненія относительнаго движенія несвободной матеріальной точки будутъ отличаться отъ дифференціальныхъ уравненій (233) (стр. 149—150) тѣмъ, что теперь во вторыхъ частяхъ уравненій будутъ заключаться еще члены:

$$\lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi}, \quad \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta}, \quad \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \zeta},$$

выражающіе суммы проеکцій на оси Ξ , Υ , Z реакцій поверхностей

$$\Phi_1(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad \Phi_2(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

образующихъ своимъ пересѣченіемъ ту линію, по которой должна двигаться матеріальная точка.

Если матеріальная точка ограничена въ своемъ движеніи негладкою поверхностью:

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

то во вторыхъ частяхъ дифференціальныхъ уравненій относительнаго движенія должны будутъ заключаться слѣдующіе члены:

$$\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - k \sqrt{\lambda^2} \frac{\Delta \Phi}{u} \frac{d\xi}{dt},$$

$$\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - k \sqrt{\lambda^2} \frac{\Delta \Phi}{u} \frac{d\eta}{dt},$$

$$\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} - k \sqrt{\lambda^2} \frac{\Delta \Phi}{u} \frac{d\zeta}{dt}.$$

Примѣръ 36-й. Матеріальная тяжелая точка движется по линіи, составляющей съ горизонтомъ уголъ J ; эта линія движется поступательно, причемъ всѣ точки ея движутся вертикально съ постояннымъ ускореніемъ j по положительной оси Z , направленной внизъ. Въ началѣ движенія (т.-е. при $t=0$) скорости всѣхъ точекъ линіи равны нулю; въ этотъ моментъ матеріальная точка находилась въ точкѣ $Ю$ движущейся линіи и абсолютная скорость ея была равна нулю.

Возьмемъ положительную ось Y по направленію линіи, внизъ; ось Z — перпендикулярно къ линіи, вверхъ. Уравненія линіи будутъ:

$$\zeta=0, \xi=0.$$

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$m \frac{d^2 \eta}{dt^2} = mg \sin J - mj \sin J$$

$$0 = -mg \cos J + \lambda + mj \cos J.$$

Второе изъ этихъ уравненій опредѣляетъ реакцію по положительной оси Z ; равное и противоположное реакціи давленіе матеріальной точки на линію равно:

$$D = m(g - j) \cos J.$$

Если j есть величина положительная, то это давленіе менѣе давленія $mg \cos J$, производимаго вѣсомъ точки; если же j будетъ величиною отрицательною, то давленіе будетъ болѣе вѣса точки; слѣдовательно, при равноѣрно-ускоренномъ движеніи линіи сверху внизъ давленіе матеріальной точки на линію уменьшается, а при равноѣрно-ускоренномъ движеніи снизу вверхъ — увеличивается сравнительно съ давленіемъ, производимымъ тою же точкою на неподвижную линію.

Первое изъ предыдущихъ уравненій, по сокращеніи на m и по интегрированіи, даетъ законъ движенія точки по прямой:

$$\eta = \frac{(g-j)}{2} t^2 \sin J;$$

это — равноускоренное движеніе съ ускореніемъ $(g-j) \sin J$; если будетъ болѣе g , то точка будетъ подниматься вверхъ по линіи.

Примѣръ 37-й. Движеніе матеріальной тяжелой точки по кой бы то ни было кривой линіи движущейся поступательно.

Относительное движеніе матеріальной точки совершается такъ, къ совершалось бы абсолютное движеніе по той же неподвижной кривой линіи, если бы, кромѣ силы тяжести, была еще прило-

жена къ матерьяльной точкѣ сила, равная mw_{ω} и противоположная ускоренію \dot{w}_{ω} точки $Ю$.

Примѣръ 38-й. Движеніе тяжелой матерьяльной точки по прямой линіи, принадлежащей неизмѣняемой средѣ, вращающейся равномерно вокругъ горизонтальной оси.

Проведемъ кратчайшее разстояніе между осью вращенія и движущейся линіею и возьмемъ неподвижный конецъ его O за начало неподвижныхъ осей координатъ, а тотъ конецъ его, который находится на движущейся линіи — за начало $Ю$ координатныхъ осей $Э$, Υ , Z ; за положительную ось Υ возьмемъ продолженіе направленія $OЮ$ (см. черт. 25), ось $Э$ расположимъ по данной линіи, ось X^{osz} по направленію оси вращенія и угловой скорости, а ось Y^{osz} вертикально внизъ. При такомъ выборѣ осей, ось Υ будетъ заключаться въ вертикальной плоскости QQ , проведенной черезъ ось Y^{osz} . Черезъ точку $Ю$ проведемъ направленіе $ЮX'$ параллельное положительной оси X^{osz} ; пусть J есть постоянный уголъ $ЭЮX'$, образуемый направленіями осей X и $Э$. Плоскость PP , проведенная черезъ направленія $ЮЭ$ и $ЮX'$, перпендикулярна къ направленію $OЮ\Upsilon$, а потому въ этой плоскости заключается ось $ЮZ$.

Угловая скорость направлена по оси X^{osz} или по линіи $ЮX'$, поэтому проеціи ея на подвижныя оси равны:

$$p = \omega \cos J, \quad q = 0, \quad r = -\omega \sin J.$$

Ускореніе точки $Ю$ направлено по $ЮO$ и равно $\omega^2 l$, если l означаетъ длину $ЮO$, поэтому:

$$\dot{w}_{\omega} \cos(\dot{w}_{\omega} \Xi) = 0, \quad \dot{w}_{\omega} \cos(\dot{w}_{\omega} \Upsilon) = -\omega^2 l, \quad \dot{w}_{\omega} \cos(\dot{w}_{\omega} Z) = 0.$$

Реакція \mathfrak{P} прямой линіи заключается въ плоскости $Z\Upsilon$.

Проеціи силы тяжести на направленіе оси Υ и на направленіе $ЮK$ (линія пересѣченія плоскостей QQ и PP) равны:

$$\Upsilon = mg \cos \omega t, \quad - mg \sin \omega t,$$

ωt есть угол $Y O \gamma$; поэтому проекции силы тяжести на направления осей Σ и Z равны:

$$\Sigma = -mg \sin \omega t \sin J, \quad Z = -mg \sin \omega t \cos J.$$

Кроме того, такъ какъ матеріальная точка движется по оси Σ , η и ζ равны нулю.

Составимъ теперь дифференціальныя уравненія; они будутъ слѣдующія:

$$m\xi'' = -mg \sin J \sin \omega t + m\omega^2 \xi \sin^2 J, \dots (402, a)$$

$$O = \mathfrak{P} \cos(\mathfrak{P}, \gamma) + mg \cos \omega t + m\omega^2 l + 2m\omega \xi' \sin J, \dots (402, b)$$

$$O = \mathfrak{P} \cos(\mathfrak{P}, Z) - mg \cos J \sin \omega t + m\omega^2 \xi \sin J \cos J. (402, c)$$

Интегрируя первое изъ этихъ уравненій, получимъ выраженіе координаты точки по прямой; второе и третье уравненія послужатъ опредѣленію величины и направленія реакціи прямой линіи. Сократимъ уравненіе (402, a) на m и положимъ:

$$\xi = \chi + \frac{g}{\omega^2} \frac{\sin J}{1 + \sin^2 J} \sin \omega t,$$

изъ это уравненіе получитъ слѣдующій видъ:

$$\chi'' = (\omega \sin J)^2 \chi, \dots (403)$$

Интегрированіе такого уравненія показано на страницахъ 63-й 4-й этой части; замѣнимъ, въ выраженіи (72), k — величиною $\omega \sin J$, α — величиною $\chi_0 = \xi_0$ и α — величиною χ'_0 :

$$\chi'_0 = \xi'_0 - \frac{g}{\omega} \frac{\sin J}{1 + \sin^2 J},$$

имѣемъ слѣдующее рѣшеніе:

$$\begin{aligned} \xi = \xi_0 \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} + \frac{g}{\omega^2} \frac{\sin J}{1 + \sin^2 J} \sin \omega t + \\ + \left(\frac{\xi'_0}{\omega \sin J} - \frac{g}{\omega^2} \frac{1}{1 + \sin^2 J} \right) \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}, \dots (404) \end{aligned}$$

гдѣ

$$k = \omega \sin J.$$

Если $\xi_0 = 0$ и $\chi'_0 = 0$, то движеніе матеріальной точки по оси E будетъ колебательное по обѣ стороны точки $Ю$, такъ какъ тогда выраженіе этого движенія будетъ слѣдующее:

$$\xi = \frac{g}{\omega^2} \frac{\sin J}{1 + \sin^2 J} \sin \omega t.$$

Ни это, ни общее выраженіе (404) не заключаютъ въ себѣ величины l ; слѣдовательно, движеніе точки по оси E не зависитъ отъ разстоянія этой прямой линіи отъ оси вращенія.

Примѣръ 39-й. Тяжелая точка движется по прямой линіи, находящейся въ плоскости истиннаго горизонта нѣкоторой точки $Ю$ земной поверхности, пренебрегая тѣми же величинами, какъ и на страницѣ 166, опредѣлить проэкцію на горизонтальную плоскость давленія, производимаго движущеюся точкою на прямую линію.

Давленіе движущейся точки на прямую равно и противоположно реакціи прямой; означимъ черезъ D_1 проэкцію давленія на горизонтальную плоскость; направленіе D_1 должно быть перпендикулярно къ направленію прямой.

Относя положеніе движущейся точки къ тѣмъ самымъ осямъ X , Y , Z , которыя были выбраны нами на страницѣ 159 при разсмотрѣніи примѣра 21-го, означимъ черезъ x , y координаты движущейся точки ($z=0$) и черезъ β — азимутъ прямой линіи; этотъ азимутъ мы будемъ отсчитывать отъ положительной оси X къ положительной оси Y .

Если направленіе давленія D_1 будетъ имѣть азимутъ $(\beta + \frac{\pi}{2})$, то проэкція D_1 на оси X и Y будутъ равны:

$$- D_1 \sin \beta, \quad D_1 \cos \beta;$$

если окажется, что D_1 есть величина отрицательная, то это будетъ значить, что оно имѣетъ направленіе противоположное, азимутъ котораго равенъ $\beta - \frac{\pi}{2}$.

Чтобы составить дифференціальныя уравненія движенія точки вращающейся прямой, въ которыхъ отброшены члены, заключающіе члены:

$$\omega^2 x, \omega^2 \eta, \frac{x}{R}, \frac{\eta}{R},$$

имѣемъ дифференціальныя уравненія (252) и прибавимъ къ нимъ частныя проекціи реакціи прямой на оси координатъ; эти реакціи на оси X и Y будутъ равны:

$$D_1 \sin \beta, \quad - D_1 \cos \beta,$$

поэтому первыя два дифференціальныя уравненія будутъ слѣдующаго вида:

$$mx'' = D_1 \sin \beta - 2m\omega\eta' \sin \Delta$$

$$m\eta'' = -D_1 \cos \beta + 2m\omega x' \sin \Delta.$$

По движенію точки совершается по данной прямой линіи, поэтому:

$$x = s \cos \beta, \quad \eta = s \sin \beta,$$

гдѣ s означаетъ разстояніе движающейся точки отъ точки O ; въ этомъ случаѣ предыдущія уравненія получаютъ такой видъ:

$$ms'' \cos \beta = (D_1 - 2m\omega s' \sin \Delta) \sin \beta$$

$$ms'' \sin \beta = -(D_1 - 2m\omega s' \sin \Delta) \cos \beta.$$

Умноживъ первое изъ этихъ уравненій на $\cos \beta$, второе на $\sin \beta$ и сложивъ, получимъ:

$$s'' = \frac{d^2 s}{dt^2} = 0;$$

что означаетъ, что движеніе точки совершается (по крайней мѣрѣ) отъ точки O равномерно.

Послѣ этого, изъ предыдущихъ уравненій слѣдуетъ:

$$D_1 = 2m\omega s' \sin \Delta \dots \dots \dots (105)$$

Если s' есть величина положительная, то и D_1 будет величиною положительною, то есть направление его будет имѣть азимуть $(\beta + \frac{\pi}{2})$, стало бытъ движущаяся точка давитъ вправо на линію, по которой она движется; давленіе это, происходящее вслѣдствіе вращенія земли вокругъ оси, пропорціонально величинѣ скорости точки и синусу истинной широты мѣста; но не зависитъ отъ азимута β .

Примѣръ 40-й. Движеніе тяжелой матерьяльной точки по наклонной плоскости, равномерно вращающейся вокругъ вертикальной оси.

Пусть J есть уголъ, составляемый наклонною плоскостью съ горизонтальною плоскостью. Возьмемъ за точку $Ю$ — точку пересѣченія вращающейся плоскости съ осью вращенія; положительную ось Υ направимъ внизъ по линіи наибольшаго наклона по плоскости, ось Z перпендикулярно къ плоскости, вверхъ; ось Ξ будетъ тогда горизонтальна.

Положимъ, что угловая скорость ω направлена вверхъ; проеціи ея на подвижныя оси будутъ равны:

$$p=0, \quad q=-\omega \sin J, \quad r=\omega \cos J.$$

Ускореніе точки $Ю$ равно нулю; проеціи силы тяжести на подвижныя оси:

$$\Xi=0, \quad \Upsilon=mg \sin J, \quad Z=-mg \cos J.$$

Наконецъ, уравненіе плоскости: $\zeta=0$.

Дифференціальныя уравненія движенія точки по плоскости будутъ, по сокращеніи на m , имѣть слѣдующій видъ:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \omega^2\zeta + 2\omega \frac{d\eta}{dt} \cos J, \dots\dots\dots (406, a)$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = g \sin J + \omega^2 \eta \cos^2 J - 2\omega \frac{d\zeta}{dt} \cos J \dots\dots (406, b)$$

изъ третьяго уравненія:

$$-mg \cos J + \lambda + m\omega^2 \eta \sin J \cos J - 2m\omega \frac{d\xi}{dt} \sin J \dots (406, c)$$

явится величина и знакъ реакціи λ .

положимъ:

$$\eta + \frac{g}{\omega^2} \frac{\sin J}{\cos^2 J} = \psi,$$

уравненія (406, a, b) получаютъ слѣдующій видъ:

$$\xi'' = 2\omega\psi' \cos J = \omega^2 \xi, \quad \psi'' = -2\omega\xi' \cos J + \omega^2 \psi \cos^2 J.$$

Изъ извѣстно, такая совокупность линейныхъ дифференціаль-уравненій имѣетъ слѣдующее частное рѣшеніе:

$$\xi = Ce^{kt}, \quad \psi = Cx e^{kt},$$

и x суть постоянныя величины, удовлетворяющія слѣдующимъ равенствамъ:

$$k^2 = 2\omega k \cos J + \omega^2, \quad xk^2 = -2\omega k \cos J + \omega^2 x \cos^2 J.$$

Исключивъ изъ этихъ равенствъ величину x :

$$x = \frac{k^2 - \omega^2}{2\omega k \cos J} = -\frac{2\omega k \cos J}{k^2 - \omega^2 \cos^2 J},$$

изъ уравненіе:

$$\left(\frac{k}{\omega}\right)^4 - \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 (1 - 3 \cos^2 J) + \cos^2 J = 0,$$

иде для опредѣленія k ; изъ него получимъ четыре значенія этой величины:

$$k_1 = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 3 \cos^2 J + \sin J \sqrt{1 - 9 \cos^2 J}}, \quad 3) -k_1$$

$$k_2 = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 3 \cos^2 J - \sin J \sqrt{1 - 9 \cos^2 J}}, \quad 4) -k_2;$$

каждому изъ этихъ k соответствуетъ опредѣленная величина x :

$$1) \quad x_1 = \frac{k_1^2 - \omega^2}{2\omega k_1 \cos J}, \quad 3) \quad -x_1$$

$$2) \quad x_2 = \frac{k_2^2 - \omega^2}{2\omega k_2 \cos J}, \quad 4) \quad -x_2.$$

Поэтому совокупность (406, а), (406, б) будетъ имѣть слѣдующее полное рѣшеніе.

$$\xi = C_1 e^{k_1 t} + C_3 e^{-k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} + C_4 e^{-k_2 t} \dots (407, а)$$

$$\eta = -\frac{g}{\omega^2} \frac{\sin J}{\cos^2 J} + x_1 (C_1 e^{k_1 t} - C_3 e^{-k_1 t}) + x_2 (C_2 e^{k_2 t} - C_4 e^{-k_2 t}). (407, б)$$

Значенія произвольныхъ постоянныхъ опредѣляются по начальнымъ координатамъ ξ_0 и η_0 движущейся точки и по проеціямъ на оси Ξ и Υ ея начальной относительной скорости (ξ'_0 , η'_0).

Корни k_1 и k_2 могутъ быть дѣйствительными или мнимыми.

Если:

$$\cos J < \frac{1}{3},$$

то тогда:

$$\cos J < \frac{1}{3} \sqrt{3}, \quad 1 - 3 \cos^2 J > 0,$$

$$(1 - 3 \cos^2 J)^2 - \sin^2 J (1 - 9 \cos^2 J) = 4 \cos^2 J,$$

а потому тогда обѣ величины k_1 и k_2 — дѣйствительныя. Въ такихъ случаяхъ ξ и η при $t = \infty$ становятся безконечно-большими, если только C_1 и C_2 неравны нулю; если же эти постоянныя равны нулю, то движущаяся точка асимптотически приближается къ точкѣ:

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = -\frac{g}{\omega^2} \frac{\sin J}{\cos^2 J}$$

плоскости $\Xi\Upsilon$.

Если:

$$\cos J > \frac{1}{3},$$

то тогда k_1 и k_2 суть комплексныя взаимно-сопряженныя величины:

$$k_1 = \alpha + \beta i, \quad k_2 = \alpha - \beta i,$$

а такъ какъ:

$$2\omega x_1 \cos J = k_1 - \frac{\omega^2}{k_1}, \quad 2\omega x_2 \cos J = k_2 - \frac{\omega^2}{k_2},$$

то рѣшеніе получить въ этихъ случаяхъ слѣдующій видъ:

$$\begin{aligned} \xi &= e^{at} (\Gamma_1 \cos \beta t + \Gamma_2 \sin \beta t) + e^{-at} (\Gamma_3 \cos \beta t + \Gamma_4 \sin \beta t) \\ \eta &= -\frac{g \sin J}{\omega^2 \cos^2 J} + \frac{e^{at}}{2\omega \cos J} \left[(\Gamma_1 \alpha + \Gamma_2 \beta - \omega^2 \frac{\Gamma_1 \alpha - \Gamma_2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2}) \cos \beta t + \right. \\ &\quad \left. + (\Gamma_2 \alpha - \Gamma_1 \beta - \omega^2 \frac{\Gamma_2 \alpha + \Gamma_1 \beta}{\alpha^2 + \beta^2}) \sin \beta t \right] + \dots \end{aligned}$$

Въ этихъ случаяхъ, если Γ_1 и Γ_2 неравны нулю, то движеніе точки, при весьма большихъ величинахъ t , принимаетъ слѣдующій характеръ:

$$\xi = ae^{at} \cos(\beta t + b), \quad \eta = -\frac{g \sin J}{\omega^2 \cos^2 J} + a_1 e^{at} \sin(\beta t + b_1),$$

т.-е. движущаяся точка описываетъ спираль логарифмическаго вида, по которой она удаляется въ безконечность.

Если же Γ_1 и Γ_2 равны нулю, то движущаяся точка асимптотически приближается по спирали къ точкѣ (ξ_1, η_1) .

Прихѣръ 41-й. Разсмотримъ, какое движеніе по отношенію къ землѣ совершаетъ математическій маятникъ при малыхъ отклоненіяхъ отъ вертикальной линіи (маятникъ Фуко).

Примемъ точку привѣса маятника за начало $Ю$ осей координатъ X , Y , Z , неизмѣнно связанныхъ съ землею; эти оси направлены такъ, какъ объяснено на страницѣ 159.

Если l есть длина нити маятника, то уравненіе той сферы, на которой должна оставаться движущаяся точка будетъ:

$$l^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

Дифференціальныя уравненія движенія этого маятника полу-

чатся изъ дифференціальныхъ уравненій (243) страницы 159, если ко вторымъ частямъ этихъ уравненій присоединимъ члены:

$$-2\lambda x, -2\lambda \eta, -2\lambda z;$$

отбросивъ же члены, заключающіе:

$$\omega^2 x, \omega^2 \eta, \omega^2 z, \frac{x}{R}, \frac{\eta}{R}, \frac{z}{R}$$

и всѣ члены высшаго порядка малости, будемъ имѣть слѣдующія уравненія:

$$mx'' = -2\lambda x - 2m\eta'\omega \sin \Delta, \dots \dots \dots (408, a)$$

$$m\eta'' = -2\lambda \eta + 2m\omega(x' \sin \Delta + z' \cos \Delta), \dots \dots (408, b)$$

$$mz'' = -2\lambda z - 2m\eta'\omega \cos \Delta - mG \dots \dots \dots (408, c)$$

Помноживъ первое изъ нихъ на x' , второе — на η' , третье — на z' и сложивъ, получимъ:

$$\frac{d\left(\frac{mu^2}{2}\right)}{dt} = -mG \frac{dz}{dt}, \dots \dots \dots (409)$$

такъ какъ:

$$-2\lambda(xx' + \eta\eta' + zz') = 0,$$

потому что точка остается на поверхности сферы. Уравненіе (409) имѣетъ интегралъ:

$$\frac{u^2}{2} = h - Gz^* \dots \dots \dots (410)$$

Исключивъ теперь λ изъ первыхъ двухъ уравненій (408, a) и (408, b), получимъ:

$$\frac{d(x\eta' - \eta x')}{dt} = \omega \sin \Delta \frac{d(x^2 + \eta^2)}{dt} + 2xz'\omega \cos \Delta.$$

*) Это интегралъ приближенныхъ дифференціальныхъ уравненій (408); не трудно убѣдиться, что интегралъ точныхъ дифференціальныхъ уравненій имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{mu^2}{2} = H + mg \frac{R^2}{\rho} + \frac{m\omega^2}{2} (z^2 + \eta^2) \dots \dots (410 \text{ bis})$$

и отклоненія маятника отъ вертикальной линіи столь малы, что пренебръчь членами, заключающими вторыя степени клоненія, сравнительно съ членами, заключающими только степени этого угла, то можно будетъ въ предыдущемъ и отбросить членъ, заключающій β' . Въ самомъ дѣлѣ, въ прямоугольныя координаты движущейся точки въ сферѣ координатахъ l, φ, ψ :

$$x = l \sin \varphi \cos \psi, \quad y = l \sin \varphi \sin \psi, \quad z = -l \cos \varphi,$$

предыдущее уравненіе приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d \sin^2 \varphi \cdot \psi'}{dt} = 2l^2 \omega \varphi' (\cos \varphi \sin \varphi \sin \Delta + \sin^2 \varphi \cos \Delta \cos \psi);$$

въ здѣсь $\sin \varphi$ — чрезъ φ и $\cos \varphi$ — чрезъ 1, увидимъ, что часть этого уравненія получитъ такой видъ:

$$2l^2 \omega \varphi' (\varphi \sin \Delta + \varphi^2 \cos \Delta \cos \psi);$$

у вторымъ членомъ этой части можно пренебръчь. Если отбросимъ членъ, заключающій β' , получимъ другой изъ первостепенныхъ дифференціальныхъ уравненій относительнаго маятника:

$$(x\eta' - \eta x') = C + (x^2 + y^2) \omega \sin \Delta; \dots \dots \dots (411)$$

до забывать, что этотъ интегралъ найденъ при предположеніи отклоненія маятника отъ вертикальной линіи весьма малы. Если выразимъ прямоугольныя координаты въ сферическихъ, то интегралы (410) и (411) получатъ такой видъ:

$$l^2((\varphi')^2 + \sin^2 \varphi (\psi')^2) = 2Gl \cos \varphi + 2h \dots \dots \dots (412)$$

$$l^2 \sin^2 \varphi \cdot \psi' = C + l^2 \omega \sin \Delta \sin^2 \varphi \dots \dots \dots (413)$$

этихъ уравненій пренебрежемъ третьими и высшими степенями угла φ и дальнѣйшія интегрированія произведемъ для нихъ двухъ частныхъ случаевъ.

1) Въ начальный моментъ маятникъ отклоненъ въ плоскости $\psi=0$ на малый уголъ φ_0 , причемъ материальной точкѣ сообщена слѣдующая относительная скорость u_0 по параллели $\varphi=\varphi_0$ къ западу.

$$\varphi'_0=0, \quad u_0=l \sin \varphi_0 \cdot \psi'_0 = l\omega \sin \Delta \sin \varphi_0.$$

Въ этомъ случаѣ постоянныя C и $2h$ будутъ имѣть слѣдующія значенія:

$$C=0, \quad 2h=l^2\omega^2 \sin^2 \Delta \sin^2 \varphi_0 - 2Gl \cos \varphi_0;$$

уравненіе (413) приметъ видъ:

$$\left(\frac{d\psi}{dt} - \omega \sin \Delta\right) \sin^2 \varphi = 0;$$

откуда слѣдуетъ:

$$\psi' = \omega \sin \Delta; \quad \psi = t\omega \sin \Delta.$$

Уравненіе (412) получить вслѣдствіе этого слѣдующій видъ:

$$(\varphi')^2 = 2 \frac{G}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) + \omega^2 \sin^2 \Delta (\sin^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi),$$

или, пренебрегая кубами и высшими степенями φ :

$$(\varphi')^2 = \varepsilon^2 (\varphi_0^2 - \varphi^2); \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{G}{l} + \omega^2 \sin^2 \Delta}.$$

Отсюда видно, что φ не можетъ быть болѣе φ_0 , а потому φ' должна имѣть, въ началѣ движенія, знакъ отрицательный.

$$\frac{-d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} = \varepsilon dt;$$

откуда, интегрируя, получимъ:

$$\varphi = \varphi_0 \cos \varepsilon t.$$

Стало быть, движеніе точки совершается по слѣдующему закону:

$$\varphi = \varphi_0 \cos \varepsilon t, \quad \psi = t\omega \sin \Delta, \dots\dots\dots (414)$$

то есть колебанія маятника совершаются въ вертикальной

юскости, которая равномерно вращается съ угловою скоростью $\omega \sin \Delta$ вокруг вертикальной линии: на северном полушарии вращение совершается по направлению движения стрелокъ, на южномъ — обратно *).

2) Начальное положеніе маятника то же самое, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, но начальная относительная скорость равна нулю:

$$\varphi'_0 = 0, \quad \psi'_0 = 0, \quad u_0 = 0.$$

Въ этомъ случаѣ:

$$C = -l^2 \omega \sin \Delta \sin^2 \varphi_0, \quad 2h = -2Gh \cos \varphi_0.$$

Дифференціальныя уравненія будутъ:

$$\psi' = \omega \sin \Delta \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi} \right)$$

$$(\varphi')^2 = 2 \frac{G}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) - \frac{\omega^2 \sin^2 \Delta}{\sin^2 \varphi} (\sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi_0)^2.$$

Последнее уравненіе, если пренебречь кубами и высшими степенями φ , получить слѣдующій видъ:

$$(\varphi \varphi')^2 = \varepsilon^2 (\varphi_0^2 - \varphi^2)(\varphi^2 - \varphi_1^2), \dots \dots \dots (415)$$

гдѣ:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{G}{l} + \omega^2 \sin^2 \Delta} \dots \dots \dots (416)$$

$$\varphi_1 = \frac{\omega \varphi_0 \sin \Delta}{\varepsilon} \dots \dots \dots (417)$$

Изъ уравненія (415) видно, что φ не можетъ быть болѣе φ_0 не можетъ быть менѣе φ_1 , поэтому можно положить:

$$\varphi^2 = \varphi_0^2 - (\varphi_0^2 - \varphi_1^2) \sin^2 \eta; \dots \dots \dots (418)$$

*) Продолжительность одного размаха равна

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{G}{l} + \omega^2 \sin^2 \Delta}} \quad \text{или} \quad \pi \sqrt{\frac{l}{G}},$$

къ какъ ω^2 есть ничтожная дробь сравнительно съ $\frac{G}{l}$.

тогда уравненіе (415) получить, послѣ надлежащихъ сокращеній, слѣдующій видъ:

$$(\eta')^2 = \varepsilon^2, \quad \eta' = \pm \varepsilon;$$

изъ этихъ двухъ знаковъ мы выберемъ верхній, вслѣдствіе чего η будетъ непрерывно возрастать отъ своего начального значенія $\eta_0 = 0$; возрастаніе η будетъ равномерное:

$$\eta = \varepsilon t.$$

Дифференціальное уравненіе, заключающее ψ' , получить такой видъ:

$$d\psi = \omega dt \sin \Lambda - \frac{\omega \sin \Lambda}{\varepsilon} \frac{\varphi_0^2}{\varphi^3} d\eta$$

$$d\psi = \omega dt \sin \Lambda - \frac{\omega \sin \Lambda}{\varepsilon} \frac{d \operatorname{tg} \eta}{\left(1 + \frac{\varphi_0^2}{\varphi^2} \operatorname{tg}^2 \eta\right)};$$

отсюда, интегрируя, получимъ:

$$\psi = \omega t \sin \Lambda - \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{\varepsilon} \sin \Lambda \operatorname{tg} \eta \right).$$

Стало бытъ движеніе маятника въ этомъ случаѣ совершается по слѣдующему закону:

$$\varphi = \varphi_0 \sqrt{\cos^2 \varepsilon t + \frac{\omega^2}{\varepsilon^2} \sin^2 \Lambda \sin^2 \varepsilon t}, \dots\dots\dots (419)$$

$$\frac{\omega}{\varepsilon} \sin \Lambda \operatorname{tg} \varepsilon t = \operatorname{tg} (\omega t \sin \Lambda - \psi) \dots\dots\dots (420)$$

Представимъ себѣ вертикальную плоскость, вращающуюся вокругъ вертикальной линіи съ угловою скоростью $\omega \sin \Lambda$ по направленію движенія часовыхъ стрѣлокъ; означимъ черезъ Θ уголъ:

$$\Theta = \psi - \omega t \sin \Lambda,$$

составленный съ этою вертикальною плоскостью тою вертикальною плоскостью, въ которой заключается нить маятника; какъ видно изъ уравненія (420), этотъ уголъ Θ — отрицательный.

Введя угол θ , можно исключить ϵ изъ выражений (419) и (420); получимъ:

$$\frac{\varphi^2 \cos^2 \theta}{\varphi_0^2} + \frac{\varphi^2 \sin^2 \theta}{\varphi_1^2} = 1.$$

Замѣнивъ здѣсь малые углы φ_0 , φ , φ_1 ихъ синусами, получимъ видѣніе:

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\eta_1^2}{b^2} = 1, \dots\dots\dots (421)$$

:

$$\xi_1 = l \sin \varphi \cos \theta, \quad \eta_1 = l \sin \varphi \sin \theta; \quad a = l \sin \varphi_0, \quad b = l \sin \varphi_1.$$

Чтобы объяснить себѣ значеніе уравненія (421), представимъ горизонтальную плоскость $\Sigma_1 Ю \Upsilon_1$ (черт. 26), вращающуюся вкругъ вертикальной оси $ЮЗ$ съ угловою скоростью $\omega \sin \Lambda$ въ сторону, указанную оперенною стрѣлкою на чертежѣ 26-мъ. Оси Σ_1 и $Ю \Upsilon_1$ неизмѣнно связаны съ этою вращающеюся плоскостью, чемъ ось Σ_1 составляетъ съ осью X уголъ $l \omega \sin \Lambda$. Величины ξ_1 и η_1 суть координаты, относительно осей Σ_1 и Υ_1 , проекціи движущейся точки на горизонтальную плоскость.

Уравненіе (421) выражаетъ, что точка M чертитъ на вращающейся плоскости $\Sigma_1 \Upsilon_1$ эллипсъ, большая полуось котораго, равная $l \sin \varphi_0$, направлена по оси Σ_1 , а малая полуось равна:

$$b = \frac{\omega \sin \Lambda}{\sqrt{\frac{G}{l} + \omega^2 \sin^2 \Lambda}} l \sin \varphi_0.$$

Движеніе по этому эллипсу совершается въ сторону, указанную оперенною стрѣлкою на чертежѣ 26-мъ.

§ 55. Положенія равновѣсія несвободной матеріальной тѣлѣ.

Матеріальная точка, находящаяся на данной неподвижной поверхности или линіи, можетъ оставаться въ покоѣ въ тѣхъ точкахъ поверхности или линіи, въ которыхъ всѣ силы, приложенныя къ ней, взаимно уравновѣшиваются; такіа положенія матеріальной

несвободной точки называются *положениями равновѣсія ея на данной неподвижной поверхности или линіи*.

Равенства, выражающія, что всѣ силы, приложенныя къ несвободной покоящейся матеріальной точкѣ, взаимно уравновѣшиваются, называются *уравненіями равновѣсія силъ*, приложенныхъ къ этой точкѣ.

Изъ этихъ уравненій выведемъ условія, которымъ должны удовлетворять задаваемыя силы для того, чтобы матеріальная точка могла имѣть положенія равновѣсія на данной поверхности или линіи; эти условія мы будемъ называть *условіями равновѣсія*.

Если эти условія удовлетворены, то изъ тѣхъ же уравненій опредѣлятся положенія равновѣсія матеріальной точки.

Условія равновѣсія различны, смотря по степени ограниченія свободы движенія точки и смотря потому, существуетъ ли треніе, или нѣтъ.

Поэтому мы рассмотримъ отдѣльно различныя степени стѣсненія свободы матеріальной точки.

1) *Матеріальная точка находится на гладкой неподвижной удерживающей поверхности.*

Пусть

$$f(x, y, z) = 0 \dots \dots \dots (422)$$

есть уравненіе поверхности; поверхность гладкая, то есть, нѣтъ тренія между нею и матеріальною точкою.

Въ тѣхъ точкахъ этой поверхности, въ которыхъ матеріальная точка можетъ оставаться въ покоѣ, задаваемыя силы должны уравновѣшиваться съ реакціею поверхности; поэтому уравненія равновѣсія будутъ:

$$X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (423)$$

Исключивъ λ изъ этихъ уравненій, получимъ два уравненія:

$$X \frac{\partial f}{\partial y} - Y \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad Y \frac{\partial f}{\partial z} - Z \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

или

$$\frac{X}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} = \frac{Y}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)} = \frac{Z}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} \dots \dots \dots (424)$$

Эти два равенства выражают условія равновѣсія, которыхъ должны удовлетворять задаваемые силы въ тѣхъ точкахъ поверхности, въ которыхъ матерьяльная точка можетъ быть въ покоѣ.

Условіе, выражаемое равенствами (424), состоитъ въ томъ, что *равнодѣйствующая задаваемыхъ силъ должна быть нормальна къ поверхности въ тѣхъ точкахъ поверхности, въ которыхъ матерьяльная точка можетъ быть въ покоѣ.*

Если задаваемыя силы не удовлетворяютъ этому условію ни въ какой точкѣ поверхности, то матерьяльная точка не имѣетъ вовсе положеній равновѣсія на этой поверхности при дѣйствіи на нее такихъ силъ.

Напримѣръ, тяжелая матерьяльная точка не можетъ находиться въ равновѣсіи на гладкой плоскости, наклонной къ горизонту.

Тѣ точки поверхности, въ которыхъ условія (424) удовлетворяются, суть положенія равновѣсія матерьяльной точки; координаты такихъ точекъ опредѣляются изъ равенствъ (424) и изъ уравненія (422).

Напримѣръ, положенія равновѣсія тяжелой точки, находящейся на поверхности удерживающей сферы, опредѣляются изъ равенствъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

$$2mgx = 0, \quad 2mgz = 0,$$

если положительная ось $Y^{\text{н}}$ направлена вертикально внизъ.

Эти уравненія имѣютъ слѣдующія два рѣшенія:

$$1) \quad x=0, \quad z=0, \quad y=+R$$

$$2) \quad x=0, \quad z=0, \quad y=-R,$$

слѣдовательно, положеній равновѣсія въ этомъ случаѣ два, одно на самой нижней, другое на самой верхней точкахъ сферы.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ оказывается, что положеній равновѣсія безчисленное множество и что они образуютъ сплошныя линіи на поверхности или занимаютъ собою цѣлыя площади на поверхности и даже иногда всю поверхность; на примѣръ:

Примѣръ 42-й. Матерьяльная точка, находящаяся на той же сферической поверхности и подверженная силѣ тяжести и силѣ:

$$m\mu^3\sqrt{x^2+z^2},$$

притягивающей ее къ оси Y^{oz} , будетъ имѣть положенія равновѣсія, опредѣляемыя изъ равенствъ:

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

$$\frac{-\mu^3x}{2x}=\frac{g}{2y}=\frac{-\mu^3z}{2z},$$

или:

$$x(g+\mu^2y)=0, \quad z(g+\mu^2y)=0.$$

Эти положенія равновѣсія слѣдующія:

1) точка: $x=0, z=0, y=+R,$

2) точка: $x=0, z=0, y=-R,$

и 3) всякая изъ точекъ параллельнаго круга:

$$y=-\frac{g}{\mu^2}, \quad x^2+z^2=R^2-\frac{g^2}{\mu^4}.$$

Тяжелая матерьяльная точка, находящаяся на горизонтальной плоскости, имѣетъ положеніе равновѣсія во всякой точкѣ плоскости.

Матерьяльная точка, находящаяся на удерживающей сферѣ и притягиваемая къ центру сферы силою пропорціональною разстоянію отъ него, имѣетъ положеніе равновѣсія во всякой точкѣ сферы.

Если задаваемыя силы, приложенныя къ матерьяльной точкѣ, имѣютъ потенциалъ U , то уравненія (423) примутъ слѣдующій видъ:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial U}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial U}{\partial z}+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0; \dots (425)$$

исключивъ изъ нихъ λ , получимъ уравненія:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial s} p = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial s} q = 0, \dots\dots\dots (426)$$

гдѣ:

$$p = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)}, \quad q = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)}.$$

Изъ уравненій (426) и уравненія поверхности (422) опредѣляются координаты положеній равновѣсія материальной точки.

Пусть M_1 есть одна изъ такихъ точекъ, U_1 численное значеніе, получаемое функціею U въ этой точкѣ; x_1, y_1, s_1 — координаты этой точки, удовлетворяющія уравненію поверхности (422) и уравненіямъ (426).

Пусть M есть другая точка поверхности, безконечно-близкая къ M_1 ; координаты этой точки M : $x_1 + \delta x, y_1 + \delta y, s_1 + \delta s$ также удовлетворяютъ уравненію (422), а потому:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial s} \delta s = 0, \dots\dots\dots (427)$$

гдѣ въ производныя подставлены координаты точки M_1 .

Изъ равенства (427) слѣдуетъ, что

$$\delta s = p \delta x + q \delta y \dots\dots\dots (428)$$

Въ точкѣ M потенциальная функція U имѣетъ слѣдующее численное значеніе:

$$U_1 + \delta U + \delta^2 U + \dots\dots,$$

гдѣ

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial s} \delta s$$

и гдѣ въ производныя подставлены координаты x_1, y_1, s_1 точки M_1 .

Кромѣ того, δs связано съ δx и δy равенствомъ (428), к которому

$$\delta U = \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial s} p\right) \delta x + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial s} q\right) \delta y;$$

а такъ какъ координаты x , y , z удовлетворяютъ равенствамъ (426), то въ этой точкѣ:

$$\delta U = 0,$$

если только δx , δy , δz удовлетворяютъ равенству (427).

Изъ этого слѣдуетъ, что U , есть, либо максимумъ тѣхъ значеній, которыя получаетъ U на поверхности (422), либо минимумъ этихъ значеній, либо такое значеніе, для котораго

$$\delta U = 0$$

при всякихъ перемѣщеніяхъ изъ этой точки M , по поверхности.

И такъ, если матеріальная точка, подверженная силамъ, имѣющимъ потенциалъ U , находится на неподвижной гладкой удерживающей поверхности, то положенія равновѣсія матеріальной точки суть тѣ точки поверхности, въ которыхъ значенія функции U на поверхности имѣютъ максимумъ или минимумъ, и вообще всѣ тѣ точки поверхности, въ которыхъ

$$\delta U = 0.$$

Напримѣръ:

Примѣръ 43-й. Матеріальная точка, находящаяся на поверхности эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \dots \dots \dots (429)$$

и притягиваемая къ центру эллипсоида силою, пропорціальною разстоянію отъ этой точки, имѣетъ положенія равновѣсія во всѣхъ тѣхъ точкахъ поверхности, въ которыхъ:

$$\delta U = \delta \left(-\frac{\mu^2}{2} r^2 \right) = -\mu^2 (x\delta x + y\delta y + z\delta z) = 0, \dots \dots (430)$$

причемъ δx , δy , δz удовлетворяютъ равенству:

$$\frac{x\delta x}{a^2} + \frac{y\delta y}{b^2} + \frac{z\delta z}{c^2} = 0, \dots \dots \dots (431)$$

а x , y , z , — уравненію (429).

Такихъ точекъ шесть:

Двѣ — на концахъ малой оси, въ которыхъ значенія функціи U на поверхности эллипсоида имѣютъ максимумъ.

Двѣ — на концахъ большой оси, въ которыхъ U имѣетъ минимумъ значеній ея на поверхности эллипсоида.

Кромѣ того, точки, находящіяся на концахъ средней оси, суть также положенія равновѣсія; въ самомъ дѣлѣ, исключивъ изъ (430) и (431) произведеніе $u\delta u$, получимъ слѣдующее выраженіе для δU :

$$\delta U = -\mu^2 \left(\frac{(a^2 - b^2)}{a^2} x\delta x + \frac{(c^2 - b^2)}{c^2} z\delta z \right),$$

изъ него слѣдуетъ, что δU обращается въ нуль въ точкахъ:

$$x=0, z=0, y=\pm b.$$

Линіи пересѣченія поверхностей уровня функціи $U(x, y, z)$ съ поверхностью (422) называются *линіями уровня* значеній функціи U на этой поверхности.

Мы знаемъ (стр. 113), что сила, имѣющая потенциалъ U и приложенная къ матеріальной точкѣ, направлена по положительной нормали къ поверхности уровня, проходящей черезъ положеніе, занимаемое матеріальною точкою; величина силы равна ΔU .

Изъ этого слѣдуетъ, что если матеріальная точка будетъ находится на поверхности (422), то сила ΔU будетъ перпендикулярна къ той линіи уровня, на которой находится матеріальная точка; сила эта направлена въ сторону поверхностей уровня, имѣющихъ параметры большіе, чѣмъ параметръ C той линіи уровня, на которой находится матеріальная точка. Проекція этой силы на касательную плоскость къ поверхности будетъ, поэтому, перпендикулярна къ линіи уровня C и будетъ направлена въ ту сторону, гдѣ находятся на поверхности линіи уровня съ параметрами, большими C .

Если въ точкѣ M , значенія потенциальной функціи U на поверхности имѣютъ наибольшую величину U_0 , то во всѣхъ точкахъ поверхности, безконечно-близкихъ къ M , функція U имѣетъ численныя значенія, меньшія U_0 ; такъ какъ въ точкѣ M , вели-

чина δU обращается въ нуль, то численное значеніе функціи U въ точкѣ M будетъ:

$$U_0 + \delta^2 U + \dots\dots\dots,$$

а такъ какъ U_0 есть максимумъ, то δU должна быть отрицательною для всякихъ бесконечно-малыхъ перемѣщеній $\overline{M_0 M}$ по поверхности.

Изъ этого слѣдуетъ, что если U_0 есть максимумъ, то линіи уровня, ближайшія къ точкѣ M_0 , окружаютъ эту точку со всѣхъ сторонъ и имѣютъ параметры меньшіе U_0 .

Поэтому во всѣхъ точкахъ поверхности, сосѣднихъ съ точкою M_0 , проекція силы на касательную плоскость стремится приблизить материальную точку къ точкѣ M_0 ; на примѣръ, на чертежѣ 27-мъ, на которомъ изображены линіи уровня потенціальной функціи:

$$U = -\frac{\mu^2}{2} r^2$$

на поверхности эллипсоида (примѣръ 43-й), точка C , находящаяся на концѣ малой оси эллипсоида, есть мѣсто наибольшаго значенія функціи U ; эта точка окружена линіями уровня, параметры которыхъ менѣ величины

$$U_0 = -\frac{\mu^2}{2} c^2;$$

притомъ, чѣмъ далѣе линія уровня отъ точки C , тѣмъ менѣ ея параметръ. Если помѣстить материальную точку въ одну изъ точекъ M' , M'' , M''' , $\dots\dots$ по сосѣдству съ точкою C , то проекція силы на материальную плоскость будетъ направлена внутрь площади, ограничиваемой линією уровня и будетъ, слѣдовательно, стремиться приблизить материальную точку къ точкѣ C .

Положимъ, что U_0 есть максимумъ значеній функціи U на данной поверхности; если материальная точка, находившаяся въ покоѣ въ точкѣ M_0 , будетъ отклонена въ точку M_0 поверхности, весьма близкую къ M_0 , и здѣсь ей будетъ сообщена весьма малая

начальная скорость v_0 , то она станетъ совершать на поверхности движеніе, удовлетворяющее закону живой силы:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U - U_0.$$

Такъ какъ U и U_0 менѣе U_* , то:

$$U_0 = U_* - k_0^2, \quad U = U_* - k^2,$$

поэтому:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + k_0^2 - k^2 \dots \dots \dots (432)$$

Изъ этой формулы видно, что матеріальная точка не можетъ вступить въ тѣ мѣста поверхности, въ которыхъ

$$k^2 > \frac{mv_0^2}{2} + k_0^2;$$

слѣдовательно, точка будетъ совершать свое движеніе вблизи точки M_* , не выходя за предѣлы площади, ограниченной тою линіею уровня, параметръ которой равенъ:

$$U_1 = U_* - \left(\frac{mv_0^2}{2} + k_0^2 \right).$$

Изъ этого слѣдуетъ, что тѣ точки поверхности, въ которыхъ потенциальная функція имѣетъ максимумъ значеній ея на поверхности, суть *положенія устойчиваго равновѣсія* матеріальной точки.

Напротивъ, тѣ точки поверхности, въ которыхъ потенциальная функція имѣетъ минимумъ значеній ея на поверхности, суть *положенія неустойчиваго равновѣсія* матеріальной точки. Въ каждой такой точкѣ:

$$\delta U = 0, \quad \delta^2 U > 0,$$

для всякихъ безконечно-малыхъ перемѣщеній по поверхности; поэтому, въ ближайшемъ сосѣдствѣ съ такою точкою, линія

уровня имѣютъ параметры большіе этого минимума и притомъ каждая линія уровня окружаетъ точку минимума со всѣхъ сторонъ (см. на чертежѣ 27-мъ, линіи уровня, окружающія точку A , находящуюся на концѣ большой полуоси эллипсоида).

Въ сосѣдствѣ съ такою точкою неустойчиваго равновѣсія, сила, имѣющая потенціалъ U , стремится удалить матерьяльную точку отъ положенія равновѣсія (см. черт. 27-й).

Въ тѣхъ точкахъ поверхности, въ которыхъ $\delta U = 0$, но величина $\delta^2 U$ имѣетъ знакъ положительный или отрицательный, смотря по направленію перемѣщенія, въ такихъ точкахъ положеніе равновѣсія устойчиво для однихъ перемѣщеній и неустойчиво — для другихъ.

Примѣромъ такихъ положеній равновѣсія можетъ служить, въ примѣрѣ 43-мъ, точка B (чертежъ 27-й), находящаяся на концѣ средней оси эллипсоида. Въ сосѣдствѣ съ этою точкою линіи уровня имѣютъ слѣдующее расположеніе.

Черезъ самую точку B проходятъ два круговыя сѣченія kBk' и $k_1Bk'_1$ эллипсоида, это суть линіи уровня съ параметромъ:

$$U_b = -\frac{\mu^2}{2} b^2;$$

внутри угловъ k_1Bk и $k'Bk'_1$ находятся линіи уровня съ параметрами большими U_b , внутри же угловъ $k'Bk_1$ и k'_1Bk — линіи уровня съ параметрами меньшими U_b .

Если матерьяльная точка будетъ отклонена изъ точки B въ точку g (см. черт. 27), то сила, приложенная къ ней, будетъ стремиться удалить ее отъ B ; напротивъ, при отклоненіи матерьяльной точки въ точку h , сила будетъ стремиться приблизить ее къ B .

Подобныя точки причисляются къ положеніямъ неустойчиваго равновѣсія.

И такъ, можемъ сказать, что если матерьяльная точка, подверженная силамъ имѣющимъ потенціалъ U , находится на неподвижной гладкой удерживающей поверхности, то поло-

женія устойчиваго равновѣсія суть тѣ точки поверхности, въ которыхъ

$$\delta U = 0, \delta^2 U < 0 \dots\dots\dots (433)$$

Въ каждомъ изъ положеній равновѣсія реакція поверхности равна и противоположна равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ, когда матерьяльная точка находится въ покоѣ.

2) *Матерьяльная точка находится на гладкой неподвижной неударивающей поверхности.*

Реакція такой поверхности не можетъ быть отрицательною, а потому матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ только въ тѣхъ точкахъ неударивающей поверхности, въ которыхъ равнодѣйствующая задаваемыхъ силъ нормальна къ поверхности и направлена *по отрицательной нормали, или равна нулю.*

Напримѣръ, тяжелая матерьяльная точка, прикрѣпленная къ одному концу гибкой нерастяжимой нити, другой конецъ которой неподвиженъ, имѣетъ только одно положеніе равновѣсія: въ самой нижней точкѣ сферы радіуса, равнаго длинѣ нити.

Обратно, тяжелая матерьяльная точка, находящаяся на наружной поверхности неподвижнаго непроницаемаго шара, имѣетъ только одно положеніе равновѣсія въ самой верхней точкѣ шара.

Если задаваемые силы имѣютъ потенціалъ U , то положенія равновѣсія на неударивающей поверхности находятся въ такихъ точкахъ ея, въ которыхъ:

$$\delta U = 0$$

для безконечно-малыхъ перемѣщеній матерьяльной точки вдоль по поверхности и притомъ

$$\delta U \leq 0$$

для безконечно-малыхъ перемѣщеній матерьяльной точки въ свободную сторону пространства.

Положенія устойчиваго равновѣсія суть тѣ точки поверхности, въ которыхъ

$$\delta U = 0, \delta^2 U < 0 \dots\dots\dots (434)$$

для перемѣщеній вдоль по поверхности, и притомъ

$$\delta U < 0, \text{ или } \delta U = 0, \delta^2 U < 0 \dots \dots \dots (435)$$

для перемѣщеній въ свободную сторону пространства.

Напримѣръ, положеніе равновѣсія тяжелой матерьяльной точки, находящейся на сферѣ, не удерживающей внутри своей полости, есть положеніе устойчивое, потому что въ этой точкѣ, для перемѣщеній по поверхности сферы:

$$\delta U = mg\delta y = 0, \delta^2 U = mg\delta^2 y < 0 \text{ *)},$$

для всякихъ же перемѣщеній въ свободную сторону y уменьшается, а слѣдовательно, для такихъ перемѣщеній:

$$\delta U = mg\delta y < 0.$$

Положеніе же равновѣсія на верхней точкѣ непроницаемаго шара есть положеніе неустойчивое, потому что въ этой точкѣ:

$$x=0, z=0, y=-l$$

$$\delta U = mg\delta y = 0, \delta^2 U = mg \frac{(\delta x)^2 + (\delta z)^2}{l} > 0$$

для перемѣщеній матерьяльной точки вдоль по поверхности.

Приводимъ нѣсколько примѣровъ опредѣленія положеній равновѣсія матерьяльной точки на удерживающихъ и неудерживающихъ поверхностяхъ.

Примѣръ 44-й. Тяжелая матерьяльная точка прикрѣплена къ одному концу гибкой нерастяжимой нити; эта нить перекинута черезъ безконечно-

*) $y^2 = l^2 - x^2 - z^2; y\delta y = -x\delta x - z\delta z$

$$y\delta^2 y = -(\delta y)^2 - (\delta x)^2 - (\delta z)^2$$

Въ точкѣ: $x=0, z=0, y=l$:

$$\delta y = 0, \delta^2 y = -\frac{(\delta x)^2 + (\delta z)^2}{l} < 0.$$

малый блокъ съ неподвижною осью и имѣетъ на другомъ концѣ гирю, масса которой равна Q , между тѣмъ, какъ масса матерьяльной точки равна m . Определить положеніе равновѣсія матерьяльной точки на наклонной плоскости, составляющей уголъ J съ горизонтомъ и проходящей черезъ точку K (черт. 28) вертикальной линіи, проведенной внизъ черезъ центръ O блока; расстояние OK равно s .

Натяженіе нити или реакцію ея, приложенную къ матерьяльной точкѣ M , можно разсматривать, какъ силу постоянной величины gQ , направленную къ точкѣ O .

Въ этомъ случаѣ вопросъ можетъ быть рѣшенъ слѣдующимъ образомъ:

Точка M можетъ находиться въ равновѣсіи только въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ точку O и перпендикулярной къ наклонной плоскости; въ этой плоскости она будетъ находиться въ покоѣ въ такомъ положеніи, при которомъ проэкція силы тяжести точки M на направление ML (черт. 28) равна проэкціи реакціи нити на направление MK ; означая уголъ OMK чрезъ φ , будемъ имѣть слѣдующее равенство:

$$gQ \cos \varphi = mg \sin J,$$

которое должно быть удовлетворено въ положеніяхъ равновѣсія матерьяльной точки.

Изъ этого уравненія опредѣлится величина косинуса угла φ :

$$\cos \varphi = \frac{m}{Q} \sin J;$$

чтобы рѣшеніе было возможно, необходимо, чтобы Q было болѣе $m \sin J$.

Если наклонная плоскость не удерживаетъ матерьяльную точку отъ перемѣщеній вверхъ, то, для равновѣсія точки на плоскости, необходимо, чтобы было

$$mg \cos J \geq gQ \sin \varphi.$$

Это условіе будетъ удовлетворено во всякомъ случаѣ, если φ отрицательное, то есть, если точка O ниже точки K ; если же O выше точки K , то оно будетъ удовлетворено въ томъ случаѣ, когда

$$\frac{m^2}{Q^2} \cos^2 J \geq \sin^2 \varphi,$$

то есть, когда:

$$\frac{m^2}{Q^2} \cos^2 J \geq 1 - \frac{m^2}{Q^2} \sin^2 J, \quad \frac{m}{Q} \geq 1.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что на неудерживающей плоскости равновѣсія возможно при условіи, что Q не болѣе m и не менѣе $m \sin J$.

Если равновѣсіе возможно, то оно будетъ навѣрно устойчивое. Въ самомъ дѣлѣ, при перемѣщеніи точки M по \overline{MK} уголъ φ увеличивается, а, слѣдовательно, проекція силы gQ на это направленіе уменьшается, между тѣмъ, какъ проекція силы mg на направленіе \overline{ML} остается постоянною; поэтому дѣйствіе послѣдней силы становится преобладающимъ и матеріальная точка побуждается къ возвращенію назадъ. Напротивъ, при перемѣщеніи точки по \overline{ML} уголъ φ уменьшается, а, слѣдовательно, дѣйствіе силы gQ становится преобладающимъ надъ дѣйствіемъ силы mg ; поэтому и при такомъ перемѣщеніи, силы побуждаютъ матеріальную точку возвратиться въ положеніе равновѣсія.

Примѣръ 45-й. Положенія равновѣсія тяжелой матеріальной точки на поверхности эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

если къ матеріальной точкѣ, кромѣ силы тяжести, приложена сила постоянной величины gQ , направленная къ центру эллипсоида; ось Z^{000} предполагается направленною вертикально внизъ.

Въ этомъ случаѣ силы имѣютъ слѣдующій потенціалъ:

$$U = g(mx - Qr); \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

а поэтому:

$$\delta U = g(m\delta x - Q\delta r); \quad \delta^2 U = g(m\delta^2 x - Q\delta^2 r),$$

гдѣ:

$$x\delta z = -\frac{c^2}{a^2}x\delta x - \frac{c^2}{b^2}y\delta y;$$

$$x\delta^2 z + (\delta z)^2 = -\frac{c^2}{a^2}(\delta x)^2 - \frac{c^2}{b^2}(\delta y)^2,$$

$$\delta r = \frac{x\delta x + y\delta y + z\delta z}{r} = \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x\delta x}{r} + \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y\delta y}{r}$$

$$\delta^2 r = \frac{(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2 + x\delta^2 z}{r} - \frac{(\delta r)^2}{r} =$$

$$= \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)\frac{(\delta x)^2}{r} + \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)\frac{(\delta y)^2}{r} - \frac{(\delta r)^2}{r}.$$

Исключив δs из δU , получим:

$$\delta U = -g \left[\left(\frac{m}{s} c^2 + \frac{Q}{r} (a^2 - c^2) \right) \frac{x \delta x}{a^2} + \left(\frac{m}{s} c^2 + \frac{Q}{r} (b^2 - c^2) \right) \frac{y \delta y}{b^2} \right],$$

в r означает положительную величину расстояния точки от центра диполя.

Мы найдем следующие положения равновесия:

Точки $x=0, y=0, s=\pm c$; в них:

$$U = -\frac{g}{c} \left[((a^2 - c^2) Q \pm c^2 m) \left(\frac{\delta x}{a} \right)^2 + ((b^2 - c^2) Q \pm c^2 m) \left(\frac{\delta y}{b} \right)^2 \right],$$

в знаки $+$ соответствуют нижней, а знаки $(-)$ — верхней точке; следовательно, нижняя точка есть всегда положение устойчивого равновесия, верхняя же — только тогда, когда

$$Q \geq \frac{c^2 m}{b^2 - c^2}.$$

2) точки $x=0$,

$$\frac{x_1}{c} = -\frac{b}{\sqrt{b^2 - c^2}} \sqrt{\frac{mc}{m^2 c^2 + Q^2 (b^2 - c^2)}}, \quad \frac{y}{b} = \pm \sqrt{1 - \frac{s_1^2}{c^2}};$$

весь:

$$\delta^2 U = -g \left[(a^2 - b^2) \frac{Q (\delta x)^2}{r a^2} - (b^2 - c^2) \frac{Q c^2 y^2 (\delta y)^2}{r^2 s^2 b^2} \right],$$

поэтому в этих точках положение равновесия не представляет полной устойчивости.

3) Точки:

$$y=0, \quad \frac{s_2}{c} = -\frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}} \sqrt{\frac{mc}{m^2 c^2 + Q^2 (a^2 - c^2)}}$$

$$\frac{x}{a} = \pm \sqrt{1 - \frac{s_2^2}{c^2}},$$

в которых

$$\delta^2 U = gQ \left[(a^2 - b^2) \frac{(\delta y)^2}{r b^2} + (a^2 - c^2) \frac{c^2 x^2 (\delta x)^2}{r^2 s^2 a^2} \right];$$

положения равновесия — неустойчивы.

3) *Матерьяльная точка находится на неподвижной негладкой поверхности.*

Для того, чтобы матерьяльная точка могла оставаться въ покоѣ на негладкой неподвижной поверхности, нужно, чтобы сила тренія, приложенная въ матерьяльной точкѣ, уравновѣшивалась съ проеэціею равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ на касательную плоскость. Величина силы тренія равна $x\sqrt{N^2}$, гдѣ $\sqrt{N^2}$ есть положительно взятая величина нормальной реакціи поверхности, а x есть численный коэффициентъ, заключающійся между нулемъ и наибольшимъ коэффициентомъ k_1 тренія покоящейся матерьяльной точки о неподвижную данную поверхность. Реакція N по направленію положительной нормали равна проеэціи равнодѣйствующей F задаваемыхъ силъ на направленіе отрицательной нормали.

На удерживающей поверхности реакція N можетъ быть положительною или отрицательною; при равновѣсіи матерьяльной точки на такой поверхности:

$$F \sin(F, N) = x\sqrt{N^2}, \quad - F \cos(F, N) = N,$$

гдѣ x не менѣе нуля и не болѣе k_1 .

Отсюда слѣдуетъ, что:

$$\operatorname{tg}(F, N) = \pm x, \quad x \leq k_1, \dots \dots \dots (436)$$

гдѣ знакъ $+$ соотвѣтствуетъ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ сила F составляетъ острый уголъ съ положительною нормалью, знакъ $(-)$ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ сила F составляетъ острый уголъ съ отрицательною нормалью.

Число или дробь k_1 можно разсматривать, какъ тангенсъ нѣ-котораго угла ϵ_1 , называемаго *уголомъ тренія* между данною поверхностью и данною матерьяльною точкою при взаимномъ ихъ покоѣ.

Изъ предыдущаго видно, что, для равновѣсія матерьяльной точки на неподвижной негладкой удерживающей поверхности, необходимо, чтобы острый уголъ, составляемый направленіемъ силы F съ положительною или отрицательною нормалью, былъ не болѣе ϵ_1 , гдѣ

$$k_1 = \operatorname{tg} \epsilon_1 \dots \dots \dots (437)$$

Реакція неударивающей поверхности не можетъ быть отрицательною; поэтому, на негладкой неударивающей поверхности матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ въ тѣхъ мѣстахъ поверхности, въ которыхъ направленіе силы F составляетъ съ отрицательною нормалью уголъ, не большій ϵ_1 .

Представимъ себѣ коническую поверхность, вершина которой находится въ какой либо точкѣ M данной неударивающей поверхности, и производящія которой составляютъ острый уголъ ϵ_1 съ отрицательною нормалью къ поверхности. Точка M будетъ положеніемъ равновѣсія матерьяльной точки, если сила F , приложенная къ послѣдней, будетъ имѣть направленіе, не выходящее за предѣлы выше-означеннаго конуса; такой конусъ называется конусомъ тренія.

Вслѣдствіе такого простора условій равновѣсія, мѣста положеній равновѣсія матерьяльной точки на негладкой поверхности занимаютъ на ней цѣлые пояса или площади, во всѣхъ точкахъ которыхъ матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ.

Напримѣръ, тяжелая матерьяльная точка, находящаяся на наружной поверхности твердаго негладкаго неподвижнаго шара, можетъ оставаться въ покоѣ во всѣхъ тѣхъ точкахъ поверхности, въ которыхъ направленіе нормали, проведенной къ центру шара, составляетъ съ направленіемъ силы тяжести уголъ не большій ϵ_1 ; всѣ такія точки находятся на томъ сегментѣ сферической поверхности, который выше уровня:

$$y = -R \cos \epsilon_1,$$

(ось Y^{000} направлена вертикально внизъ); матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ во всѣхъ точкахъ этой части поверхности сферы.

Тяжелая матерьяльная точка можетъ оставаться въ покоѣ во всѣхъ точкахъ наклонной плоскости, составляющей съ горизонтомъ уголъ J , если только уголъ J не болѣе угла ϵ_1 тренія между покоящеюся матерьяльною точкою и наклонною плоскостью.

Примѣръ. Опредѣлить ту часть поверхности эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

всѣ точки которой суть положенія равновѣсія тяжелой матерьяльной точки, находящейся на наружной поверхности эллипсоида; положительная ось Z^{00} параллельна направленію силы тяжести; коэффициентъ тренія покоя $k_1=0,16$.

Эта часть поверхности заключаетъ въ себѣ самую высшую точку эллипсоида и ограничена линією пересѣченія поверхности его съ коническою поверхностью:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} 0,0256.$$

Примѣръ 46-й. Тяжелая матерьяльная точка находится на наклонной плоскости и притягивается къ точкѣ O (черт. 28) силою, прямопропорціо-нальному разстоянію отъ этой точки; если матерьяльная точка находится въ точкѣ K , то величина этой силы равна gQ , гдѣ Q меньше m (массы матерьяльной точки). Определить положенія равновѣсія матерьяльной точки на наклонной плоскости, принимая въ расчетъ треніе.

Примемъ точку K за начало координатныхъ осей, направленныхъ такъ: положительная ось Y^{00} внизъ по линіи наибольшаго ската по на-клонной плоскости, ось X^{00} горизонтально, ось Z^{00} по нормали къ плос-кости, вверхъ; тогда координаты точки O будутъ: $x=0$, $y=-c \sin J$, $z=c \cos J$.

Проекція на оси координатъ равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ суть:

$$X = -Qg \frac{x}{c}, \quad Y = mg \sin J - Qg \frac{y + c \sin J}{c}$$

$$Z = -mg \cos J + Qg \cos J.$$

Равновѣсіе матерьяльной точки на плоскости возможно въ тѣхъ поло-женіяхъ ея, въ которыхъ:

$$-xZ = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad x \leq \operatorname{tg} \varepsilon_1,$$

или:

$$x \cos J \left(1 - \frac{Q}{m}\right) = \sqrt{\frac{Q^2}{m^2} \frac{x^2}{c^2} + \left(\frac{Q}{m} \frac{y}{c} - \sin J \left(1 - \frac{Q}{m}\right)\right)^2}.$$

Всѣ положенія равновѣсія заключаются внутри круга:

$$x^2 + \left(y - c \sin J \left(\frac{m}{Q} - 1\right)\right)^2 = \left(\frac{m}{Q} - 1\right)^2 c^2 \cos^2 J \operatorname{tg}^2 \varepsilon_1.$$

итръ котораго представляет положеніе равновѣсія на гладкой наклонной плоскости, а радіусъ равенъ:

$$\left(\frac{m}{Q} - 1\right) c \cos J \operatorname{tg} \varepsilon_1.$$

Каждой величинѣ x соответствуетъ своя окружность радіуса

$$x \left(\frac{m}{Q} - 1\right) c \cos J.$$

Примѣръ 47-й. Определить мѣсто положеній равновѣсія въ примѣрѣ мѣ, предполагая существованіе силы тренія между наклонною плоскостью матеріальною точкою m .

Расположивъ оси координатъ такъ, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, найдемъ, что проекція равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ суть:

$$X = -Qg \frac{x}{r}, \quad Y = mg \left(p \sin J - \frac{Q}{m} \frac{y}{r}\right), \quad Z = -mgr \cos J,$$

$$p = 1 - \frac{Q}{m} \frac{c}{r}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + c^2 + 2cy \sin J.$$

Всѣ положенія равновѣсія заключаются внутри кривой линіи:

$$x^2 + \left(y - c \sin J \left(\frac{mr}{Qc} - 1\right)\right)^2 = \left(\frac{mr}{Qc} - 1\right)^2 c^2 \cos^2 J \operatorname{tg}^2 \varepsilon_1.$$

4) *Матеріальная точка находится на неподвижной кривой линіи.*

Матеріальная точка, находящаяся на гладкой неподвижной кривой линіи, можетъ оставаться въ покоѣ въ тѣхъ точкахъ кривой, въ которыхъ проекція задаваемой силы на касательную к кривой равна нулю, то есть тамъ, гдѣ:

$$X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{ds}{ds} = 0. \dots\dots\dots (438)$$

Если, при отклоненіи матеріальной точки изъ ея положенія равновѣсія на удерживающей кривой, сила F побуждаетъ ее возвратиться въ это положеніе, то такое положеніе равновѣсія — устойчивое.

Когда сила F имѣетъ потенциалъ $U(x, y, z)$, то проекція ея на направленіе касательной къ кривой выразится такъ:

$$\pm F \cos (F, v) = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{ds};$$

такъ что, если координаты x, y, z точекъ кривой линіи будутъ выражены функціями отъ s , то будетъ:

$$\pm F \cos (F, v) = \frac{dU}{ds}, \dots \dots \dots (439)$$

гдѣ верхній знакъ относится къ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ скорость направлена въ сторону возрастающихъ s .

Положенія равновѣсія суть тѣ точки кривой линіи, въ которыхъ

$$\frac{dU}{ds} = 0; \dots \dots \dots (440)$$

притомъ положенія устойчиваго равновѣсія суть такія точки кривой, въ которыхъ:

$$\frac{d^2 U}{ds^2} < 0, \dots \dots \dots (441)$$

т.е. тѣ, въ которыхъ значенія, принимаемыя функціею $U(s)$ на кривой линіи, имѣютъ максимумъ.

Примѣръ 48-й. Тяжелая матерьяльная точка находится на винтовой линіи:

$$x = R \cos \left(\frac{s \cos \alpha}{R} \right), \quad y = R \sin \left(\frac{s \cos \alpha}{R} \right), \quad z = s \sin \alpha,$$

ось которой вертикальна (ось Z^{00} направлена снизу вверхъ); матерьяльная точка отталкивается отъ начала координатъ силою, обратно пропорціо-
нальною квадрату разстоянія; опредѣлить положенія равновѣсія.

Здѣсь:

$$U = -mgz - \frac{m\mu^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -m \left(gs \sin \alpha + \frac{\mu^2}{\sqrt{R^2 + s^2 \sin^2 \alpha}} \right);$$

$$\frac{dU}{ds} = -mg \sin \alpha \left(1 - \frac{\mu^2}{g} \frac{s \sin \alpha}{r^3} \right)$$

$$\frac{d^2 U}{ds^2} = m\mu^2 \sin^2 \alpha \frac{(3R^2 - 2r^2)}{r^5}; \quad r^2 = R^2 + s^2 \sin^2 \alpha.$$

Первая производная отъ U обращается въ нуль въ тѣхъ точкахъ кривизны, въ которыхъ:

$$s = \frac{gr^3}{\mu^2 \sin \alpha};$$

какъ r есть величина положительная, то и s болѣе нуля, слѣдовательно, положенія равновѣсія находятся только на той части кривой, которая выше плоскости XU .

Последнее уравненіе можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$r^6 - \frac{\mu^4}{g^2} s^2 \sin^2 \alpha = 0$$

$$(r^3)^3 - \frac{\mu^4}{g^2} r^2 + \frac{\mu^4}{g^2} R^2 = 0 \dots\dots\dots (443)$$

Въ положительные корни этого уравненія третьей степени, которые нѣе R^2 , опредѣляютъ положенія равновѣсія; такихъ корней можетъ только два, такъ какъ при $r^3 = +\infty$ и при $r^3 = R^2$ первая часть уравненія (443) имѣетъ знакъ положительный.

ти два корня будутъ дѣйствительные, если будетъ удовлетворено:

$$R^2 < \frac{2}{3} r_0^3, \quad r_0^3 = \frac{\mu^3}{g\sqrt{3}}.$$

Величина r_0^3 есть корень производной первой части уравненія (443) то есть:

$$3(r_0^3)^2 - \frac{\mu^4}{g^2} = 0;$$

изъ двухъ корней уравненія (443), большихъ R^2 , одинъ долженъ менѣе, а другой — болѣе r_0^3 ; означимъ первый черезъ r_1^3 , второй — r_2^3 .

какъ какъ

$$r_2^3 > r_0^3 > \frac{3}{2} R^2,$$

то корень r_2^3 опредѣляетъ навѣрно положеніе устойчиваго равнове-

величина и направленіе силы F , приложенной къ матеріальноточекъ, находящейся въ покоѣ въ одномъ изъ положеній равновѣсія на кривой, представляетъ величину и направленіе давленія,

производимого точкою на кривую (§ 52); поэтому реакція кривой линіи равна и прямопротивоположна силѣ F .

Если кривая линія есть линія пересѣченія двухъ неподвижныхъ гладкихъ поверхностей:

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0,$$

то реакціи этихъ поверхностей опредѣлятся, какъ составляющія, по нормалямъ N_1 и N_2 , реакціи кривой линіи, то есть, величины \mathfrak{N}_1 и \mathfrak{N}_2 опредѣлятся изъ равенствъ (379, а) и (379, б), если въ нихъ сдѣлать Kf_1 и Kf_2 равными нулю.

5) *Матерьяльная точка находится на пересѣченіи трехъ неподвижныхъ поверхностей, пересѣкающихся въ одной точкѣ.*

Если всѣ три поверхности удерживающія, то положеніе точки исполнѣ опредѣлено. Реакціи поверхностей:

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0, \quad f_3(x, y, z) = 0$$

опредѣлятся изъ равенствъ:

$$\left. \begin{aligned} X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x} &= 0 \\ Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial y} &= 0 \\ Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (444)$$

$$\mathfrak{N}_1 = \lambda_1 \Delta f_1, \quad \mathfrak{N}_2 = \lambda_2 \Delta f_2, \quad \mathfrak{N}_3 = \lambda_3 \Delta f_3.$$

Давленіе матерьяльной точки на точку пересѣченія этихъ трехъ поверхностей имѣетъ величину и направленіе силы F ; уравненія (444) выражаютъ, что реакціи \mathfrak{N}_1 , \mathfrak{N}_2 , \mathfrak{N}_3 суть составляющія по нормалямъ N_1 , N_2 , N_3 силы, равной и прямопротивоположной силѣ F .

Если матерьяльная точка помѣщена въ точкѣ пересѣченія четырехъ или большаго числа неподвижныхъ поверхностей, то величины реакцій этихъ поверхностей окажутся неопредѣленными; напримѣръ, въ случаѣ четырехъ поверхностей, можемъ приписать

вольную величину реакцій \mathfrak{R}_4 , тогда величины реакцій \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{R}_2 определяются тѣмъ, что геометрическая сумма всѣхъ четырехъ иъ и силы F должна быть равна нулю:

$$\overline{\mathfrak{R}_1} + \overline{\mathfrak{R}_2} + \overline{\mathfrak{R}_3} + \overline{\mathfrak{R}_4} + \overline{F} = 0 \quad *)$$

56. Импульсъ силы.

ъ началѣ параграфа 23 было сказано, что понимаютъ подѣ иъ количества движенія матерьяльной точки, какими едини оно измѣряется, какъ оно изображается длиною и что ають подѣ именемъ проекцій количества движенія.

Для выхода изъ этой неопредѣленности, приходится принимать въ гъ упругость тѣлъ, образующихъ преграды. Для поясненія, приводящій простой примѣръ.

матерьяльная точка, вѣсъ которой mg , виситъ въ покое на двухъ , неравной длины; первая нить длины l , прикрѣплена верхнимъ концъ началъ координатъ ($x=0$, $y=0$, $z=0$), вторая, длины $(l+c)$, прина верхнимъ концомъ въ точкѣ ($x=0$, $y=0$, $z=-c$). Если предгъ нити нерастяжимыми, то матерьяльная точка будетъ находиться оѣ въ положеніи ($x=0$, $y=0$, $z=l$), причемъ сумма величинъ реак-, \mathfrak{R} , нитей будетъ равна mg ; величины же каждой изъ этихъ реакцій неопредѣленны.

ли же примемъ въ расчетъ упругость нитей, то эта неопредѣленность устранена. Пусть ω_1 и ω_2 суть площади поперечныхъ сѣченій нитей, E_1 , E_2 — ихъ модули упругости, ϵ — удлиненія нитей, такъ что длина перти въ натяженномъ состояніи равна $(l+\epsilon)$, а длина второй нити въ те состояніи равна $(l+c+\epsilon)$; вслѣдствіе растяженія нитей, положеніе тсія матерьяльной точки будетъ въ точкѣ $z=l+\epsilon$.

а основаніи извѣстныхъ законовъ растяженія упругихъ стержней и

$$\frac{\epsilon}{l} = \frac{\mathfrak{R}_1}{E_1 \omega_1}; \quad \frac{\epsilon}{l+c} = \frac{\mathfrak{R}_2}{E_2 \omega_2};$$

ихъ равенствъ и изъ равенства

$$\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 = mg$$

лимъ: величину ϵ и отношеніе между величинами реакцій:

$$\frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}_2} = \frac{E_1 \omega_1}{E_2 \omega_2} \left(1 + \frac{c}{l}\right).$$

Согласно съ этимъ будемъ имѣть ввиду, что количеству движенія матерьяльной точки мы приписываемъ направленіе, совпадающее съ направленіемъ скорости точки; мы будемъ представлять себѣ, что количество движенія изображено длиною, имѣющею направленіе скорости и во столько разъ большею единицы длины, во сколько разъ изображаемое количество движенія болѣе единицы количествъ движенія.

Пусть t и t суть два какіе либо момента времени; координаты точки, величины количества движенія и проэкціи количества движенія на оси координатъ въ эти моменты обозначимъ слѣдующими знаками:

въ моментъ t : $x, y, z, mv, mx', my', mz'$

въ моментъ t : $X, Y, Z, mV, mX', mY', mZ'$ *).

Измѣненіемъ количества движенія матерьяльной точки въ теченіи промежутка времени отъ t до t мы будемъ называть то количество движенія, которое изобразится геометрическою разностью между длинами, изображающими количества движенія mV и mv .

Проекціи на оси координатъ этого измѣненія количества движенія выразятся разностями:

$$mX' - mx', mY' - my', mZ' - mz'.$$

(На черт. 29 количества движенія mV и mv изображены длинами $\overline{AK_2}$ и $\overline{AK_1}$, проведенными изъ какой либо точки A ; измѣненіе количества движенія изобразится длиною \overline{AI} , равною и параллельною длинѣ $\overline{K_1K_2}$).

Положимъ, что свободная матерьяльная точка движется подѣ вліяніемъ дѣйствія приложенной къ ней силы F , которой проэкціи

$$X, Y, Z$$

суть нѣкоторыя функціи времени, координатъ точки и скорости ея.

*) Различіе въ обозначеніяхъ состоитъ въ томъ, что величины, относящіяся къ болѣе позднему моменту t , обозначены прямыми буквами, между тѣмъ какъ величины, относящіяся къ раннему моменту t , обозначены кривыми буквами.

При определенномъ движеніи этой матеріальной точки, координаты ея суть определенныя функціи времени:

$$f_1(t), f_2(t), f_3(t).$$

Помножимъ на dt дифференціальныя уравненія движенія материальной точки, получимъ:

$$d(mx') = Xdt, d(my') = Ydt, d(mz') = Zdt; \dots (445)$$

мы представимъ себѣ, что координаты точки, входящія въ X, Y, Z , замѣнены функціями f_1, f_2, f_3 , и что производныя координатъ решени, заключающіяся въ X, Y, Z , замѣнены производными отъ f_1, f_2, f_3 ; тогда X, Y, Z выразятся функціями времени. Взявъ интегралы въ предѣлахъ отъ t до t отъ обѣихъ частей того изъ равенствъ (445), получимъ:

$$mx' - mx = H_x, my' - my = H_y, mz' - mz = H_z \dots (446)$$

$$H_x = \int_t^t Xdt, H_y = \int_t^t Ydt, H_z = \int_t^t Zdt \dots (447)$$

Изъ равенствъ (446) видно, что измѣненіе количества движенія въ теченіи промежутка времени отъ t до t равняется величинѣ:

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2} \dots \dots \dots (448)$$

Ѣсть такое направленіе, косинусы угловъ котораго съ осями координатъ равны отношеніямъ:

$$\frac{H_x}{H}, \frac{H_y}{H}, \frac{H_z}{H}.$$

Величина H называется *импульсомъ силы F въ теченіи промежутка времени отъ t до t* ; мы приписываемъ импульсу

не только величину, но и направленіе, составляющее съ осями координатъ углы, косинусы которыхъ суть:

$$I \cos(I, X) = I_x, \quad I \cos(I, Y) = I_y, \quad I \cos(I, Z) = I_z.$$

Равенства (446) выражаютъ тогда, что *измѣненіе количества движенія матеріальной точки въ теченіи промежутка времени отъ t до t равняется импульсу силы F въ теченіи того же промежутка времени.*

Величины I_x , I_y , I_z суть проэкціи импульса на оси координатъ.

Величины вторыхъ частей равенствъ (445) суть проэкціи на оси координатъ импульса силы F въ теченіи элемента времени dt ; этотъ *элементарный импульсъ* имѣетъ безконечно-малую величину, если сила F имѣетъ величину конечную.

Разность между величинами живой силы матеріальной точки въ моменты t и t можетъ быть выражена произведеніемъ изъ импульса на полусумму проэкцій скоростей v и v на направленіе импульса; въ самомъ дѣлѣ, помноживъ равенства (446) на x' , y' , z' и сложивъ, получимъ:

$$m v^2 - m v v \cos(v, v) = I v \cos(v, I);$$

помноживъ тѣ же равенства на x' , y' , z' и сложивъ ихъ, получимъ:

$$m v v \cos(v, v) - m v^2 = I v \cos(v, I);$$

отсюда же найдемъ:

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m v^2}{2} = \frac{I}{2} (v \cos(v, I) + v \cos(v, I)) \dots (449)$$

§ 57. Мгновенныя силы.

Нѣкоторыя явленія совершаются подѣ вліяніемъ силъ, дѣйствующихъ въ теченіи весьма малаго промежутка времени, но достигающихъ огромной величины во время своего дѣйствія; таковы, наприимѣръ, силы, развивающіяся при ударахъ тѣлъ, при разложеніи взрывачатыхъ веществъ, и другія.

Подобныя силы, несмотря на краткую продолжительность своего дѣйствія, производить весьма замѣтныя измѣненія въ скоростяхъ тѣхъ тѣлъ, въ которыхъ онѣ приложены, между тѣмъ, какъ перемѣщенія, совершенныя этими тѣлами во время дѣйствія такихъ силъ, сравнительно малы, а часто даже ничтожны.

Положимъ, что въ свободной матерьяльной точкѣ приложена такая сила \mathfrak{F} , которая дѣйствуетъ на нее въ теченіи весьма короткаго промежутка времени ϑ , но сообщаетъ ей за время своего дѣйствія импульсъ замѣтной величины. Пусть t_0 есть моментъ начала дѣйствія этой силы, $t = (t_0 + \vartheta)$ — моментъ окончанія ея дѣйствія; x_0, y_0, z_0 — координаты точки m въ моментъ t_0 ; x'_0, y'_0, z'_0 — проекціи на оси координатъ скорости v_0 точки m въ моментъ t_0 .

Кромѣ того, означимъ: буквами $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ — проекціи этой быстро-дѣйствующей силы \mathfrak{F} на оси координатъ, буквою \mathfrak{Z} величину и направленіе импульса этой силы за все время ея дѣйствія; проекціи этого импульса на оси координатъ будутъ обозначать такъ: $\mathfrak{Z}_x, \mathfrak{Z}_y, \mathfrak{Z}_z$.

Если въ матерьяльной точкѣ не приложено болѣе никакихъ силъ, кромѣ силы \mathfrak{F} , то результатъ окончательнаго дѣйствія этой силы на точку m будетъ заключаться:

въ измѣненіи количества движенія матерьяльной точки за время дѣйствія силы \mathfrak{F} :

$$mx' - mx'_0 = \mathfrak{Z}_x, \quad my' - my'_0 = \mathfrak{Z}_y, \quad mz' - mz'_0 = \mathfrak{Z}_z \dots (450)$$

и въ измѣненіи положенія матерьяльной точки въ теченіи того же промежутка времени.

Разности между координатами точки m въ концѣ и въ началѣ промежутка времени ϑ выразятся слѣдующими формулами:

$$x - x_0 = x'_0 \vartheta + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t \mathfrak{X} dt \dots (451, a)$$

$$y - y_0 = y'_0 \vartheta + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t \mathfrak{Y} dt \dots (451, b)$$

$$z - z_0 = z_0 \vartheta + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t \mathfrak{Z} dt; \dots\dots\dots (451, c)$$

эти разности мы условимся называть проеяціями на оси координатъ перемѣщенія точки въ теченіи промежутка времени ϑ .

Если импульсъ \mathfrak{Z} , сообщаемый силою \mathfrak{F} матеріальной точкѣ, имѣетъ замѣтную (но не безконечно-большую) величину, продолжительность же ϑ дѣйствія силы настолько ничтожна, что можно пренебречь всякими перемѣщеніями, совершенными за время ϑ , то такая сила \mathfrak{F} называется *миновенною силою*.

Степень малости промежутка времени ϑ должна быть такова, чтобы можно было пренебречь длиною:

$$V\vartheta$$

сравнительно съ конечными длинами, входящими въ наши расчеты; здѣсь V означаетъ какую либо скорость конечной величины.

При такой степени малости промежутка времени ϑ можно пренебречь перемѣщеніями, совершенными за это время какими бы то ни было точками, движущимися одновременно съ матеріальной точкою m , если только скорости этихъ точекъ имѣютъ конечныя величины.

То же самое можно сказать относительно величины перемѣщенія матеріальной точки m за время ϑ , если только импульсы силы \mathfrak{F} за время отъ момента t_0 до какого либо момента $t < t_0 + \vartheta$ имѣютъ величины конечныя; въ самомъ дѣлѣ, если импульсъ

$$\left[\left(\int_{t_0}^t \mathfrak{X} dt \right)^2 + \left(\int_{t_0}^t \mathfrak{Y} dt \right)^2 + \left(\int_{t_0}^t \mathfrak{Z} dt \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

не превышаетъ, ни при какомъ t , конечной величины J , то абсолютныя величины интеграловъ вторыхъ частей равенствъ (451) менѣе величины

$$\frac{J}{m} \vartheta.$$

гдѣ частное $(J:m)$ выражаетъ нѣкоторую конечную скорость; по-
лности же промежутка времени θ , мы можемъ пренебречь дѣлами:

$$x_0'\theta, y_0'\theta, z_0'\theta, \frac{J}{m}\theta,$$

слѣдовательно, и перемѣщеніемъ матеріальной точки за время θ .

Принимая во вниманіе все сказанное въ настоящемъ пара-
графѣ, можемъ въ слѣдующихъ выраженіяхъ высказать опредѣленіе
мгновенной силѣ, приложенной къ матеріальной точкѣ.

*Мгновенная сила дѣйствуетъ въ продолженіи такого малаго
промежутка времени, въ теченіи котораго могутъ совершиться
только самыя незначительныя, пренебрегаемыя нами, перемѣ-
ненія точекъ, движущихся съ конечными скоростями.*

*Не смотря на кратковременность своего дѣйствія, мгно-
венная сила сообщаетъ той матеріальной точкѣ, къ которой
она приложена, импульсъ конечной не малой величины; пере-
мѣненіе же матеріальной точки за время дѣйствія мгновен-
ной силы — ничтожно.*

Къ этому слѣдуетъ еще прибавить, что импульсъ, сообщаемый
матеріальной точкѣ за время θ вслѣдствіе мгновенной силы, при-
ложенной къ этой точкѣ, ничтоженъ сравнительно съ импульсомъ
той же мгновенной; поэтому формулы (450) справедливы и въ тѣхъ
случаяхъ, въ которыхъ къ матеріальной точкѣ приложена, кромѣ
мгновенной силы \tilde{F} , какая либо немгновенная сила F , импульсомъ
слѣдней за время отъ t_0 до $(t_0 + \theta)$ мы пренебрегаемъ.

§ 58. Ударъ матеріальной точки о преграждающую поверхность.

Положимъ, что свободная матеріальная точка m , подвержен-
ная дѣйствію нѣкоторой мгновенной силы F , совершаетъ движеніе:

$$x=f_1(t), y=f_2(t), z=f_3(t), \dots \dots \dots (452)$$

гдѣ x, y, z суть координаты движущейся матеріальной точки.

Пусть, кроме того, имѣется неудерживающая преграда, образуемая поверхностью:

$$f(x, y, z, t) = 0, \dots \dots \dots (453)$$

причемъ предполагается, что уравненіе этой неудерживающей поверхности написано такъ, какъ слѣдуетъ по условію, сдѣланному въ началѣ параграфа 34-го.

Матерьяльная точка движется свободно, пока не встрѣтитъ этой поверхности.

При встрѣчѣ матерьяльной точки съ преграждающею поверхностью координаты матерьяльной точки должны будутъ удовлетворять уравненію поверхности; а потому моментъ t_0 встрѣчи долженъ быть дѣйствительнымъ корнемъ уравненія:

$$f[f_1(t_0), f_2(t_0), f_3(t_0), t_0] = 0.$$

Координаты матерьяльной точки и проеціи на оси координатъ скорости ея въ этотъ моментъ будутъ слѣдующія:

$$x_0 = f_1(t_0), \quad y_0 = f_2(t_0), \quad z_0 = f_3(t_0)$$

$$x'_0 = f'_1(t_0), \quad y'_0 = f'_2(t_0), \quad z'_0 = f'_3(t_0).$$

Означимъ черезъ v_0 величину и направленіе скорости абсолютнаго движенія матерьяльной точки въ моментъ t_0 и черезъ u_0 — величину и направленіе скорости относительнаго движенія ея по отношенію къ той средѣ, которой принадлежитъ преграждающая поверхность (см. § 33, стр. 175—176, § 34, стр. 180).

Дальнѣйшее состояніе движенія матерьяльной точки зависить отъ того, составляетъ ли относительная скорость u_0 острый или тупой уголъ съ положительною нормалью къ поверхности (453).

Если

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'_0 + \frac{\partial f}{\partial y} y'_0 + \frac{\partial f}{\partial z} z'_0 + \frac{\partial f}{\partial t} > 0,$$

то есть

$$v_0 \cos(v_0, N) > - \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial t},$$

$$u_0 \cos(u_0, N) > 0,$$

§ 34, формула (277)), то материальная точка продолжает движение, выражаемое формулами (452), без всякого препятствия стороны преграждающей поверхности.

Если же

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'_0 + \frac{\partial f}{\partial y} y'_0 + \frac{\partial f}{\partial z} z'_0 + \frac{\partial f}{\partial t} < 0, \dots\dots\dots (454)$$

то:

$$\Delta f \cdot v_0 \cos(v_0, N) + \frac{\partial f}{\partial t} < 0, \dots\dots\dots (455)$$

$$u_0 \cos(u_0, N) < 0, \dots\dots\dots (456)$$

то неравенство, противоречащее условию (274) *), требуемому радом, показывает, что материальная точка, по причинѣ инерціи, стремится преодолѣть эту преграду.

Такому стремленію материальной точки преграда противодействуетъ, оказывая на точку реакцію, направленную по положительной нормали.

Эта реакція должна сообщить материальной точкѣ такой импульсъ, который измѣнитъ бы скорость v_0 материальной точки въ скорость v , удовлетворяющую условию:

$$\Delta f \cdot v \cos(v, N) + \frac{\partial f}{\partial t} \geq 0; \dots\dots\dots (275)$$

стѣ съ тѣмъ этотъ импульсъ долженъ быть сообщенъ мгновенно для того, чтобы материальная точка не успѣла войти внутрь ограниченного поверхностью (453).

Поэтому мы предположимъ, что реакція, измѣняющая скорость v_0 (удовлетворяющую неравенству (455)) въ скорость v удовлетворяющую условию (275)), есть мгновенная сила, дѣй-

*) На страницѣ 179; это же условіе выражается формулами (275) и (277).

стоящая въ теченіи столь ничтожнаго промежутка времени θ , въ теченіи котораго перемѣщенія матеріальной точки и поверхности (453) ничтожны; эта мгновенная сила направлена по положительной нормали N .

Такой процесс мгновеннаго измѣненія скорости матеріальной точки при встрѣчѣ ея съ преграждающею поверхностью называется ударомъ матеріальной точки о поверхность; моментъ t_0 называется моментомъ паденія точки на поверхность, моментъ $t = (t_0 + \theta)$ моментомъ отраженія.

При опредѣленіи результата удара матеріальной точки надо принять во вниманіе слѣдующія обстоятельства:

1) Вслѣдствіе ничтожной малости промежутка времени θ координаты матеріальной точки предполагаются постоянными (x_0, y_0, z_0) во все время удара (отъ момента t_0 до момента $t = t_0 + \theta$).

2) Положеніе поверхности и скорости всѣхъ точекъ ея принимаются также неизмѣнными во все время удара.

3) Импульсами немгновенныхъ силъ за время удара мы пренебрегаемъ, по ихъ ничтожной малости.

Мгновенная сила реакціи преграды направлена по положительной нормали N , проведенной изъ точки (x_0, y_0, z_0) поверхности (453).

По этимъ причинамъ проекціи на оси координатъ мгновенной силы реакціи въ какой либо моментъ удара выразятся величинами:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \lambda, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \lambda, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \lambda,$$

гдѣ производныя отъ f имѣютъ постоянныя величины во время всего удара, а именно тѣ величины, которыя онѣ имѣютъ въ моментъ t_0 въ точкѣ (x_0, y_0, z_0) ; λ есть нѣкоторая функція отъ t , быстро измѣняющая свою величину во время удара.

Проекціи на оси координатъ импульса мгновенной силы за время отъ момента паденія до какого либо момента t удара выразятся такъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \int_{t_0}^t \lambda dt, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \int_{t_0}^t \lambda dt, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \int_{t_0}^t \lambda dt;$$

этот импульс произведет слѣдующее измѣненіе скорости матеріальной точки:

$$\begin{aligned} m \frac{dx}{dt} - mx'_0 &= \frac{\partial f}{\partial x} j, \\ m \frac{dy}{dt} - my'_0 &= \frac{\partial f}{\partial y} j, \quad j = \int_{t_0}^t \lambda dt, \\ m \frac{dz}{dt} - mz'_0 &= \frac{\partial f}{\partial z} j, \end{aligned}$$

или:

$$\frac{x - x'_0}{\cos(N, X)} = \frac{y - y'_0}{\cos(N, Y)} = \frac{z - z'_0}{\cos(N, Z)} = \frac{j \Delta f}{m};$$

это означает, что измѣненіе скорости отъ момента паденія до какого либо момента t удара направлено параллельно положительной нормали N ; слѣдовательно, конецъ линіи, изображающей длину и направленіе скорости v , чертитъ во время удара прямую линію, параллельную этой нормали (черт. 30).

Такъ какъ скорость v_0 паденія точки на поверхность удовлетворяетъ неравенству (455), а скорость отраженія удовлетворяетъ условію (275), и притомъ скорость измѣняется во все время удара по вышеприведенному закону, то, въ нѣкоторый моментъ τ удара, она должна будетъ получить величину и направленіе, удовлетворяющія равенству:

$$\Delta f \cdot v \cos(v, N) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \dots \dots \dots (457)$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \gamma + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \dots \dots \dots (458)$$

гдѣ v означаетъ величину и направленіе скорости матеріальной точки въ моментъ τ ; α , β , γ , суть проеціи этой скорости на оси координатъ.

Если поверхность неподвижна, то равенство (457) получитъ видъ:

$$v \cos(v, N) = 0,$$

это означаетъ, что скорость v касательна къ поверхности.

Если же поверхность движется или деформируется, то равенство (457) может быть представлено такъ:

$$u \cos(u, N) = 0, \dots\dots\dots (458 \text{ bis})$$

гдѣ u есть скорость въ моментъ τ относительнаго движенія материальной точки по отношенію къ той средѣ, которой принадлежитъ поверхность.

Равенство (458, bis) выражаетъ, что относительная скорость u касательна къ поверхности.

Этотъ моментъ τ весь промежутокъ времени θ раздѣляется на двѣ части, а самый процессъ удара — на два акта.

За время перваго акта удара измѣненіе скорости материальной точки имѣетъ величину:

$$v \cos(v, N) - v_0 \cos(v_0, N) \dots\dots\dots (459)$$

Если поверхность неподвижна, то скорость v въ моментъ τ перпендикулярна къ нормали, а потому тогда измѣненіе скорости за время перваго акта равно:

$$- v_0 \cos(v_0, N),$$

то есть величинѣ проэкціи скорости паденія на отрицательную нормаль.

На чертежѣ 30-мъ это измѣненіе скорости при неподвижной поверхности изображается длиною $\overline{v_0 v}$.

Можно сказать, что, если поверхность неподвижна, то за все время перваго акта удара материальная точка терлетъ составляющую скорости паденія v_0 по отрицательной нормали.

Если поверхность движется или деформируется, то разность (459), на основаніи равенства (457), выразится такъ:

$$- \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial t} - v_0 \cos(v_0 N), \dots\dots\dots (460)$$

или:

$$- u_0 \cos(u_0, N);$$

это есть величина проекція на отрицательную нормаль относительной скорости паденія материальной точки.

Означимъ черезъ w величину и направленіе скорости той точки (x_0, y_0, z_0) поверхности, въ которой происходитъ ударъ; какъ ω извѣстно:

$$w \cos(w, N) = - \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial t}, \dots \dots \dots (261)$$

. стр. 176 и 180); кромѣ того, мы знаемъ, что скорость v_0 въ геометрическая сумма скоростей u_0 и w .

Такъ какъ скорости точекъ поверхности предполагаются постоянными во все время удара, то и во всякій моментъ удара скорость v есть геометрическая сумма скоростей u и w ; напимѣръ, абсолютная скорость b есть геометрическая сумма скоростей u и w , абсолютная скорость V есть геометрическая сумма скоростей u и w ; къ и изображено на чертежѣ 31.

Изъ этого слѣдуетъ, что во все время удара конецъ относительной скорости (материальной точки по отношенію къ той средѣ, горой принадлежитъ поверхность) описываетъ прямую линію, параллельную той прямой линіи, которую въ то же время чертъ конецъ абсолютной скорости (черт. 31).

Такъ какъ въ моментъ τ относительная скорость u перпендикулярна къ N (см. (458 bis)), то можно сказать, что за все время перваго акта удара материальная точка терять составляющую относительной скорости паденія u_0 по отрицательной нормали.

По этимъ причинамъ первый актъ удара можетъ быть названъ *потери нормальной части скорости паденія*.

Второй актъ удара начинается въ моментъ τ и оканчивается моментъ $t = (t_0 + \theta)$.

За все время этого втораго акта измѣненіе скорости имѣетъ величину:

$$v \cos(v, N) - b \cos(b, N) \dots \dots \dots (461)$$

Если поверхность неподвижна, то величина этого измѣненія равняется проекція скорости отраженія v на положительную нормаль;

Если же поверхность движется или деформируется, то величина разности (461) может быть выражена такъ:

$$v \cos(v, N) + \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial t} = u \cos(u, N), \dots\dots\dots (462)$$

гдѣ u есть относительная скорость отраженія матерьяльной точки; слѣдовательно, въ этихъ случаяхъ измѣненіе скорости равняется проекціи относительной скорости отраженія на положительную нормаль.

Второй актъ удара называется *актомъ возстановленія нормальной части скорости отраженія*.

Величины α , β , γ проекцій скорости v на оси координатъ могутъ быть опредѣлены изъ равенствъ:

$$\left. \begin{aligned} m\alpha &= mx'_0 + J \frac{\partial f}{\partial x} \\ m\beta &= my'_0 + J \frac{\partial f}{\partial y} \\ m\gamma &= mz'_0 + J \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (463)$$

$$J = \int_{t_0}^{\tau} \lambda dt \dots\dots\dots (464)$$

Величина J опредѣлится изъ равенства, выражающаго, что измѣненіе скорости матерьяльной точки во время *акта потери* равно величинѣ импульса реакціи за это время, дѣленной на массу точки; такъ какъ измѣненіе скорости за время перваго акта выражается формулою (460), а импульсъ реакціи за время этого акта выражается произведеніемъ $J \cdot \Delta f$, то это равенство будетъ слѣдующее:

$$\frac{J \cdot \Delta f}{m} = - \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial t} - v_0 \cos(v_0, N);$$

изъ него слѣдуетъ:

$$J = -m \frac{\frac{\partial f}{\partial x} x'_0 + \frac{\partial f}{\partial y} y'_0 + \frac{\partial f}{\partial z} z'_0 + \frac{\partial f}{\partial t}}{(\Delta f)^2}, \dots\dots\dots (465)$$

или:

$$J = -m \frac{u_0 \cos(u_0, N)}{\Delta f} \dots\dots\dots (466)$$

Величина импульса реакціи за время акта возстановленія является

$$I \cdot \Delta f; I = \int_{\tau}^t \lambda dt,$$

величина же измененія скорости материальной точки за это время выражается формулою (462), поэтому:

$$I = m \frac{u \cos(u, N)}{\Delta f} \dots \dots \dots (467)$$

Изъ выраженій (466) и (467) слѣдуетъ:

$$\frac{I}{J} = \frac{u \cos(u, N)}{-u_0 \cos(u_0, N)}; \dots \dots \dots (468)$$

и подъ именемъ *потерянной скорости* подразумѣвать проекцію скорости паденія на отрицательную нормаль, а подъ именемъ *возстановленной скорости* — проекцію скорости отраженія на положительную нормаль, то равенство (468) можно высказать въ слѣдующихъ выраженіяхъ: *импульсъ второго акта такъ относится къ импульсу перваго акта, какъ возстановленная относительная скорость относится къ потерянной относительной скорости.*

Если поверхность неподвижна, то величина отношенія между этими импульсами выразится величиною отношенія абсолютной возстановленной скорости къ абсолютной потерянной скорости.

Означимъ буквою i уголъ паденія, то есть уголъ, составленный направлениемъ скорости паденія v_0 съ отрицательною нормалью (рт. 32); буквою r означимъ уголъ отраженія, то есть уголъ, составленный направлениемъ скорости отраженія v съ положительною нормалью; по чертежу 32 легко видѣть, что:

$$\overline{RP} = v \cos(v, N) = v \cotg r$$

$$\overline{RQ} = -v_0 \cos(v_0, N) = v_0 \cotg i;$$

потому, при неподвижности поверхности:

$$\frac{I}{J} = \frac{v \cos(v, N)}{-v_0 \cos(v_0, N)} = \frac{\tg i}{\tg r} \dots \dots \dots (469)$$

Величина отношенія между возстановленною скоростью и потерянною скоростью зависит главнымъ образомъ отъ упругихъ свойствъ соударяющихся тѣлъ. По изслѣдованіямъ Ньютона величина этого отношенія не зависитъ отъ величины и направленія скорости паденія, но только отъ природы тѣхъ тѣлъ, между которыми происходитъ ударъ; такъ, при соудареніи стекла о стекло это отношеніе равно $\frac{15}{16}$ при соудареніи желѣза о желѣзо: $\frac{5}{9}$, при соудареніи тѣлъ, состоящихъ изъ прессованной шерсти, — тоже $\frac{5}{9}$; вообще, отношеніе это есть дробь, не большая единицы, то есть величина возстановленной скорости не превосходитъ величины скорости потерянной и уголъ отраженія не менѣе угла паденія (при неподвижности поверхности).

Это отношеніе называется *коэффициентомъ возстановленія*; это есть дробь, не меньшая нуля и не большая единицы, не зависящая отъ величины и направленія скорости паденія *).

Если величина коэффициента возстановленія извѣстна (означимъ его буквою ϵ), то тогда мы можемъ опредѣлить проеціи на оси координатъ скорости отраженія v по слѣдующимъ формуламъ:

$$\left. \begin{aligned} mx' &= mx'_0 + J \frac{\partial f}{\partial x} (1 + \epsilon) \\ my' &= my'_0 + J \frac{\partial f}{\partial y} (1 + \epsilon) \\ mz' &= mz'_0 + J \frac{\partial f}{\partial z} (1 + \epsilon) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (470)$$

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ не будетъ надобности пользоваться этими формулами, такъ какъ величину и направленіе скорости отраженія можемъ опредѣлить при помощи слѣдующихъ простыхъ соображеній.

Проекція относительной скорости на касательную плоскость (то есть скорость u) не измѣняется при ударѣ; проекція же на отрицательную нормаль относительной скорости паденія (т.-е. — $u_0 \cos(u_0, N)$) замѣняется, вслѣдствіе удара, возстановленною скоростью

$$u \cos(u, N) = \epsilon (-u_0 \cos(u_0, N)),$$

направленною по положительной нормали.

*) Позднѣйшіе опыты показали, что Ньютоново положеніе о независимости величины коэффициента возстановленія отъ скорости паденія весьма близко къ истинѣ.

Если $\epsilon=0$, то восстановленной скорости нѣтъ и материальная точка остается на поверхности, имѣя относительную скорость u .

Если $\epsilon=1$ и поверхность неподвижна, то уголъ отраженія равенъ углу паденія; при $\epsilon<1$ уголъ отраженія болѣе угла паденія.

Измѣненіе живой силы материальной точки при ударѣ о поверхность опредѣляется по формулѣ (449), если замѣнимъ въ ней направленіе H — направленіемъ N , а величину H — слѣдующимъ выраженіемъ импульса реакціи за все время удара:

$$J(1+\epsilon)\Delta f;$$

такъ какъ:

$$v \cos(v, N) = I \frac{\Delta f}{m} - \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$v_0 \cos(v_0, N) = -J \frac{\Delta f}{m} - \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial t},$$

получимъ слѣдующее выраженіе величины живой силы при ударѣ:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{J^2(\Delta f)^2}{2m}(1-\epsilon^2) - J(1+\epsilon) \frac{\partial f}{\partial t} \dots (471)$$

Если поверхность неподвижна, то:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{mv_0^2}{2}(1-\epsilon^2) \cos^2(v_0, N) \dots (472)$$

есть, живая сила материальной точки теряется при ударѣ о неподвижную поверхность, если коэффициентъ восстановления равенъ единицѣ и если скорость паденія не перпендикулярна къ нормали; потеря живой силы тѣмъ болѣе, чѣмъ менѣе коэффициентъ восстановления и чѣмъ болѣе проекція скорости паденія на отрицательную нормаль.

Эта потеря живой силы можетъ быть съ избыткомъ возмѣнена живою силою, сообщаемою материальной точкѣ движущейся поверхностью, если скорость w точки M составляетъ острый уголъ съ нормалью N .

Примѣръ 49-й. Тяжелая материальная точка, брошенная изъ начала дуги съ скоростью V въ вертикальной плоскости XU (черт. 38) въ уголѣ $(J + \frac{\pi}{2} - r)$ къ оси X и подъ угломъ $(J + \pi - r)$ къ оси Y , врѣзаетъ рядъ рякошетовъ о наклонную плоскость:

$$-(y + x \operatorname{tg} J) = 0;$$

опредѣлить весь рядъ послѣдовательныхъ ударовъ матеріальной точки объ эту плоскость, предполагая, что движеніе совершается въ пустотѣ и что извѣстенъ коэффициентъ возстановленія ϵ .

Положительная нормаль N въ плоскости составляетъ съ осью X^{000} уголъ $\left(\frac{\pi}{2} + J\right)$, съ осью Y^{000} — уголъ $(\pi + J)$.

Скорость V составляетъ съ положительною нормалью въ точкѣ O уголъ r .

Движеніе матеріальной точки до перваго удара выражается уравненіями:

$$x = Vt \sin(r - J), \quad y = \frac{gt^2}{2} - Vt \cos(r - J).$$

Моментъ t_1 перваго рикошета опредѣлится изъ равенства

$$\frac{gt_1}{2} - V \cos(r - J) + V \sin(r - J) \operatorname{tg} J = 0,$$

откуда:

$$t_1 = \frac{2V}{g} \frac{\cos r}{\cos J} \dots \dots \dots (473)$$

Зная t_1 опредѣлимъ: координаты x_1, y_1 той точки плоскости, въ которой происходитъ первый ударъ, расстояние $O1 = \xi_1$ этой точки отъ начала координатъ, величину v_1 скорости паденія, проэкція ея (x'_1, y'_1) на оси координатъ и величину i_1 угла паденія.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{x_1}{\cos J} = \frac{2V^2 \sin(r - J) \cos r}{g \cos^2 J} \\ \xi_1 &= \frac{2V^2 \cos^2 r}{g \cos J} (\operatorname{tg} r - \operatorname{tg} J) \dots \dots \dots (474) \end{aligned}$$

$$x'_1 = V \sin(r - J), \quad y'_1 = V \left(2 \frac{\cos r}{\cos J} - \cos(r - J) \right) \dots (475)$$

Проекція скорости v_1 на направленіе оси E (см. черт. 33):

$$\begin{aligned} v_1 \cos(v_1 E) &= v_1 \sin i_1 = x'_1 \cos J - y'_1 \sin J, \\ v_1 \sin i_1 &= V(\sin r - 2 \cos r \operatorname{tg} J) \dots \dots \dots (476) \end{aligned}$$

Проекція скорости паденія v_1 на отрицательную нормаль:

$$v_1 \cos i_1 = x'_1 \sin J + y'_1 \cos J = V \cos r \dots \dots \dots (477)$$

Означимъ черезъ v_1 величину скорости отраженія въ точкѣ 1 и

r_1 угол отраженія. По теоріи удара о неподвижную поверх-

$$v_1 \sin r_1 = v_1 \sin i_1, \quad v_1 \cos r_1 = \varepsilon v_1 \cos i_1;$$

$$v_1 \sin r_1 = V(\sin r - 2 \cos r \operatorname{tg} J) \dots\dots\dots (478)$$

$$v \cos r_1 = \varepsilon V \cos r \dots\dots\dots (479)$$

$$\varepsilon \operatorname{tg} r_1 = \operatorname{tg} r - 2 \operatorname{tg} J \dots\dots\dots (480)$$

суждал такимъ же образомъ, опредѣлимъ:

r промежутка времени между $(n-1)$ -мъ и n -мъ ударами:

$$t_n - t_{n-1} = \frac{2v_{n-1} \cos r_{n-1}}{g \cos J}, \dots\dots\dots (473, n-1)$$

іе между точками, въ которыхъ эти удары совершаются:

$$\xi_n - \xi_{n-1} = \frac{2v_{n-1}^2 \cos^2 r_{n-1}}{g \cos J} (\operatorname{tg} r_{n-1} - \operatorname{tg} J), \dots\dots\dots (474, n-1)$$

мость между скоростями и углами отраженія въ этихъ точкахъ:

$$\sin r_n = v_{n-1} (\sin r_{n-1} - 2 \cos r_{n-1} \operatorname{tg} J), \dots\dots\dots (478, n-1)$$

$$v_n \cos r_n = \varepsilon v_{n-1} \cos r_{n-1}, \dots\dots\dots (479, n-1)$$

$$\varepsilon \operatorname{tg} r_n = \operatorname{tg} r_{n-1} - 2 \operatorname{tg} J \dots\dots\dots (480, n-1)$$

ряда равенствъ:

$$\varepsilon \operatorname{tg} r_1 = \operatorname{tg} r - 2 \operatorname{tg} J$$

$$\varepsilon \operatorname{tg} r_2 = \operatorname{tg} r_1 - 2 \operatorname{tg} J$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\varepsilon \operatorname{tg} r_n = \operatorname{tg} r_{n-1} - 2 \operatorname{tg} J$$

къ r_1, r_2, \dots, r_{n-1} ; получимъ:

$$\varepsilon^n \operatorname{tg} r_n = \operatorname{tg} r - 2 \frac{1 - \varepsilon^n}{1 - \varepsilon} \operatorname{tg} J \dots\dots\dots (481)$$

ряда равенствъ вида (479, $n-1$) получимъ:

$$v_n \cos r_n = \varepsilon^n V \cos r \dots\dots\dots (482)$$

Поэтому расстояние между двумя последовательными точками удара выразится такъ:

$$\xi_n - \xi_{n-1} = \frac{2\varepsilon^{n-1} V^2 \cos^2 r}{g \cos J} \left[\operatorname{tg} r - \left(\frac{2}{1-\varepsilon} - \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \varepsilon^{n-1} \right) \operatorname{tg} J \right]. \quad (483)$$

Если эта разность окажется отрицательною, то это будетъ означать, что матерьяльная точка послѣ $(n-1)$ -аго удара совершаетъ скачекъ внизъ, а не вверхъ: для этого надо, чтобы выраженіе:

$$D_n = \operatorname{tg} r - \frac{2}{1-\varepsilon} \operatorname{tg} J + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \varepsilon^{n-1} \operatorname{tg} J \dots \dots (484)$$

имѣло величину отрицательную.

Сложивъ рядъ равенствъ вида (483), получимъ выраженіе разстоянія той точки отъ начала координатъ, въ которой происходитъ n -ый ударъ:

$$\xi_n = \frac{V^2 \sin 2r}{g \cos J} \frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon} \left[1 - \frac{1-\varepsilon^n \operatorname{tg} J}{1-\varepsilon} \right] \dots \dots \dots (485)$$

Сложивъ рядъ равенствъ вида (473, $n-1$), получимъ выраженіе момента n -аго удара:

$$t_n = \frac{2V \cos r}{g \cos J} \frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon} \dots \dots \dots (486)$$

Величина и направленіе скорости отраженія послѣ n -аго удара опредѣлится изъ формулъ (482) и слѣдующей:

$$v_n \sin r_n = V \sin r - 2V \cos r \frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon} \operatorname{tg} J \dots \dots (487)$$

Матерьяльная точка совершить безконечное число скачковъ, которые становятся все мельче и короче, какъ видно изъ формулъ (482) и (483), а удары становятся все чаще и чаще (см. (473, $n \rightarrow \infty$)). По истеченіи конечнаго времени

$$T = \frac{2V \cos r}{g \cos J} \frac{1}{1-\varepsilon} \dots \dots \dots (488)$$

скачки прекращаются и въ этотъ моментъ матерьяльная точка будетъ находиться на слѣдующемъ разстояніи отъ начала координатъ:

$$S = \frac{V^2 \sin 2r}{g \cos J} \frac{1}{1-\varepsilon} \left[1 - \frac{1}{1-\varepsilon} \operatorname{tg} J \right] \dots \dots \dots (489)$$

а скорость ея будетъ направлена вдоль по положительному или отрицательному направленію оси Z и будетъ равна:

$$C = B \cdot V \cos r; \quad B = \operatorname{tg} r - \frac{2}{1-\varepsilon} \operatorname{tg} J \dots \dots (490)$$

накъ величинѣ B опредѣляетъ возможность или невозможность пены направленія скачковъ; если B болѣе нуля, то материальная точка . восходить по оси Z и даже послѣ прекращенія скачковъ будетъ скорость C , направленную по положительной оси Z ; если $B=0$, то C будетъ нуль; если же B менѣе нуля, то, начиная съ некоторого чѣи будутъ совершаться внизъ по плоскости.

Примѣръ 50-й. Опредѣлить результатъ перваго удара материальной точки объ окружность въ примѣрѣ 34-мъ (стр. 241—245). Прежде всего слѣдуетъ найти точку D первой встрѣчи материальной точки съ окружностью. Означить координаты этой точки или x_2, y_2 , моментъ встрѣчи — знакомъ t_2 , проекціи скорости — знаками x'_2, y'_2 , проекціи скорости отраженія — знаками x'_2, y'_2 .

Примѣняя къ этому случаю приемы, наложенные въ этомъ примѣрѣ, мы найдемъ:

$$t_2 - t_1 = \frac{4v_1 x_1}{gR}, \quad x'_2 = v_1 \frac{y_1}{R}, \quad y'_2 = 3v_1 \frac{x_1}{R}$$

$$x_2 = x_1 \left(1 - \frac{4y_1^2}{R^2}\right), \quad y_2 = y_1 \left(1 - \frac{4x_1^2}{R^2}\right); \quad \frac{J}{m} = -4v_1 \frac{y_1 x_1}{R^2}$$

$$x'_2 = v_1 \frac{y_1}{R} - 2 \frac{J}{m} x_2 (1 + \varepsilon)$$

$$y'_2 = 3v_1 \frac{x_1}{R} - 2 \frac{J}{m} y_2 (1 + \varepsilon).$$

Встанемъ на частномъ случаѣ: $b = -\frac{3}{4}R$ и опредѣлимъ слѣдующее движеніе материальной точки послѣ перваго удара при положеніяхъ: $\varepsilon=1$ и $\varepsilon=0$.

Въ этомъ случаѣ ударъ произойдетъ въ самой нижней точкѣ окружности и скорость паденія будетъ имѣть слѣдующія проекціи:

$$x'_2 = -\frac{v_1}{2}, \quad y'_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}v_1, \quad \frac{J}{m} = \frac{3\sqrt{3}}{4R}v_1.$$

Если $\varepsilon=1$, то материальная точка, отразившись о нижнюю окружность, опишетъ параболу, симметричную той, которую описала до удара; въ точкѣ K_1 ($x = -\frac{\sqrt{3}}{2}R, y = -\frac{R}{2}$) вступитъ на окружность безъ удара, такъ какъ скорость ея

будетъ направлена по касательной къ окружности; далѣе, матерьяльная точка пойдетъ по окружности, пройдетъ черезъ нижнюю точку ея, подымется до точки K , гдѣ снова сойдетъ съ окружности, и такъ далѣе.

Если $\varepsilon=0$, то матерьяльная точка потеряетъ скорость по нормали и пойдетъ по окружности со скоростью:

$$x' = -\frac{v_1}{2};$$

дальнѣйшее движеніе она будетъ совершать по нижней части окружности, не подымаясь выше уровня:

$$y = -\left(\frac{v_1^2}{8g} - R\right) = \frac{15}{16} R.$$

Примѣръ 51-й. Тяжелая матерьяльная точка брошена изъ начала координатъ на наклонную плоскость, движущуюся поступательно и равномерно; уравненіе этой плоскости:

$$-(y + x \operatorname{tg} J + wt) = 0.$$

Представимъ себѣ неизмѣняемую движущуюся среду, которой принадлежитъ плоскость, и опредѣлимъ относительное движеніе матерьяльной точки по отношенію къ этой средѣ, причеиъ результатъ каждаго удара будемъ разсчитывать на томъ основаніи, что:

$$u_n \sin \rho_n = u_n \sin \sigma_n, \quad u_n \cos \rho_n = \varepsilon u_n \cos \sigma_n,$$

гдѣ u_n есть относительная скорость паденія, u_n — относительная скорость отраженія, ρ_n — относительный уголъ отраженія, σ_n — относительный уголъ паденія при n -номъ ударѣ.

Въ результатѣ получимъ формулы, отличающіяся отъ формулъ примѣра 49-го тѣмъ, что въ нихъ, вмѣсто $V \cos r$, $V \sin r$, и $\operatorname{tg} r$ будутъ входить слѣдующія величины:

$$\begin{array}{ll} V \cos r - w \cos J & \text{вмѣсто } V \cos r \\ V \sin r - w \sin J & \text{вмѣсто } V \sin r \\ \frac{V \sin r - w \sin J}{V \cos r - w \cos J} & \text{вмѣсто } \operatorname{tg} r. \end{array}$$

Примѣръ 52-й. Матерьяльная тяжелая точка свободно пущена въ моментъ $t=0$ изъ точки $(x=a, y=-h)$; опредѣлить результатъ ея удара о плоскость;

$$\frac{x t}{a} \sqrt{\frac{2}{3} g h} - y = 0,$$

вращающуюся вокругъ горизонтальной оси Z^{00} .

иженіе точки до удара выражается такъ:

$$x=a, \quad y=\frac{gt^2}{2}-h.$$

моментъ встрѣчи точки съ плоскостью опредѣлится изъ уравненія:

$$\frac{gt^2}{2}-t\sqrt{\frac{2}{3}gh}-h=0.$$

и двухъ рѣшеній этого уравненія:

$$t=-\sqrt{\frac{2h}{3g}}, \quad t_1=3\sqrt{\frac{2h}{3g}}$$

опредѣляетъ дѣйствительный моментъ встрѣчи. Въ этотъ моментъ ланная точка имѣетъ слѣдующія координаты и слѣдующія проекціи и паденія:

$$x_0=a, \quad y_0=2h, \quad x'_0=0, \quad y'_0=\sqrt{6gh}.$$

и вычисленія J мы должны составить выраженія производныхъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{t_1}{a}\sqrt{\frac{2}{3}gh}=\frac{2h}{a}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=-1, \quad \frac{\partial f}{\partial t}=\sqrt{\frac{2}{3}gh}.$$

ичина J выразится такъ:

$$J=\frac{2ma^2}{4h^2+a^2}\sqrt{\frac{2}{3}gh};$$

и скорости отраженія на оси координатъ будутъ имѣть слѣдующія:

$$x'=\frac{4ha}{4h^2+a^2}(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{2}{3}gh}$$

$$y'=\sqrt{6gh}-\frac{2a^2}{4h^2+a^2}(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{2}{3}gh}.$$

этомъ случаѣ происходитъ потеря живой силы вслѣдствіе удара; итъ дѣлѣ:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=-\frac{2ma^2}{4h^2+a^2}\frac{2}{3}gh(1+\varepsilon)(2-\varepsilon),$$

екоэффициентъ возстановленія будетъ равенъ единицѣ, то все таки ютера живой силы, равная:

$$\frac{4ma^2}{4h^2+a^2}\frac{2}{3}gh.$$



должны удовлетворять равенству (498), которое может быть представлено подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \dot{v}_i(P, v) \cos(P, v_i) + K v = 0 \dots\dots (498, a)$$

2) Если же связь неудерживающая, то, когда скорости точекъ удовлетворяютъ равенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i(P, v) \cos(P, v_i) + \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \dots\dots (499, a)$$

тогда ускоренія ихъ должны удовлетворять условію:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \dot{v}_i(P, v) \cos(P, v_i) + K v \geq 0; \dots\dots (500, a)$$

когда же скорости точекъ удовлетворяютъ неравенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i(P, v) \cos(P, v_i) + \frac{\partial v}{\partial t} > 0,$$

тогда ускоренія ихъ не подлежатъ никакому ограниченію.

§ 67. Совокупность реакцій связи.

Положимъ, что система матеріальныхъ точекъ:

$$m_1, m_2, \dots m_i, \dots m_n$$

подвержена тѣмъ же самымъ силамъ, какъ и въ параграфѣ 64-мъ; но теперь предположимъ, что точки не вполне свободны, а связаны между собою удерживающею связью:

$$v(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots x_n, y_n, z_n, t) = 0 \dots (491)$$

При существованіи этой связи матеріальныя точки могутъ получить тѣ самыя ускоренія, которыя сообщаютъ имъ приложенныя къ

раго прикрѣплены точки m_1 и m_2 ; при такомъ представленіи связи считаютъ очевиднымъ, что, если не принимать въ расчетъ массы стержня, то силы дѣйствія этой связи на точки m_1 и m_2 должны состоять только изъ реакцій связи (то есть, изъ нѣкоторой силы, приложенной къ точкѣ m_1 и направленной къ точкѣ m_2 или отъ нея, и изъ другой силы, равной и прямопротивоположной первой, приложенной къ точкѣ m_2), силъ же T_1 , T_2 , S_1 , S_2 не существуетъ вовсе.

Однако, для того, чтобы это стало очевиднымъ, должно прибавить слѣдующее:

Стержень разсматривается какъ физическое тѣло, то есть, какъ система частицъ; каждая частица замѣняется матерьяльною точкою; предполагается, что между каждыми двумя частицами дѣйствуютъ молекулярныя взаимодѣйствія, равныя, прямопротивоположныя и направленные по линіи, соединяющей частицы; величины этихъ силъ предполагаются равными:

$$\mu_1 \mu_2 f(r_{12}),$$

гдѣ μ_1 и μ_2 суть массы частицъ, r_{12} — разстояніе между ними, f — функція, общая для всѣхъ паръ частицъ и притомъ такая, которая обращается въ нуль для r_{12} равнаго или большаго нѣкоторой весьма малой (но не бесконечно-малой) длины ρ , называемой радіусомъ дѣйствія молекулярныхъ силъ; для r_{12} меньшихъ ρ функція f быстро возрастаетъ съ приближеніемъ r_{12} къ нулю.

Далѣе, должно предположить, что частицы стержня расположены симметрично вокругъ линіи $\overline{M_1 M_2}$, соединяющей матерьяльныя точки m_1 и m_2 , и вмѣстѣ съ тѣмъ симметрично по отношенію къ плоскости перпендикулярной къ $\overline{M_1 M_2}$ и проходящей черезъ середину этого разстоянія, къ этому еще присоединимъ предположеніе, что такая симметрія не нарушается, ни при движеніи, ни вслѣдствіе приложенія за-даваемыхъ силъ.

При всѣхъ этихъ предположеніяхъ станетъ, дѣйствительно, очевиднымъ, что равнодѣйствующая молекулярныхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m_1 , направлена по оси симметріи и притомъ равна и прямо-

женія, скорости точекъ и ускоренія ихъ должны удовлетворять условіямъ, приведеннымъ въ §§ 63 и 66.

Переходы связи изъ перваго состоянія во второе и обратный могутъ быть опредѣлены словами: *связь слабѣетъ* и *связь крѣпнѣетъ*; про точки, связанныя связью, можно сказать, что онѣ *сходятъ со связи* (когда связь слабѣетъ) или *вступаютъ на связь* (когда связь крѣпнѣетъ).

Неудерживающая связь, находясь въ состояніи ослабленія, не можетъ оказывать никакихъ реакцій на связываемыя ею точки, такъ какъ ускоренія этихъ точекъ не подлежатъ никакимъ ограниченіямъ со стороны связи.

Находясь въ состояніи напряженія, неудерживающая связь не можетъ оказывать реакцій причинамъ, побуждающимъ точки сойти со связи, такъ какъ она этому сходу не препятствуетъ; напротивъ, при дѣйствіи усилій, стремящихся разорвать или разрушить связь, въ ней необходимо развиваются реакціи, тому противодѣйствующія.

Неудерживающая связь, находясь въ состояніи напряженія, не препятствуетъ точкамъ получить скорости, удовлетворяющія неравенству

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i P_i \cos (P_i, v_i) + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} > 0;$$

а потому, если какія либо причины побуждаютъ точки получить такія скорости, то связь не оказываетъ тому никакихъ противодѣйствій и точки, дѣйствительно, получаютъ эти скорости; имѣя эти скорости, точки сходятъ со связи.

Если скорости точекъ удовлетворяютъ равенству:

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i P_i \cos (P_i, v_i) + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0, \dots \dots \dots (493, a)$$

то неудерживающая связь, находясь въ состояніи напряженія, не мо-

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + \lambda(v_1) \frac{\partial v_1}{\partial z_i} + \lambda(v_2) \frac{\partial v_2}{\partial z_i} + \dots + \lambda(v_p) \frac{\partial v_p}{\partial z_i}, \quad (517, ci)$$

.....

$$m_n \frac{d^2 z_n}{dt^2} = Z_n + \lambda(v_1) \frac{\partial v_1}{\partial z_n} + \lambda(v_2) \frac{\partial v_2}{\partial z_n} + \dots + \lambda(v_p) \frac{\partial v_p}{\partial z_n}. \quad (517, cn)$$

При этомъ надо имѣть въ виду, что координаты $x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_n$, (число которыхъ: $3n$), заключающіяся въ этихъ $3n$ дифференціальныхъ уравненіяхъ, связаны между собою p уравненіями связей (отъ (491, 1) до (491, p)); кромѣ того, эти дифференціальныя уравненія заключаютъ въ себѣ p множителей:

$$\lambda(v_1), \lambda(v_2), \dots, \lambda(v_p),$$

которые опредѣляются изъ уравненій, приведенныхъ ниже.

Такъ какъ всѣ связи удерживающія, то скорости точекъ системы должны удовлетворять p равенствамъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial v_1}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial v_1}{\partial z_i} z_i' \right) + \frac{\partial v_1}{\partial t} = 0, \quad (493, 1)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial v_2}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial v_2}{\partial z_i} z_i' \right) + \frac{\partial v_2}{\partial t} = 0, \quad (493, 2)$$

.....

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial v_p}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial v_p}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial v_p}{\partial z_i} z_i' \right) + \frac{\partial v_p}{\partial t} = 0, \quad (493, p)$$

а ускоренія ихъ должны удовлетворять такому же числу равенствъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_i} x_i'' + \frac{\partial v_1}{\partial y_i} y_i'' + \frac{\partial v_1}{\partial z_i} z_i'' \right) + K v_1 = 0, \quad (498, 1)$$

въ произвольныхъ цилиндрическихъ, сферическихъ или какихъ то ни было ортогональныхъ или косоугольныхъ координатахъ; къ того, могутъ существовать и существуютъ еще многіе другіе спо для той же цѣли; напримѣръ, положеніе n точекъ въ простран можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ:

Представимъ себѣ неизмѣняемую среду (и ось координатъ IOY , IOZ , связанныя съ нею), точка IO которой совпадаетъ съ кою № 1, ось IOZ проходитъ черезъ точку № 2 и плоскость Z заключаетъ въ себѣ точку № 3; тогда положенія всѣхъ n точекъ пространства могутъ быть выражены слѣдующими $3n$ величина абсолютными координатами $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0$ точки 1 углами ϕ , α , β , разстояніемъ ζ_2 точки № 2 отъ точки № 1, отъ тельными координатами ξ_3 и ζ_3 точки № 3 и относительными ко натами $\xi_4, \eta_4, \zeta_4, \dots, \xi_n, \eta_n, \zeta_n$ остальныхъ точекъ. Абсолют декартовы координаты x_i, y_i, z_i всякой изъ n точекъ выразити извѣстными формулами (формулы (45) кинематической части стр въ функціяхъ отъ $x_0, y_0, z_0, \phi, \alpha, \beta, \xi_i, \eta_i, \zeta_i$.

Если точки n образуютъ собою неизмѣняемую систему точек етъ, если разстояніе между каждыми двумя изъ этихъ точекъ ост постояннымъ, то тогда, при измѣненіи положенія системы въ странствѣ, измѣняются только шесть величинъ $x_0, y_0, z_0, \phi, \alpha$ изъ числа всѣхъ $3n$, перечисленныхъ выше, прочія же ($3n - 6$ тактъ) постоянны.

Вообще, тѣмъ или другимъ способомъ, положеніе въ прост ствѣ системы n точекъ, связанныхъ р связями вида (491, b) (§ 6 можетъ быть выражено посредствомъ нѣсколькихъ величинъ:

$$q_1, q_2, q_3, \dots, q_s,$$

обладающихъ слѣдующими свойствами:

1) При каждомъ опредѣленномъ положеніи точекъ системы личины эти получаютъ опредѣленные значенія; то есть, каждой купности опредѣленныхъ значеній декартовыхъ координатъ x_i

*) То есть, связями, уравненія которыхъ не заключаютъ времени.

нельзя получить определенных рѣшеній для декартовыхъ координатъ, если число равенствъ (521) вмѣстѣ съ числомъ равенствъ (522) менѣе числа декартовыхъ координатъ, то есть, если $(s + p)$ менѣе $3n$, или s менѣе $n = (3n - p)$; поэтому число s должно быть не менѣе n .

Если $s = n$, то изъ уравненій (521) и (522) получимъ выраженія декартовыхъ координатъ въ функціяхъ отъ координатныхъ параметровъ q_1, q_2, \dots, q_n ; пусть эти выраженія будутъ:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \theta_1(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ y_1 &= \theta_2(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ z_1 &= \theta_3(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ z_n &= \theta_{3n}(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (523)$$

В) Слѣдуетъ замѣтить, что въ этомъ случаѣ, когда число координатныхъ параметровъ системы точекъ равно числу независимыхъ декартовыхъ координатъ, *все координатные параметры q_1, q_2, \dots, q_n суть перемѣнные независимыя*, то есть, они не должны быть связаны между собою никакими равенствами и могутъ получать всякія значенія независимо другъ отъ друга.

С) Кроме того, должно обратить вниманіе на слѣдующее обстоятельство: *первая часть уравненій (522) связей, по подстановленіи въ нихъ функцій $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{3n}$ вмѣсто декартовыхъ координатъ, должны обращаться въ нуль тождественно, при всякихъ значеніяхъ координатныхъ параметровъ*; въ самомъ дѣлѣ, если бы не всѣ, а только n изъ числа декартовыхъ координатъ были замѣнены выражающими ихъ функціями θ , а затѣмъ уравненія (522) были бы рѣшены относительно оставшихся p декартовыхъ координатъ, то послѣднія должны бы были выразиться тѣми же самыми функціями, какими онѣ выражаются по формуламъ (523).

Число координатныхъ параметровъ можетъ быть болѣе n , но тогда $(s - n)$ параметровъ должны быть функціями остальныхъ n ; дѣйстви-

вмѣсто декартовыхъ координатъ, должны обратиться въ t есть, первыя части ихъ должны быть равны нулю при t нѣхъ t, q_1, q_2, \dots, q_n , каковы бы эти значенія ни были; группы E обращаются помощью выраженій (527) въ u рашающія координатные параметры между собою и съ време

Приведенныя здѣсь разсужденія и замѣчанія справедливы въ случаяхъ, въ которыхъ вторыя части выраженій (521) и частотъ время.

§ 73. Дифференціальныя уравненія Лагра

Въ § 71 было объяснено, что изъ совокупныхъ n ныхъ уравненій (517) можно исключить всѣ множители $n = (3n - p)$ дифференціальныя уравненія со столы n омъ искомымъ функціи времени; эти функціи суть тѣ д ординаты, которыя приняты за независимыя.

Если декартовы координаты могутъ быть выраже ны (526) времени и n координатныхъ параметровъ q_1, q_2, \dots, q_n , мы желаемъ ввести послѣдніе вмѣсто декартовыхъ ко дифференціальныя уравненія движенія, то можемъ это тѣхъ n дифференціальныхъ уравненій, объ которыхъ г я въ § 71.

Поступая такимъ образомъ, намъ придется произвы ней мѣръ два процесса: процессъ исключенія множителей преобразованія координатъ; оба эти процесса могутъ сложны, а потому мы покажемъ Лагранжевъ пріемъ полу ференціальныхъ уравненій движенія въ координатныхъ q_1, q_2, \dots, q_n .

По этому способу процессъ исключенія множителей весьма значительно при помощи соображеній, выводимы: нѣмъ замѣчанія (C') предыдущаго параграфа; въ этомъ зз зано, что выраженія (526) обращаютъ уравненія связе $\dots (491, p)$ въ тождества:

$$\begin{aligned} & \omega_1[\theta_1(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \theta_2(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \dots \\ & \dots \theta_n(q_1, q_2, \dots, q_n, t)] = 0 \end{aligned}$$

и прочія.

гдѣ k есть каждое изъ чиселъ 1, 2, 3, ..., s ; въ этихъ дифференціальнхъ уравненіяхъ осталось $(s - n)$ множителей:

$$\lambda(u_{s+1}), \lambda(u_{s+2}), \dots, \lambda(u_p).$$

Для поясненія сказаннаго въ настоящемъ параграфѣ, приведемъ нѣсколько примѣровъ составленія дифференціальнхъ уравненій.

Вмѣсто перваго примѣра мы укажемъ на примѣненіе Лагранжевыхъ дифференціальнхъ уравненій движущейся материальной точки въ сферическихъ координатахъ; случай $n = 1$, $p = 0$, $m = 1$, $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \psi$,

$$x = r \cos \psi \sin \varphi, \quad y = r \sin \psi \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi,$$

$Q_1 = F \cos(F, \alpha)$, $Q_2 = r F \cos(F, \beta)$, $Q_3 = r \sin \varphi F \cos(F, \gamma)$, гдѣ α , β и γ суть направленія координатныхъ осей сферически, а F есть сила, приложенная къ материальной точкѣ; Лагранжевы дифференціальныя уравненія, получимъ уравненія (страница 42), помноженные: второе — на r и третье — на $r \sin \varphi$.

Подобнымъ же образомъ можно примѣнить Лагранжевы уравненія составленію дифференціальнхъ уравненій движенія точки въ угловыхъ координатахъ; надо только знать, какъ выражаются координаты въ новыхъ координатныхъ параметрахъ q_1 , q_2 , q_3 , и тогда дѣйствія указываются видомъ Лагранжевыхъ уравненій, приведенныхъ выше.

Примѣръ 64-й. Система состоитъ изъ двухъ материальныхъ точекъ m_1 и m_2 , связанныхъ удерживающею связью, приведенною въ 57-мъ (стр. 317); кромѣ того, материальная точка m_1 должна оставаться въ плоскости XU , а точка m_2 — на оси Z . Къ m_2 приложена только сила тяжести $m_2 g$, къ m_1 не приложены никакихъ задаваемыхъ силъ и плоскость XU предполагается гладкою; положительная часть оси Z направлена вертикально.

Въ этомъ случаѣ $n = 2$, число связей и преградъ равно 4:

$$r_1 + r_2 - l = 0, \quad s_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 0,$$

такъ что $p = 4$ и $n = 2$; примемъ за координатные параметры полярныя координаты φ_1 и θ_1 точки m_1 въ плоскости XU .

Декартовы координаты выразятся въ координатныхъ параметрахъ такъ:

$$x_1 = \varphi_1 \cos \theta_1, \quad y_1 = \varphi_1 \sin \theta_1, \quad z_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = r_2.$$

могло существовать при всяких значениях независимых и произвольных величин $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, необходимо, чтобы коэффициенты этих величин были порознь равны нулю, т. е.:

$$A = 0, B = 0, C = 0, \dots, E = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ величины $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ независимы и въ сказанныхъ предѣлахъ произвольны, то мы можемъ взять $\beta = 0, \gamma = 0, \dots = 0$, а α — произвольнымъ; такъ какъ равенство (571), получающее тогда видъ: $A\alpha = 0$, должно имѣть мѣсто для всякихъ значений α , даже и не равныхъ нулю, то мы должны заключить, что $A = 0$, и т. д.

Эта лемма можетъ быть непосредственно примѣнена къ равенству (567) въ томъ случаѣ, когда всѣ точки свободны; тогда всѣ $3n$ варьирій координатъ произвольны и независимы (см. пунктъ E въ § 75); онѣ входятъ линейнымъ и однороднымъ образомъ въ первую часть этого равенства и, конечно, не заключаются въ тѣхъ выраженіяхъ ($X_1 — m_1$) и проч., на которыя онѣ помножены; слѣдовательно, эти варьиріи могутъ быть тогда рассматриваемы, какъ величины, означенныя чрезъ $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ въ леммѣ, и на основаніи этой леммы мы должны заключить, что равенство (567) распадается на $3n$ дифференціальныя уравненій (509) параграфа 64-го; это суть дифференціальныя уравненія движенія системы свободныхъ точекъ.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда точки системы связаны между собою связями, вышеприведенная лемма не можетъ быть примѣнена непосредственно къ равенству (567), потому что не всѣ варьиріи координатъ точекъ произвольны и независимы одна отъ другой; но можно первую часть этого равенства преобразовать такъ, что въ ней останутся только независимыя варьиріи и притомъ линейнымъ однороднымъ образомъ; къ преобразованному равенству лемма будетъ примѣнима.

Пусть, по прежнему, система состоитъ изъ n точекъ, связанныхъ p связями; число независимыхъ варьирій равно $n = (3n - p)$ (см. пунктъ (F) въ § 75-мъ).

венствъ, выражающихъ, что коэффициенты независ-
нулю, всего — 3и равенствъ вида:

$$0 = X_i - m_i x_i'' + \lambda(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \dots +$$

$$0 = Y_i - m_i y_i'' + \lambda(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial y_i} + \dots +$$

$$0 = Z_i - m_i z_i'' + \lambda(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial z_i} + \dots +$$

гдѣ i означаетъ каждое изъ чиселъ: 1, 2, 3, . .

Полученныя равенства суть совокупныя дви-
женія (517), составленны, въ параграфѣ 70-мъ

Доказавъ, что изъ положенія (A) совокупн
уравненія (517) § 70-го могутъ быть выведены.
на это положеніе, какъ на особую форму выражен
ференціальныхъ уравненій движенія системы из
Поэтому мы должны быть теперь увѣрены, что
можно получить тѣ же самые результаты, какіе
ренціальныхъ уравненій движенія, когда произв
образования, имѣющія цѣлю исключить множит
перемѣну координатныхъ параметровъ; часто слу
результаты получаются изъ равенства (567) п
нихъ дѣйствій, чѣмъ изъ самыхъ дифференціал

Въ слѣдующихъ главахъ мы будемъ имѣть
пользоваться равенствомъ (567) съ упомянутою

Для того же, чтобы теперь показать примѣ
ванія равенствомъ (567), приводимъ въ § 78-мъ
выхъ уравненій изъ этого равенства; но такъ
другихъ подобныхъ преобразованій мы встрѣч
такими, какъ напримѣръ:

$$\frac{dx}{dt}, \delta x', \frac{dq_1}{dt}, \delta q_1',$$

то намъ придется предварительно ознакомиться
цемъ 77-мъ параграфѣ.

§ 77. Варьяція скорости точки и скорость варьяціи движущейся точки.

Пусть некоторая движущаяся точка описывает траекторію $M'' \dots$ (черт. 43); M есть положеніе точки въ пространствѣ иентъ t , M' — положеніе ея въ моментъ t' , M'' — въ моментъ т. д.

сли положенія, занимаемыя разсматриваемою точкою въ протвѣ, могутъ получать какія либо варьяціи, то, сообщивъ варьятѣмъ точкамъ траекторіи $MM'M'' \dots$, мы произведемъ измѣдженія разсматриваемою точки; это измѣненіе мы будемъ назъ *варьяціею движенія* этой точки, а получаемое чрезъ варьяовое движеніе будемъ называть *измѣненнымъ*.

Пусть $M_1M_1'M_1'' \dots$ (черт. 43) есть траекторія измѣненнаго нія, причеъ M_1 , M_1' , $M_1'' \dots$ суть положенія, занимаемыя щуюся точкою въ моменты t , t' , $t'' \dots$ при этомъ измѣнендженіи; длины $\overline{MM_1} = \epsilon$, $\overline{M'M_1'} = \epsilon'$, $\overline{M''M_1''} = \epsilon'' \dots$ варьяціи положеній M , M' , $M'' \dots$; вообще варьяція каждой первоначальной траекторіи есть весьма малая длина, превая изъ этой точки въ соотвѣтственную точку траекторіи измѣго движенія.

Варьяціи точекъ первоначальной траекторіи могутъ быть приписили отнесены къ движущейся точкѣ и тогда можно сказать, что *нія движущейся точки* измѣняетъ свою длину и свое направсъ теченіемъ времени, то есть, вмѣстѣ съ движеніемъ точки. ненное движеніе можетъ быть разсматриваемо какъ результатъ соіія первоначальнаго движенія съ варьяціею движущейся точки. Какъ первоначальное, такъ и измѣненное движенія должны облаеотъемлемыми качествами движенія: непрерывностью и послѣельностью положеній точки (см. стр. 6 кинематической части); да слѣдуетъ, что *варьяція движущейся точки* должна измѣнять длину и свое направленіе съ теченіемъ времени непрерывнымъ юмъ; въ остальныхъ отношеніяхъ варьяція произвольна.

Если изъ какой либо неподвижной точки O (черт. 44) проведемъ , равную и параллельную варьяціи движущейся точки, то другой

конецъ этой дуги будетъ чертить $EE'E'', \dots$, которую можно назвать *жующей точки*. (На чертежѣ 44-мъ OE, OE', OE'' , равны и параллельны

Скорость точки, описывающей го, называть *скоростью варьаци движущей* ея слѣдующимъ знакомъ: $v(\epsilon)$. (На изображаетъ величину и направление си

Понятно, что въ измѣненномъ дѣ точки отличается отъ скорости въ на чертежѣ 43-мъ изображены скорости момента t , а именно: линія \overline{MV} изображаетъ точки въ моментъ t при первоначальной скорости v_1 въ тотъ-же моментъ при из трическую разность между скоростью и вѣтствующую скоростью первоначальная вать *варьацию скорости* и обозначать вѣтствующія скорости суть t_1 , которы же моменту времени, такъ что варьаци геометрическая разность между скоростью v въ тотъ-же моментъ:

$$\overline{\epsilon(v)} = \overline{v_1} \text{ —}$$

(На чертежѣ 43-мъ изъ точки M_1 и параллельная скорости \overline{MV} , поэтому чину и направление варьаци скорости и

Можно доказать, что *скорость v равна и параллельна варьаци скорости*

$$\overline{v(\epsilon)} = \overline{\epsilon(v)}$$

Для доказательства мы воспользу мы употребили при доказательствѣ пар 208 кинематической части.

между радіусами векторами измѣненнаго и первоначальнаго положенія точки.

Знакъ δ , стоящій передъ какою либо функціею отъ координатъ какихъ либо точекъ, мы употребляемъ и будемъ употреблять для обозначенія приращенія, получаемаго значеніемъ этой функціи при варьированіи положеній этихъ точекъ; такъ, наприкладъ, δx или, что то же самое, $\delta(r \cos(r, X))$ означаетъ приращеніе, получаемое проекціею на ось X^{000} радіуса вектора точки при варьированіи положенія точки, т. е., алгебраическую разность между проекціею радіуса вектора r_1 измѣненнаго положенія точки и проекціею радіуса вектора r начальнаго положенія ея, т. е.:

$$\delta x = \delta(r \cos(r, X)) = r_1 \cos(r_1, X) - r \cos(r, X).$$

Если условимся обозначать варьацію положенія точки знакомъ $\epsilon(r)$ (такъ какъ это есть варьація радіуса вектора), то равенства (561) параграфа 75-го получаютъ слѣдующій видъ:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \delta(r \cos(r, X)) = \epsilon(r) \cos(\epsilon(r), X), \\ \delta y &= \delta(r \cos(r, Y)) = \epsilon(r) \cos(\epsilon(r), Y), \\ \delta z &= \delta(r \cos(r, Z)) = \epsilon(r) \cos(\epsilon(r), Z). \end{aligned} \right\} \dots (561, \text{bis})$$

(Вмѣсто $\epsilon(r)$ мы будемъ иногда писать просто ϵ , по прежнему).

На основаніи этихъ замѣчаній изъ приведенной теоремы могутъ быть выведены слѣдующія заключенія.

1) Относительно проекцій величинъ $\epsilon(v)$ и $v(\epsilon)$ на неподвижныя оси. Замѣнивъ въ равенствахъ (561, bis) радіусъ векторъ r — скоростью v , будемъ имѣть слѣдующія равенства:

$$\left. \begin{aligned} \delta x' &= \delta(v \cos(v, X)) = \epsilon(v) \cos(\epsilon(v), X) \\ \delta y' &= \delta(v \cos(v, Y)) = \epsilon(v) \cos(\epsilon(v), Y) \\ \delta z' &= \delta(v \cos(v, Z)) = \epsilon(v) \cos(\epsilon(v), Z) \end{aligned} \right\} \dots \dots (574)$$

Замѣнимъ варьациі декартовыхъ координатъ § 75-го, а затѣмъ, въ выраженіи R , производя координаты по q_1, q_2, \dots, q_n замѣнимъ произво, по q'_1, q'_2, \dots, q'_n , основываясь на формулахъ:

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial q_k} = \frac{\partial y_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial z_i}{\partial q_k} =$$

выведенныхъ въ § 73-мъ; тогда равенство (56) дующій видъ:

$$\sum_{k=1}^{k=n} Q_k \delta q_k + \delta T - \frac{d \sum_{k=1}^{k=n} p_k \delta q_k}{dt} =$$

гдѣ Q_k выражаются формулами (532) § 73-го производная отъ T по q'_k (см. (539) § 73); при этомъ что T выражено формулою (535, а) § 73-го.

Затѣмъ развернемъ: выраженіе δT в произв суммы, заключающей величины p_k :

$$\delta T = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial T}{\partial q'_k} \delta q'_k$$

$$\frac{d \sum_{k=1}^{k=n} p_k \delta q_k}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{dp_k}{dt} \delta q_k + \sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{d}{dt}$$

принявъ же во вниманіе равенства (583), на (584) (то есть (567)) получаетъ, послѣ всѣхъ сѣдующій видъ:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left(Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{dp_k}{dt} \right) \delta q_k$$

Такъ какъ всѣ варьациі $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$

имѣть положеніе равновѣсія; поэтому мы будемъ называть эти n уравненій *условіями равновѣсія задаваемыѣ силъ*, приложенныхъ къ системѣ матеріальныхъ точекъ.

Если задаваемыя силы выражаются функціями времени и координатъ точекъ, то изъ n условій равновѣсія и изъ p уравненій связей опредѣлятся, для каждаго момента времени, координаты всѣхъ точекъ въ положеніи равновѣсія системы; если опредѣленные такимъ образомъ значенія $3n$ координатъ окажутся независимыми отъ времени, т. е., постоянными, то выражаемое этими координатами положеніе равновѣсія системы можетъ быть также и положеніемъ ея покоя.

Подробному разсмотрѣнію положеній равновѣсія системы точекъ мы посвятимъ далѣе особую главу; но все то, что уже сказано и что будетъ сказано въ настоящей главѣ относительно положеній, уравненій и условій равновѣсія системы точекъ, необходимо для объясненія статическаго значенія дифференціальнаѣхъ уравненій движенія и равенства (567).

§ 80. Равенство, соединяющее въ себѣ всю совокупность уравненій равновѣсія.

Это равенство получится изъ равенства (567), если въ последнемъ положить равными нулю ускоренія всѣхъ точекъ системы; получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0 \dots \dots (567, b)$$

Такъ что, аналогично положенію (A) § 76-го, можемъ выставить слѣдующее:

Положеніе В. Система, состоящая изъ n матеріальныхъ точекъ, связанныхъ между собою p удерживающими связями: (491, 1), (491, 2) . . . (491, p) (§ 76), находится въ положеніи равновѣсія при условіи, чтобы приложенныя къ точкамъ задаваемыя силы удовлетворяли равенству (567, b) при всякихъ возможныхъ совокупностяхъ варьцій координатъ; каждая возможная совокупность варьцій координатъ должна удовлетворять равенствамъ (559, 1), (559, 2), . . . (559, p) (§ 76).

заключающіяся здѣсь возможныя варьяціи $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ положеній точекъ должны удовлетворять равенствамъ (559, 1, bis), (559, 2, bis), \dots (559, p, bis) (§ 75).

Матерьяльныя точки, образующія систему, могутъ совершать весьма различныя движенія при прохожденіи черезъ занимаемыя ими положенія; пусть Ds_1, Ds_2, \dots, Ds_n суть элементы путей, пробѣгаемые точками въ теченіи ничтожно-малаго промежутка времени Σ при какомъ либо возможномъ движеніи системы черезъ занимаемое ею положеніе; эти элементы путей, которые мы будемъ называть *возможными перемѣщеніями точекъ*, должны удовлетворять слѣдующимъ равенствамъ:

$$Ds_1 = 0, Ds_2 = 0, \dots, Ds_p = 0, \dots \dots \dots (587)$$

гдѣ:

$$Ds_k = \sum_{i=1}^{i=n} Ds_i (P_i, u_k) \cos (P_i, u_k, Ds_i) + \frac{\partial u_k}{\partial t} \Sigma.$$

Сравнивъ эти равенства съ равенствами (559, bis) § 75-го можемъ судить, что *если уравненія всѣхъ связей, которымъ подчинена система точекъ, не заключаютъ времени явнымъ образомъ, то всѣ возможныя варьяціи положеній точекъ могутъ служить возможными перемѣщеніями ихъ и обратно.*

Положимъ, что въ самомъ дѣлѣ уравненія всѣхъ связей системы не заключаютъ времени, тогда въ равенствѣ (567, с) варьяціи могутъ быть замѣнены перемѣщеніями и равенство это получить такой видъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i Ds_i \cos (F_i, Ds_i) = 0 \dots \dots \dots (567, d)$$

Каждый изъ членовъ первой части этого равенства выражаетъ величину работы задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ одной изъ точекъ системы, на протяженіи возможнаго перемѣщенія этой точки (см. § 25, стр. 107), а потому въ сказанныхъ случаяхъ положеніе (В) можетъ быть высказано въ слѣдующей формѣ:

Положеніе (В, 1). *Если система n матерьяльныхъ точекъ,*

занных p удерживающими независимыми от времени связями, находится въ положеніи равновѣсія и совершаетъ какое-либо возможное движеніе, то сумма работъ задаваемыхъ силами протяженіи ничтожно-малыхъ возможныхъ перемѣщеній тогда равна нулю, каково бы ни было возможное движеніе системы и каковы бы ни были возможные перемѣщенія; всякая совокупность одновременныхъ возможныхъ перемѣщеній точекъ системы удовлетворяетъ слѣдующимъ равенствамъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} Ds_i(P_i s_1) \cos(P_i s_1, Ds_i) = 0 \dots \dots (588, 1)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} Ds_i(P_i s_2) \cos(P_i s_2, Ds_i) = 0 \dots \dots (588, 2)$$

.....

$$\sum_{i=1}^{i=n} Ds_i(P_i s_p) \cos(P_i s_p, Ds_i) = 0 \dots \dots (588, p)$$

Обратно, всякое положеніе системы, при которомъ задаваемые силы удовлетворяютъ равенству (567, d) при всякихъ значеніяхъ возможныхъ перемѣщеній (удовлетворяющихъ равенствамъ (588)), есть положеніе равновѣсія.

Если въ числѣ связей есть удерживающія связи, то, для тѣхъ возможныхъ перемѣщеній, при которыхъ точки системы сходятъ съ одной съ нѣсколькихъ связей, сумма работъ задаваемыхъ силъ должна быть равна нулю, когда положеніе системы есть положеніе равновѣсія.

Это положеніе извѣстно подъ именемъ начала возможныхъ перемѣщеній. Оно носитъ названіе „начала“ или „принципа“ потому, что, принявъ его за основаніе въ качествѣ основнаго начала механики, можно изъ него вывести уравненія равновѣсія системы точекъ, связанныхъ удерживающими независимыми отъ времени связями, а слѣдовательно и всю статику такихъ системъ.

Существованіе этого принципа было впервые подмѣчено въ теоріи простыхъ машинъ: рычага, блоковъ, воротъ и наклонной плоскости, гдѣ этотъ принципъ почти очевиденъ, если не принимать въ расчетъ тренія и разсматривать простые механизмы какъ идеальныя связи; но нельзя утверждать, чтобы этотъ принципъ былъ самъ по себѣ, безъ доказательства, очевиденъ для всякихъ связей, независимыхъ отъ времени. Поэтому въ тѣхъ курсахъ и сочиненіяхъ по механикѣ, въ которыхъ начало возможныхъ перемѣщеній выставляется какъ основное положеніе статики системы несвободныхъ точекъ, является надобность доказать это начало независимо отъ общихъ уравненій равновѣсія системы; извѣстны многія такіа доказательства, придуманныя различными авторами; они состоятъ, по большей части, или въ томъ, что предполагаемыя связи замѣняются другими простѣйшими связями, для которыхъ начало возможныхъ перемѣщеній очевидно, или въ томъ, что, чрезъ присоединеніе новыхъ простѣйшихъ связей, система точекъ приводится къ системѣ простыхъ машинъ. Въ слѣдующемъ параграфѣ будутъ приведены нѣкоторые изъ доказательствъ подобнаго рода.

Если уравненія связей заключаютъ время, то равенства (587) отличаются отъ равенствъ (559), а потому тогда возможны совокупности варьаций положеній точекъ не могутъ служить возможными перемѣщеніями точекъ.

Напримѣръ, возможные варьации положеній точекъ m_1 и m_2 , связанныхъ связью, упомянутою на стр. 307, должны удовлетворять равенству:

$$\epsilon_1 \cos(r_{21}, \epsilon_1) - \epsilon_2 \cos(r_{21}, \epsilon_2) = 0,$$

между тѣмъ, какъ возможные перемѣщенія этихъ точекъ должны удовлетворять равенству:

$$Ds_1 \cos(r_{21}, Ds_1) - Ds_2 \cos(r_{21}, Ds_2) + (l_0 - a)ke^{-kt} = 0,$$

а потому не можетъ быть, чтобы ϵ_1 равнялось Ds_1 и, въ то же время, ϵ_2 было равно Ds_2 .

Въ этихъ случаяхъ правильнѣе было бы называть положеніе (B) на-

ординать силы инерціи J_i , которую мы воображаемъ себѣ приложенною къ точкѣ m_i , суть:

$$\left. \begin{aligned} J_i \cos(J_i, X) &= -m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \\ J_i \cos(J_i, Y) &= -m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \\ J_i \cos(J_i, Z) &= -m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (589, i)$$

Вообразивъ себѣ такіа силы и сравнивъ дифференціальныя уравненія движенія (517 bis) стр. 389 съ уравненіями равновѣсія (586), стр. 398 можемъ придти къ мысли разсматривать дифференціальныя уравненія движенія какъ уравненія равновѣсія силъ: задаваемыхъ, реакцій связей и силъ инерціи; въ самомъ дѣлѣ, дифференціальныя уравненія движенія точекъ m_i выражаютъ, что *равнодѣйствующая F_i всѣхъ задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ этой точкѣ, равнодѣйствующая R_i реакцій связей, которымъ подчинена эта точка, и сила инерціи J_i этой точки взаимно уравновѣшиваются*, т. е.:

$$\overline{F}_i + \overline{J}_i + \overline{R}_i = 0 \dots\dots\dots (517, B)$$

Примѣчаніе. Фиктивная сила инерціи не имѣетъ ничего общаго со свойствомъ инерціи матеріи и эти понятія не должно смѣшивать.

Воображаемая сила \overline{D}_i , равная и прямопротивоположная силѣ инерціи, называется *движущею* или *эффективною силою* (Effektivkraft), а сила \overline{P}_i , равная и прямопротивоположная равнодѣйствующей R_i реакцій связей, называется *потерянною силою*.

Уравненія (517, bis) стр. 389 можно еще выразить такъ:

$$\overline{F}_i = \overline{D}_i + \overline{P}_i, \dots\dots\dots (517, C)$$

т. е., *равнодѣйствующая всѣхъ задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ каждой изъ матеріальныхъ точекъ системы, разлагается на двѣ составляющія: на потерянную силу, которая уравновѣшивается съ реакціями связей, и на движущую силу, которая сообщаетъ матеріальной точкѣ то самое ускореніе, какое бы она сообщила свободной точкѣ той же массы.*

Кромѣ того, уравненія (517, bis) можно еще представить такъ:

$$\overline{P}_i + \overline{R}_i = 0, \dots\dots\dots (517, D)$$

Сомнительно, однако, чтобы въ древности съ теоріи статики; по крайней мѣрѣ правильныя тѣсъ въ первый разъ встрѣчаются только у Архимеда.

По этой причинѣ сочиненія Архимеда считались чинами по механикѣ и его называютъ основателемъ, дошедшіе до насъ остатки сочиненій этого носятся только къ статикѣ (теорія рычага, равновѣсія центровъ инерціи однородныхъ площа-

Первые слѣды изученія вопросовъ динамики разъ 17 столѣтій спустя послѣ Архимеда, а имѣнито художника Леонардо-да-Винчи (родившагося въ 1452 году) который вполнѣ правильно понималъ нѣкоторые изъ законовъ механики (законъ возрастанія скорости по наклонной плоскости и законъ возрастанія скорости при свободномъ паденіи ¹⁾). Повидимому Италия была мѣстомъ рожденія динамики и возрожденія умершей въ 1570 году, уже зналъ, что скорость, падающаго тѣла, не зависитъ отъ массы тѣла; существованіи центробѣжной силы и томъ, что отъ шага тѣла часть его продолжаетъ двигаться принадлежитъ первое опредѣленіе понятія о моментѣ (momentum) ²⁾. Открытіе начала возможныхъ перемѣненій по словамъ Лагранжа ³⁾, вѣроятно Гвидо Убалди который подмѣтилъ это начало въ рычагѣ и въ полнѣе, что, основываясь на этомъ принципѣ, равновѣсія рычага, блоковъ и вѣрота. Галилей (1

¹⁾ Почерпнуто изъ сочиненія Дюринга: *Kritische und Principien der Mechanik*. Düring. 1872; Дюрингъ 16) на сочиненія:

Venturi, *Essai sur les ouvrages physico-mathématiques* Paris, 1797.

Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*

²⁾ Также изъ сочиненія Дюринга, который цитируетъ *Benedicti Divers. speculat.* Taurini, 1585.

³⁾ *Mécanique Analytique* par Lagrange стр. 18, то

⁴⁾ Guido Ubaldi marquis del Monte, *Mechanicorum*

⁵⁾ Главнѣйшія сочиненія Галилея по механикѣ съ *Discorsi intorno alle cose che stanno in su l'acqua* 1612 (по гидромеханикѣ).

Dialogo intorno ai due massimi sistemi del mondo.

Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due

и бы все остальные точки не получили никакого перемещения, то P поднялся бы на такую длину.

Если все точки получают какие либо перемещения, то груз P опустится на длину, равную:

$$k_1 \epsilon_1 \cos(\epsilon_1, F_1) + k_2 \epsilon_2 \cos(\epsilon_2, F_2) + \dots + k_n \epsilon_n \cos(\epsilon_n, F_n),$$

где поднятие груза скажется, как отрицательное опускание.

Условие, что груз не должен опускаться при возможных перемещениях точек системы, выразится формулою:

$$\sum_{i=1}^{i=n} k_i \epsilon_i \cos(F_i, \epsilon_i) \leq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i \epsilon_i \cos(F_i, \epsilon_i) \leq 0.$$

Если все связи удерживающия, то возможные вариации должны удовлетворять уравнениям (559, bis) § 75-го, а следовательно, тогда каждой uniqueness возможных вариаций соответствует возможная же совокупность вариаций равных и противоположных.

Принимая во внимание это обстоятельство, можем заключить, что все связи удерживающия, то груз P не должен ни опускаться, ни подняться при возможных перемещениях точек. В самом деле, мы доказали, что он не должен опускаться, но если возможны перемещения $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ при которых груз поднимается, то возможны перемещения: $-\epsilon_1, -\epsilon_2, \dots, -\epsilon_n$, равные и прямопротивоположные первым; при них груз на столько же опустится, на сколько поднимется при первых; а следовательно, при положении равновесия системы, такие перемещения, при которых груз поднимается, не быть также невозможны.

Так, если все связи удерживающия, то положение равновесия системы возможно только тогда, когда при всех возможных перемещениях точек удовлетворяется равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i \epsilon_i \cos(F_i, \epsilon_i) = 0 \dots \dots \dots (567, b)$$

Эта совокупность дифференціальных уравненій должна послужить для опредѣленія вида тѣхъ n функцій отъ времени, которыми выражаются независимыя координаты системы движущихся точекъ.

Если эти n функцій будутъ опредѣлены, то функціи времени, выражающія законъ измѣненія p зависимыхъ координатъ, опредѣлятся изъ уравненій связей (491, 1), (491, 2), . . . (491, p).

Для сохраненія симметріи въ тѣхъ формулахъ и выраженіяхъ, которыя мы будемъ писать въ настоящей главѣ, предположимъ, что декартовы координаты могутъ быть выражены функціями отъ n независимыхъ координатныхъ параметровъ q_1, q_2, \dots, q_n ; при этомъ мы можемъ даже допустить, что эти функціи заключаютъ время явнымъ образомъ. Пусть (526) (стр. 359) суть эти выраженія.

Дѣлая такое предположеніе, мы нисколько не ограничиваемъ общности нашихъ разсужденій, потому что независимыя декартовы координаты могутъ быть рассматриваемы какъ независимыя координатные параметры.

Для опредѣленія вида тѣхъ функцій времени:

$$q_1 = f_1(t), q_2 = f_2(t), \dots, q_n = f_n(t), \dots \dots \dots (598)$$

которыя выражаютъ законъ измѣненія координатныхъ параметровъ при движеніи системы точекъ подъ вліяніемъ данныхъ силъ, надо найти надлежащее число интеграловъ совокупности (531) (стр. 367) дифференціальныхъ уравненій Лагранжа.

Относительно интегрированія и интеграловъ этихъ дифференціальныхъ уравненій намъ придется высказать много сходнаго съ тѣмъ, что уже сказано въ § 18 (стр. 46 — 59) относительно интегрированія дифференціальныхъ уравненій движенія одной свободной матеріальной точки; поэтому, при изложеніи нѣкоторыхъ пунктовъ настоящаго параграфа, мы будемъ выражаться сжато, безъ подробныхъ объясненій.

Функціи (598) должны удовлетворять дифференціальнымъ уравненіямъ (531), обращая ихъ въ тождества.

альных уравнений (531) может быть
 ния рядовъ:

$$\frac{z}{2} + q_{10}''' \frac{z^3}{1.2.3} + \dots, *) \dots (599, k)$$

ныхъ функций въ строки, расположен-
 нтъ разности $(t - t_0) = \mathfrak{Z}$; t_0 есть ва-
 величинны координатныхъ параметровъ
 значать знаками:

$$z_0, \dots, q_{10}, \dots \dots \dots (600)$$

z'_1, \dots, q'_n — знаками:

$$z'_0, \dots, q'_{10}, \dots \dots \dots (601)$$

слихъ производныхъ: q_{10}'' , q_{10}''' , \dots
 кціями: отъ t_0 , отъ величинъ (600) и
 ния получимъ изъ дифференціальныхъ
 ныхъ отъ этихъ уравненій по времени.
 кать искомыя функций (598); слѣдо-
 заключать, кромѣ t , еще t_0 , величинны
 ;

$$q_{10}, q'_{10}, q'_{20}, \dots, q'_{10}), \dots (598. k)$$

сдѣлать 1, 2, \dots, n .

ихъ уравненій (531) помощію какихъ
 учить уравненіе такого вида:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \dots \dots \dots (602, 1)$$

и отъ t , q_1 , q_2, \dots, q_n , q'_1 , q'_2, \dots, q'_n
 1), получимъ равенство:

$$q'_1, q'_2, \dots, q'_n) = C_1, \dots (603. 1)$$

тъ: 1, 2, 3, \dots, n .

гдѣ C_1 есть произвольная постоянная; равенство (603, 1) есть одинъ изъ *первыхъ интеграловъ* совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (531).

Уравненіе (602, 1) обращается въ тождество, если вмѣсто вторыхъ производныхъ $q_1'', q_2'', \dots, q_n''$ подставимъ въ него выраженія, получаемыя для этихъ производныхъ изъ дифференціальныхъ уравненій (531).

Положимъ, что мы нашли n первыхъ интеграловъ:

$$\varphi_1 = C_1, \varphi_2 = C_2, \dots, \varphi_n = C_n, \dots \quad (603)$$

такихъ, что получаемыя изъ нихъ уравненія:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \frac{d\varphi_2}{dt} = 0, \dots, \frac{d\varphi_n}{dt} = 0, \dots \quad (602)$$

равносильны совокупности дифференціальныхъ уравненій (531), т. е., что всѣ уравненія (531) могутъ быть получены изъ уравненій (602); въ такомъ случаѣ эти n первыхъ интеграловъ (603) могутъ служить для выраженія величинъ q_1', q_2', \dots, q_n' въ функціяхъ отъ времени t , отъ координатныхъ параметровъ и отъ n произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_n ; пусть эти выраженія будутъ:

$$q_k' = \mathfrak{F}_k(t, q_1, q_2, \dots, q_n, C_1, C_2, \dots, C_n), \dots \quad (604, k)$$

гдѣ k означаетъ каждое изъ чиселъ: $1, 2, \dots, n$.

Если изъ n первыхъ интеграловъ (603), помощію какихъ либо преобразованій, можно получить уравненіе такого вида:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = 0, \dots \quad (605, 1)$$

гдѣ Φ_1 есть какая либо функція отъ t , отъ координатныхъ параметровъ и отъ n произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_n , то, интегрируя уравненіе (605, 1), получимъ равенство:

$$\Phi_1(t, q_1, q_2, \dots, q_n, C_1, C_2, \dots, C_n) = \Gamma_1, \dots \quad (606, 1)$$

гдѣ Γ_1 есть произвольная постоянная; равенство (606, 1) есть одинъ

интегралов совокупных дифференциальных уравне-

го мы нашли n таких вторых интегралов:

$$= \Gamma_1, \Phi_2' = \Gamma_2, \dots, \Phi_n = \Gamma_n, \dots \dots \dots (606)$$

въ нихъ уравненія:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = 0, \frac{d\Phi_2}{dt} = 0, \dots, \frac{d\Phi_n}{dt} = 0 \dots \dots \dots (605)$$

бупности первыхъ интеграловъ (603), т. е., что всѣ могутъ быть получены изъ уравненій (605); въ та-
мъ вторыхъ интеграловъ (606) могутъ служить для
иныхъ параметровъ въ функціяхъ отъ времени t
ихъ постоянныхъ; пусть эти выраженія будутъ:

$$t, C_1, C_2, \dots, C_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n), \dots (598, A, k)$$

каждое изъ чиселъ: $1, 2, \dots, n$.

ля q'_k получатся или непосредственно изъ выраже-
нъ производныя по времени отъ функцій ψ_k , или
(604), если замѣнить въ нихъ q_1, q_2, \dots, q_n функ-
... ψ_n .

звольными постоянными $C_1, C_2, \dots, C_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$,
величинами (600) и (601) существуетъ зависимость,
явленствами вида:

$$q_{20}, \dots, q_{n0}, q'_{10}, q'_{20}, \dots, q'_{n0} = C_k \dots \dots (607, k)$$

$$q_{20}, \dots, q_{n0}, C_1, C_2, \dots, C_n = \Gamma_k, \dots \dots (608, k)$$

, каждое изъ чиселъ: $1, 2, \dots, n$.

симость можетъ быть представлена подъ видомъ слѣ-
тъ, выражающихъ, что величины (600) и (601) мо-
отриваемы какъ функціи отъ t_0 и $2n$ произвольныхъ

$$q_{k0} = \psi_k(t_0, C_1, C_2, \dots, C_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n) \dots (609, k)$$

$$q'_{k0} = \psi'_k(t_0, C_1, C_2, \dots, C_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n); \dots (610, k)$$

отсюда слѣдуетъ, что величины (600) и (601) столь же произвольны, какъ и постоянныя $C_1, C_2, \dots, C_n, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$.

Функціи ψ_k (598, А) обратятся въ функціи f_k (598), если произвольныя постоянныя C_k и Γ_k выразить по формуламъ (607) и (608) функціями отъ t_0 и отъ величинъ (600) и (601).

Моментъ t_0 называютъ *начальнымъ моментомъ времени*, хотя онъ можетъ быть взятъ гдѣ угодно на протяженіи всего времени, занимаемаго разсматриваемымъ движеніемъ системы точекъ; величины (600) суть координатныя параметры *начальнаго положенія* системы и могутъ быть названы *начальными величинами координатныхъ параметровъ*; величины (601) могутъ быть названы *начальными величинами производныхъ* q'_1, q'_2, \dots, q'_n ; проэкціи на оси X^{ovz} , Y^{ovz} , Z^{ovz} *начальныхъ скоростей* точекъ системы опредѣляются изъ формулъ (593) § 73-го по величинамъ (600) и (601).

Въ тѣхъ случаяхъ, когда будетъ возможно и нужно для упрощенія формулъ, будемъ считать время отъ начального момента, полагая $t_0 = 0$; тогда начальныя величины координатныхъ параметровъ будемъ обозначать знаками: k_1, k_2, \dots, k_n , а начальныя величины первыхъ производныхъ отъ координатныхъ параметровъ — знаками: x_1, x_2, \dots, x_n ; начальныя величины декартовыхъ координатъ точекъ системы будемъ обозначать буквами: $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \dots, a_n, b_n, c_n$, а начальныя величины проэкцій скоростей точекъ системы на оси X^{ovz} , Y^{ovz} , Z^{ovz} — буквами $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

Изъ вышесказаннаго видно, что *функціи времени, выражающія законъ измѣненія координатныхъ параметровъ движущейся системы и матеріальныхъ точекъ, связанныхъ р связями, заключаютъ въ себѣ 2n постоянныхъ произвольныхъ; столько же произвольныхъ постоянныхъ заключаютъ и тѣ функціи времени, которыя выражаютъ законъ измѣненія декартовыхъ координатъ этихъ точекъ системы.*

ных q'_k и p'_k будут подставлены равныя имъ вторыя части уравненій (554).

Вся совокупность (554) дифференціальныхъ уравненій перваго порядка будетъ вполне проинтегрирована, если q_1, q_2, \dots, q_n и p_1, p_2, \dots, p_n будутъ выражены такими функціями времени, которыя обращаютъ дифференціальные уравненія въ тождества.

Выраженія эти могутъ быть получены, если найдемъ 2мъ интеграловъ

$$\phi_1 = C_1, \phi_2 = C_2, \dots, \phi_{2n} = C_{2n} \dots \dots \dots (613)$$

данной совокупности (554); притомъ эти интегралы должны быть таковы, чтобы совокупность равенствъ:

$$\frac{d\phi_1}{dt} = 0, \frac{d\phi_2}{dt} = 0, \dots, \frac{d\phi_{2n}}{dt} = 0 \dots \dots \dots (614)$$

была равносильна совокупности (554), то есть, чтобы чрезъ рѣшеніе равенствъ (614) относительно $p'_1, p'_2, \dots, p'_n, q'_1, q'_2, \dots, q'_n$ получились бы всѣ дифференціальные уравненія совокупности (554).

Если такіе 2мъ интеграловъ будутъ найдены, то, рѣшивъ ихъ относительно величинъ $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n$, получимъ искомыя выраженія этихъ величинъ въ функціяхъ времени; эти функціи будутъ заключать, кромѣ времени, 2мъ произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_{2n} .

Всякое равенство вида:

$$F(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{2n}) = C \dots \dots \dots (615)$$

есть интеграль совокупности (554), потому что полная производная первой части его, а именно:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \phi_2} \frac{d\phi_2}{dt} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \phi_{2n}} \frac{d\phi_{2n}}{dt}$$

обращается въ нуль тождественно при замѣщеніи производныхъ $q'_1, q'_2, \dots, q'_n, p'_1, p'_2, \dots, p'_n$ вторыми частями дифференціальныхъ уравненій (554), такъ какъ такое замѣщеніе обращаетъ въ нуль полныя производныя по t отъ $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{2n}$.

б:

$$q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = C. \dots (611)$$

отличающийся от $2n$ интегралов (613), под видом (615). Для того, чтобы убедиться, что мы исключили из ϕ величин p_2, \dots, p_n при помощи равенств (613); а обратятся в функцию от t, C_1, C_2 .
цию от $t, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{2n}$

$$(t, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{2n}),$$

функция f не должна заключать времени в дѣль, полная производная от f по t ,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \phi_2} \frac{d\phi_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \phi_{2n}} \frac{d\phi_{2n}}{dt}$$

посредствѣ равенствъ (614), въ нуль; по-

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

быть функциею только отъ $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{2n}$.
ить, что хотя совокупныя дифференціальныя безчисленное множество интеграловъ, въ интегралы независимы, всё же прочіе комбинаціи независимыхъ интеграловъ; ювъ могутъ быть приняты за независимы, наго дифференцированія по времени, модифференціальныя уравненія совокупности тельно интеграловъ (613).

овъ совокупности (554), по замѣщеніи въ p_n выраженія (542) параграфа 74-го, первыхъ интеграловъ дифференціальныхъ) параграфа 73-го; поэтому послѣднія

имѣютъ безчисленное множество первыхъ интеграловъ, но только 2n изъ нихъ суть интегралы независимые, прочіе же первые интегралы суть комбинаціи независимыхъ первыхъ интеграловъ.

Въ слѣдующихъ трехъ главахъ будутъ показаны нѣкоторые приемы, при помощи которыхъ могутъ быть найдены нѣкоторые изъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія системы точекъ въ тѣхъ случаяхъ, когда задаваемы силы и связи удовлетворяютъ опредѣленнымъ условіямъ.

ГЛАВА VII.

Законъ движенія центра инерціи.

§ 85. Составленіе дифференціальныхъ уравненій движенія центра инерціи системы матеріальныхъ точекъ.

Сложимъ дифференціальныя уравненія (517, а 1) (517, а 2)...
...(517, а n) параграфа 70-го, получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i'' = \sum_{i=1}^{i=n} X_i + \lambda(v_1) \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial v_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda(v_p) \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial v_p}{\partial x_i} \dots (616, a)$$

точно также, сложивъ всѣ тѣ уравненія (517), которыя заключаютъ вторыя производныя отъ координатъ y, получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i'' = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i + \lambda(v_1) \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial v_1}{\partial y_i} + \dots + \lambda(v_p) \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial v_p}{\partial y_i} \dots (616, b)$$

сложивъ затѣмъ всѣ остальные уравненія, т. е.: (517, с1) 517, с2)..
...(517, сn), получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i'' = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i + \lambda(v_1) \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial v_1}{\partial z_i} + \dots + \lambda(v_p) \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial v_p}{\partial z_i} \dots (616, c)$$

Вторые части этих уравнений суть проекции на оси X^{000} , Y^{000} , Z^{000} геометрической суммы всех задаваемых сил и всех связей, приложенных ко всем точкам системы.

§ 86. Центр инерции системы материальных точек.

Если геометрическая сумма всех сил и всех реакций связей равна нулю во все время движения системы, то тогда дифференциальные уравнения (616) обратятся в следующие:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i'' = 0; \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i'' = 0; \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i'' = 0 \dots \dots (617)$$

Очевидно, каждое из этих уравнений может быть проинтегрировано два раза: первые интегралы будут:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i' = C_1; \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i' = C_2; \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i' = C_3; \dots \dots (618)$$

рые интегралы:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i &= C_1 t + \Gamma_1, \\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i &= C_2 t + \Gamma_2, \\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i &= C_3 t + \Gamma_3. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (619)$$

Представим себе точку C , координаты (x_c, y_c, z_c) которой связаны с координатами всех точек системы следующими равенствами:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\ y_c &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\ z_c &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (620)$$

Тогда интеграламъ (619) можно будетъ дать слѣдующій видъ:

$$Mx_c = C_1 t + \Gamma_1; \quad My_c = C_2 t + \Gamma_2; \quad Mz_c = C_3 t + \Gamma_3, \dots (619 \text{ bis})$$

гдѣ

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n \dots \dots \dots (621)$$

есть масса всей системы, т. е., сумма массъ всѣхъ точекъ системы.

Интегралы (619 bis) выражаютъ, что точка *C* движется равномерно и прямолинейно, причемъ скорость ея такова, что если бы эта точка была матерьяльною точкою и масса ея равнялась бы массѣ всей системы, то количество движенія этой точки *C* равнялось бы геометрической суммѣ количествъ движеній всѣхъ точекъ системы.

Эта точка *C* называется *центромъ инерціи* системы точекъ.

§ 87. Законъ движенія центра инерціи системы матерьяльныхъ точекъ.

На основаніи выраженій (620) первыя части дифференціальныхъ уравненій (616) могутъ быть представлены подѣ слѣдующимъ видомъ:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2}, \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2}, \quad M \frac{d^2 z_c}{dt^2};$$

тогда эти уравненія (616) обращаются въ дифференціальныя уравненія движенія матерьяльной точки, совпадающей съ центромъ инерціи системы, масса которой равна массѣ всей системы и къ которой какъ будто приложены всѣ задаваемые силы и всѣ реакціи связей, приложенныя въ дѣйствительности къ точкамъ системы.

Такимъ образомъ дифференціальныя уравненія (616) выражаютъ слѣдующій *общій законъ движенія* какой либо системы точекъ, называемый *закономъ движенія центра инерціи*:

Центръ инерціи системы матерьяльныхъ точекъ движется такимъ образомъ, какъ будто бы это была свободная матерьяльная точка, въ которой была бы сосредоточена масса всей системы и къ которой были бы приложены всѣ задаваемые силы и реакціи связей.

Въ такомъ видѣ этотъ законъ есть дѣйствительно *общій законъ*

енія, такъ какъ онъ имѣетъ мѣсто при всякихъ задаваемыхъ и при всякихъ связяхъ; подчиняя связи и задаваемые силы слѣдующимъ ограниченіямъ, мы получимъ слѣдующія спеціальныя формы этого закона, имѣющія мѣсто во многихъ вопросахъ и задачахъ механики.

огда геометрическая сумма всѣхъ реакцій связей равна нулю, уравненія (616) получаютъ слѣдующій видъ:

$$\frac{dx_c}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} X_i; \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i; \quad M \frac{d^2 z_c}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i, \dots \quad (616, A)$$

, когда геометрическая сумма всѣхъ реакцій связей равна нулю, тогда центр инерціи системы движется какъ свободная материальная точка, въ которой сосредоточена вся масса системы и къ которой приложены всѣ задаваемые силы; эта специальная форма закона движенія центра инерціи имѣетъ мѣсто, между прочимъ, въ слѣдующихъ случаяхъ:

- а) когда всѣ точки системы свободны,
- б) когда реакціи связей попарно равны и прямопротивоположны; напримѣръ, если всѣ связи суть идеальныя связи, указанные примѣрахъ 53-мъ, 54-мъ и 55-мъ (см. стр. 336 — 338, — 346) и соединяющія точки системы между собою, но не съ неподвижными или неподвижными точками.

Когда не только геометрическая сумма всѣхъ реакцій связей равна нулю, но также равна нулю и геометрическая сумма всѣхъ действующихъ силъ, тогда получается еще болѣе частная форма закона движенія центра инерціи, а именно тогда центр инерціи системы движется такъ, какъ двигалась бы по инерціи материальная точка, въ которой была бы сосредоточена масса всей системы; въ этихъ случаяхъ мы имѣемъ шесть интеграловъ (618) и (619) дифференціальныя уравненія движенія системы точекъ.

Если, напримѣръ, всѣ точки системы свободны и всѣ задаваемые силы суть силы взаимнодѣйствія между точками системы, попарно равныя и противоположны (такъ что всякой силѣ $M_i f$ (черт. 48), при-

ложенной къ одной изъ точекъ, соответствуетъ сила $M_1 f$ равная ей и прямопротивоположная, приложенная къ другой точкѣ системы), то тогда геометрическая сумма всѣхъ задаваемыхъ силъ будетъ равна нулю, а потому центръ инерціи системы будетъ двигаться равномерно и прямолинейно.

Въ примѣрахъ 61, 62 и 63-мъ (стр. 326—327) центры инерціи системы должны совершать прямолинейныя равномерныя движенія, такъ что въ каждомъ изъ этихъ примѣровъ мы имѣемъ по шести интеграловъ вида (618) и (619).

Въ примѣрѣ 66-мъ (§ 73, стр. 371) центръ инерціи системы совпадаетъ съ центромъ C ромба, реакціи идеальныхъ стержней попарно равны и прямопротивоположны; геометрическая сумма силъ притяженія точекъ системы къ началу координатъ равна $2\mu(m_1 + m_2)r_c$ и направлена параллельно \overline{CO} ; въ самомъ дѣлѣ, означивъ абсолютныя координаты вершинъ ромба знаками: $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$, будемъ имѣть слѣдующія выраженія проекцій геометрической суммы задаваемыхъ силъ:

$$- \mu[m_1(x_1 + x_3) + m_2(x_2 + x_4)] = - 2\mu(m_1 + m_2)x_c$$

$$- \mu[m_1(y_1 + y_3) + m_2(y_2 + y_4)] = - 2\mu(m_1 + m_2)y_c,$$

такъ какъ

$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4 = 2x_c \text{ и } y_1 + y_3 = y_2 + y_4 = 2y_c.$$

Первыя два дифференціальныя уравненія этого примѣра суть дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи системы въ полярныхъ координатахъ.

§ 88. Нѣсколько замѣчаній относительно опредѣленія положенія центра инерціи системы матеріальныхъ точекъ.

Положеніе центра инерціи данной системы матеріальныхъ точекъ, занимающихъ данное положеніе въ пространствѣ, опредѣляется вычисленіемъ по формуламъ (620) § 86-го или помощію геометрическихъ построеній, основанныхъ на этихъ формулахъ. Мы ограничимся нѣсколькими замѣчаніями, касающимися этого предмета.

1) Если выразить положеніе точекъ системы и центра инерціи въ другихъ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ ξ, η, ζ , то

нѣ системы таково, что середины кратчайшихъ разстояній между парными точками заключаются въ одной плоскости, то въ этой плоскости очевидно заключается центръ инерціи всей системы; въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ эту плоскость за плоскость YZ и составимъ выраженіе для ξ_c ; такъ какъ обѣ точки каждой пары имѣютъ равныя массы и находятся по обѣ стороны плоскости YZ въ равныхъ разстояніяхъ отъ нея, то получимъ $\xi_c = 0$.

8) Если подобная симметрія имѣетъ мѣсто по отношенію къ двумъ пересѣкающимся плоскостямъ, то центръ инерціи находится на линіи пересѣченія этихъ плоскостей.

9) Если симметрія имѣетъ мѣсто по отношенію къ тремъ пересѣкающимся плоскостямъ, то центръ инерціи находится въ точкѣ пересѣченія ихъ.

10) Если распредѣлить систему точекъ на нѣсколько группъ и сначала опредѣлить положеніе центра инерціи каждой изъ этихъ группъ, то, чтобы затѣмъ найти положеніе центра инерціи всей системы, надо поступить такъ: предположивъ, что масса каждой группы сосредоточена въ ея центрѣ инерціи, надо искать положеніе центра инерціи всѣхъ этихъ новыхъ воображаемыхъ матеріальныхъ точекъ.

Эти замѣчанія оказываются весьма полезными во многихъ частныхъ случаяхъ.

§ 89. Объ томъ, какъ разсматривается сплошное тѣло въ механикѣ системы матеріальныхъ точекъ.

Мы должны здѣсь обратить вниманіе на способы опредѣленія и вычисленія положеній центровъ инерціи сплошныхъ тѣлъ, но прежде этого слѣдуетъ объяснить, какимъ образомъ механика системы точекъ примѣняется къ сплошнымъ тѣламъ.

Данное сплошное тѣло мысленно раздѣляютъ на весьма большое число малыхъ частей, называемыхъ элементами тѣла и представляютъ себѣ, что каждый элементъ замѣняется матеріальною точкою той же массы, заключающеюся въ объемъ элемента или на его поверхности; къ этой совокупности матеріальныхъ точекъ, которая замѣняетъ сплошное тѣло, примѣняютъ теоремы и формулы механики системы матеріальныхъ точекъ.

гдѣ σ есть плотность матеріи тѣла въ одной изъ точекъ этого элемента (см. стр. 29).

Матеріальная точка, которую мы замѣняемъ элементъ тѣла, должна быть помѣщена внутри или на поверхности этого элемента; положеніе ея въ самомъ элементѣ можетъ быть какое угодно, такъ какъ въ окончательныхъ результатахъ предполагается, что размѣры элементовъ уменьшаются до нуля; мы можемъ предположить, что матеріальная точка, замѣняющая элементъ, находится или въ центрѣ параллелепипеда, или въ одной изъ его вершинъ; мы предпочтемъ помѣщать ее въ той вершинѣ элементарнаго параллелепипеда, координаты которой имѣютъ наименьшія значенія.

При употребленіи прямолинейныхъ косоугольныхъ координатъ, элементы объема имѣютъ видъ косоугольныхъ бесконечно-малыхъ параллелепипедовъ; объемъ такого параллелепипеда равенъ:

$$dO = \omega dx dy dz;$$

ω есть объемъ косоугольнаго параллелепипеда, ребра котораго параллельны осямъ координатъ и имѣютъ длины, равныя единицѣ; этотъ объемъ выражается такъ:

$$\omega = \begin{vmatrix} 1, & \gamma, & \beta \\ \gamma, & 1, & \alpha \\ \beta, & \alpha, & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma,$$

гдѣ

$$\alpha = \cos(V, Z), \quad \beta = \cos(Z, X), \quad \gamma = \cos(X, Y).$$

При употребленіи круговыхъ цилиндрическихъ координатъ, элементы объема имѣютъ видъ отрѣзковъ колецъ съ прямоугольными сѣченіями; на чертежѣ 49-мъ изображенъ, въ увеличенномъ видѣ, одинъ такой элементъ. Если координаты точки A суть ρ, θ, z , то координаты точки C_1 суть $(\rho + d\rho), (\theta + d\theta), (z + dz)$; шесть поверхностей, которыми ограниченъ этотъ элементъ, суть: плоскости $z(ABB_1A_1)$ и $(z + dz)(DCC_1D_1)$, плоскости $\theta(ADD_1A_1)$ и $(\theta + d\theta)(BCC_1B_1)$, цилиндрическія поверхности $\rho(ADCB)$ и $(\rho + d\rho)(A_1D_1C_1B_1)$. Пре-

линейное и равномерное движеніе, всѣ же прочія точки тѣла будутъ описывать криволинейныя траекторіи.

Если твердое тѣло свободно, но подвержено какому бы то ни было силамъ, то центръ инерціи его будетъ двигаться такимъ образомъ, какъ будто бы въ немъ была сосредоточена масса всего тѣла и къ нему были приложены всѣ силы, приложенныя къ точкамъ тѣла.

Поэтому, въ тѣхъ вопросахъ механики, въ которыхъ возможно замѣнить каждое сплошное твердое тѣло матерьяльною точкою, слѣдуетъ помѣщать эту точку въ центръ инерціи, а не въ иной точкѣ твердаго тѣла.

§ 91. Опредѣленіе положенія центра инерціи сплошныхъ тѣлъ, поверхностей и линій. Примѣры.

Для полученія формулъ, выражающихъ положеніе центра инерціи сплошнаго тѣла въ прямолинейныхъ координатахъ, примѣнимъ формулы (§ 86-го) къ системѣ матерьяльныхъ точекъ, замѣняющихъ элементы тѣла и затѣмъ предположимъ, что размѣры элементовъ уменьшаются до нуля, а число ихъ увеличивается до безконечности; тогда получимъ:

$$x_c = \frac{1}{M} \iiint \sigma x dO; \quad y_c = \frac{1}{M} \iiint \sigma y dO; \quad z_c = \frac{1}{M} \iiint \sigma z dO, \dots (622)$$

гдѣ

$$M = \iiint \sigma dO, \quad dO = dx dy dz,$$

а интегрированія распространены на весь объемъ тѣла.

Во многихъ случаяхъ опредѣленіе положенія центра инерціи сплошнаго тѣла сведется на опредѣленіе положенія центра инерціи нѣкоторой поверхности или площади или даже нѣкоторой линіи. Напримѣръ, положимъ, что данное сплошное тѣло ограничено: цилиндрическою поверхностью, производящая которой параллельна оси Z , плоскостью XU и поверхностью:

$$z = f(x, y),$$

Такъ какъ $2R \sin \alpha$ есть длина хорды, а $2R\alpha$ — длина s выражается такъ

$$OC = \frac{(\text{радіусъ}) \cdot (\text{хорда})}{(\text{дуга})}.$$

Примѣръ 68-й. Центръ инерціи дуги однородной цѣпной

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

предполагая, что одинъ конецъ дуги совпадаетъ съ самою нисходящею кривою.

Вычисленіе положенія центра инерціи произведемъ по формуламъ:

$$sx_c = \int x ds, \quad sy_c = \int y ds.$$

Вычисленіе значительно облегчается при помощи слѣдующихъ соотношеній:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{y}{a}; \quad s = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \frac{dy}{dx}.$$

Координаты центра инерціи выразятся такъ:

$$x_c = x - \frac{a}{s} (y - a); \quad y_c = \frac{1}{2} \left(y + \frac{a}{s} x \right).$$

Опредѣленіе положенія центровъ инерціи дугъ другихъ кривыхъ можно найти въ собраніяхъ задачъ по механикѣ: J Saint-Germain **) и въ Рациональной Механикѣ Сомова.

Примѣръ 69-й. Положеніе центра инерціи дуги винтовой линии:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = b \arccos \frac{x}{a},$$

считая дугу отъ точки: $z = 0, y = 0, x = a$.

Координаты центра инерціи дуги суть:

$$x_c = b \frac{y}{s}, \quad y_c = b \frac{(a-x)}{s}, \quad z_c = \frac{z}{2}.$$

*) Jullien. Problèmes de Mécanique rationnelle 1855.

**) de Saint Germain. Recueil d'exercices sur la Mécanique rati

ныя координаты, оси которых суть: ось OX , направленная вдоль по диаметру OA , и ось OY , направленная вдоль по диаметру, сопряженному къ диаметру OA ; въ этихъ координатахъ уравненіе эллипса:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

гдѣ α и β суть длины сопряженныхъ полудіаметровъ.

Величина площади выразится такъ:

$$S = \sin \theta \int_{x_1}^{\alpha} y dx = \frac{\sin \theta}{2} \left(\alpha \beta \arccos \frac{x_1}{\alpha} - x_1 y_1 \right),$$

гдѣ x_1 есть длина OD , а y_1 — длина DE ; θ есть уголъ уголъ YOX .

Косоугольныя координаты x_c и y_c центра инерціи C опредѣляются по формуламъ:

$$Sx_c = \sin \theta \int_{x_1}^{\alpha} xy dx = \sin \theta \cdot \frac{\alpha^2 y_1^3}{3\beta^2},$$

$$Sy_c = \frac{\sin \theta}{2} \int_{x_1}^{\alpha} y^2 dx = \sin \theta \cdot \frac{\beta^2 (\alpha - x_1)^2}{2 \cdot 3\alpha^2} (2\alpha + x_1).$$

Центръ инерціи площади AOB ($x_1 = 0$, $y_1 = \beta$) находится въ точкѣ, имѣющей слѣдующія координаты:

$$\frac{4\alpha}{3\pi}, \quad \frac{4\beta}{8\pi}.$$

Примѣръ 74-й. Центръ инерціи площади, ограниченной параболою AE (черт. 52), побочною осью AD , проведенною черезъ точку A и полухордою DE , сопряженною къ этой оси.

За оси косоугольныхъ координатъ возьмемъ: побочную ось AD — за ось $X^{ос}$ и касательную къ параболѣ въ точкѣ A — за ось $Y^{ос}$; уравненіе параболы: $y^2 = 2px$. Координаты центра инерціи:

$$x_c = \frac{8}{5} x, \quad y_c = \frac{8}{8} y_1.$$

Примѣръ 75-й. Центръ инерціи площади эллиптического сегмента

находится на полу диаметръ OA_1 , сопряженномъ
оптѣ на разстояніи:

$$= \frac{2\alpha^2 y_1^3}{3\beta^2 \left(\alpha \beta \arccos \left(\frac{x_1}{\alpha} \right) - x_1 y_1 \right)}$$

y_1 есть длина половины хорды, а x_1 — разстоя-

е между положеніемъ центра инерціи площади эллипса E_1AE_2 (черт. 51-й).

Изъ площади сектора $E_1AE_2E_1$ и изъ площади сектора $E_2AE_1E_2$; величина площади послѣдняго равна $x_1 y_1 \sin \theta$ находится въ точкѣ C_2 , отстоящей отъ центра на этомъ величина площади сектора равна:

$$\alpha \beta \sin \theta \arccos \left(\frac{x_1}{\alpha} \right),$$

находится на диаметръ OA и отстоитъ отъ центра

$$OC' = \frac{2}{3} \frac{\alpha y_1}{\beta \arccos \left(\frac{x_1}{\alpha} \right)}.$$

положеніе центра инерціи трапеціи.

Центръ инерціи находится на линіи DD_1 , соединяющей центры инерціи сторонъ трапеціи ABB_1A_1 (черт. 53-й); чтобы найти эту линію, примемъ во вниманіе, что трапеція ABB_1A_1 раздѣляется на два треугольника ABA_1 и A_1BB_1 , что центръ инерціи находится въ точкѣ пересѣченія K прямой BD_1 , отстоящую отъ AA_1 на одну треть высоты трапеціи второго находится въ точкѣ пересѣченія L прямой PP_1 , отстоящую на одну треть высоты трапеціи; центръ инерціи трапеціи долженъ находиться на линіи, соединяющей точки K и L ; слѣдовательно, искомымъ центромъ инерціи будетъ точка пересѣченія C линіи DD_1 линіею

формулы, выражающей разстояніе центра инерціи C отъ центра инерціи треугольниковъ ABA_1 и BA_1B_1 , что площадь трапеціи $= \frac{1}{2} h(a+b)$, гдѣ h означа-

часть высоты треугольников и трапеций; а a и b — длины сторон AA_1 и BB_1 , и что расстояния точек K и L от AA_1 равны $\frac{1}{3}h$ и $\frac{2}{3}h$; окажется, что расстояние точки C от этой же стороны равно:

$$\frac{1}{3}h \frac{a+2b}{a+b}$$

и что отношение длин CD_1 и CD равно:

$$\frac{CD_1}{CD} = \frac{a+2b}{b+2a}.$$

Примеръ 78. Положенія центровъ инерціи частей поверхности сферы.

Положенія центровъ инерціи какихъ либо частей сферической поверхности могутъ быть опредѣлены при помощи слѣдующихъ формулъ.

Пусть S есть величина площади нѣкоторой сферической фигуры ABC (черт. 54), находящейся на сферѣ радиуса R , и S_p — величина площади ортогональной проэкціи площади S на какую либо плоскость P_1P , проходящую черезъ центръ сферы.

Расстояніе p центра инерціи площади S отъ плоскости P_1P выражается такъ:

$$p = \frac{R \int \cos(r, n) dS}{S}, \dots \dots \dots (624)$$

гдѣ n означаетъ направленіе нормали къ плоскости P_1P , а r — направленіе радиуса вектора, проведеннаго изъ центра O сферы къ элементу поверхности dS ; произведеніе $R \cos(r, n)$ выражаетъ расстояніе элемента dS отъ плоскости P_1P ; интегралъ числителя распространенъ по всей площади S .

Такъ какъ направленіе r есть направленіе наружной нормали элемента поверхности dS , то интегралъ числителя выражаетъ величину площади S_p , а потому формула (624) выражаетъ, что

$$p = \frac{RS_p}{S} \dots \dots \dots (624)$$

Если черезъ центръ сферы проведемъ какую либо другую плоскость $P_1'P'$, то пересѣченіе ея съ проецирующею цилиндрическою поверхностью сферической фигуры ABC будетъ косоугольною проеціею этой фигуры на эту новую плоскость (на чертежѣ (54) ортогональная проеція сферической фигуры ABC на плоскость P_1P есть фигура $A_1B_1C_1$,

Поэтому, изъ формулы (624) получимъ:

$$p(BC) = \frac{R(a - c \cos B - b \cos C)}{2(A + B + C - \pi)};$$

точно такъ же получимъ:

$$p(CA) = \frac{R(b - a \cos C - c \cos A)}{2(A + B + C - \pi)}, \quad p(AB) = \frac{R(c - b \cos A - a \cos B)}{2(A + B + C - \pi)}.$$

Положеніе центра инерціи C можетъ быть еще выражено разстояніями его отъ плоскостей, проходящихъ черезъ центръ сферы и перпендикулярныхъ къ радіусамъ OA , OB , OC ; эти разстоянія опредѣлимъ по формулѣ (625), рассматривая секторы OBC , OCA и OAB какъ косоугольныя проэкціи площади треугольника ABC на плоскости большихъ круговъ BC , CA и AB ; найдемъ, что эти разстоянія суть:

$$\frac{R^2 a}{2S}, \quad \frac{R^2 b}{2S}, \quad \frac{R^2 c}{2S}.$$

Переходя теперь къ примѣрамъ опредѣленія положеній центровъ инерціи сплошныхъ однородныхъ тѣлъ, мы докажемъ слѣдующую теорему, которая оказывается весьма полезною въ примѣненіи ко многимъ вопросамъ этого рода.

Теорема. Представимъ себѣ сплошное однородное тѣло, ограниченное двумя параллельными плоскостями Π_1 и Π_2 (черт. 56) и боковой поверхностью такого рода, что величина площади сѣченія тѣла какою либо плоскостью, параллельною плоскостямъ Π_1 и Π_2 , выражается такъ:

$$\Pi = a + bz + cz^2, \dots \dots \dots (626)$$

гдѣ z есть разстояніе плоскости сѣченія отъ плоскости Π_1 ; a , b , c суть постоянные коэффициенты, зависящіе отъ вида боковой поверхности. Отношеніе между разстояніями центра инерціи этого тѣла отъ плоскостей Π_1 и Π_2 выражается такъ:

$$\frac{z_c}{h - z_c} = \frac{2\Pi_0 + \Pi_2}{2\Pi_0 + \Pi_1}, \dots \dots \dots (627)$$

гдѣ Π_1 и Π_2 — величины площадей основаній нижняго и верхняго, Π_0 — площадь сѣченія, проведеннаго черезъ середину высоты h .

Легко доказать эту теорему. Разстояніе центра инерціи отъ нижняго основанія выразится формулою:

$$z_c = \frac{1}{V} \int_0^h z \Pi dz = \frac{1}{V} \left(a \frac{h^2}{2} + b \frac{h^3}{3} + c \frac{h^4}{4} \right),$$

болоида вращения. Пусть k , и k_2 суть расстояния плоскостей пояса от центра гиперболоида.

$$H_1 = \pi a^2 \left(1 + \frac{k_1^2}{b^2} \right), \quad H_2 = \pi a^2 \left(1 + \frac{k_2^2}{b^2} \right)$$

$$H_0 = \pi a^2 \left(1 + \frac{(k_1 + k_2)^2}{4b^2} \right)$$

$$\frac{\xi_c}{k - \xi_c} = \frac{6b^2 + (k_1 + k_2)^2 + 2k_2^2}{6b^2 + (k_1 + k_2)^2 + 2k_1^2}.$$

Примѣръ 82-й. Положеніе центра инерціи какой либо части трехоснаго эллипсоида, заключающейся между двумя параллельными плоскостями.

Главные діаметры діаметральной плоскости, параллельной плоскостямъ Π_1 и Π_2 , примемъ за оси X^{osz} и Y^{osz} , а направленіе полудіаметра, сопряженнаго къ этой діаметральной плоскости, за ось Z ; слѣдовательно, оси X^{osz} и Y^{osz} ортогональны между собою, а ось Z можетъ быть наклонена къ нимъ. Въ этихъ координатахъ уравненіе поверхности эллипсоида будетъ:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

гдѣ A и B суть длины главныхъ полудіаметровъ діаметрального сѣченія, а γ — длина полудіаметра, совпадающаго съ осью Z .

Пусть k_1 и k_2 суть расстоянія по оси Z^{osz} , плоскостей Π_1 и Π_2 отъ центра эллипсоида; на основаніи извѣстнаго выраженія площади эллипса найдемъ:

$$H_1 = \pi AB \left(1 - \frac{k_1^2}{\gamma^2} \right), \quad H_2 = \pi AB \left(1 - \frac{k_2^2}{\gamma^2} \right)$$

$$H_0 = \pi AB \left(1 - \frac{(k_1 + k_2)^2}{4\gamma^2} \right).$$

Однородный эллипсоидъ симметриченъ по отношенію ко всякой діаметральной плоскости, а слѣдовательно и по отношенію къ плоскостямъ XZ и YZ ; эти плоскости суть также плоскости симметріи разсматриваемаго нами эллиптическаго пояса, а потому центръ инерціи его находится на оси Z . Примѣняя формулу (627), мы замѣнимъ въ ней отношеніе кратчайшихъ разстояній центра инерціи отъ плоскостей Π_1 и Π_2 отношеніемъ разстояній, считаемихъ по оси Z ; получимъ:

$$\frac{\xi_c - k_1}{k_2 - \xi_c} = \frac{6\gamma^2 - (k_1 + k_2)^2 - 2k_2^2}{6\gamma^2 - (k_1 + k_2)^2 - 2k_1^2}.$$

считая расстояние по вертикальному направлению, и согу λ .

Тетраэдръ можно тоже причислить къ многогранваемой нами категоріи. Каждую пару противолежащихъ можно разсматривать какъ два бесконечно-узкіе прѣмосты которыхъ параллельны. Примѣняя къ тетраэдру мы должны положить: $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$; окажется, что однороднаго тетраэдра находится въ точкѣ пересѣченій, соединяющихъ середины противоположныхъ ребръ каждую изъ этихъ прямыхъ пополамъ.

§ 92. Открытіе закона движенія центра инерціи. ваетъ Ньютону; въ книгѣ: *Philosophiæ naturalis principia mathematica* въ главѣ: *Axiomata sive leges motus*, въ примѣчаніи находимъ слѣдующее выраженіе:

Commune gravitatis centrum corporum duorum vel plurium corporum inter se non mutat statum suum vel ideo propterea corporum omnium in se mutuo agentium (et impeditentis externis) commune centrum gravitationis vetur uniformiter in directam.

(Общій центръ тяжести двухъ или нѣсколькихъ въ своего состоянія движенія или покоя вслѣдствіе взаимныхъ тѣлъ; если существуютъ только взаимодѣйствія и нѣтъ ни вѣшнихъ силъ, ни препятствій, то общій центръ либо покоится, либо движется равномерно по прямой).

Это выраженіе опредѣляетъ только частный случай центра инерціи. Лагранжъ говоритъ, что общая форма закона принадлежитъ самому же Лагранжу (вѣтъique).

$$L_z = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - \right.$$

$$L_x = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i Z_i - z_i \cdot$$

$$L_y = \sum_{i=1}^{i=n} (z_i X_i - x_i$$

$$L_z = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i Y_i - y_i$$

§ 94. Главный момент си Перемѣна центра моментов. I

Въ параграфѣ 22-мъ было объ-
чающихся подъ знакомъ суммъ въ
менты вокругъ положительныхъ нап-
равнодѣйствующей F_i задаваемыхъ
и, вмѣстѣ съ тѣмъ, это суть проек-
вокругъ начала координатъ.

Обозначая, какъ условлено въ
чину и направленіе момента силы F
жомъ представить формулы (630) п

$$L_x = \sum_{i=1}^{i=n} L_0(F_i) \cos$$

$$L_y = \sum_{i=1}^{i=n} L_0(F_i) \cos$$

$$L_z = \sum_{i=1}^{i=n} L_0(F_i) \cos$$

Геометрическая сумма моментовъ силъ F_1, F_2, \dots, F_n вокругъ центра K называется главнымъ моментомъ этихъ силъ вокругъ этого центра; мы будемъ обозначать этотъ главный моментъ знакомъ L_k , а его проеція на оси координатъ — знаками $(L_k)_x, (L_k)_y, (L_k)_z$; линейное изображеніе его, т. е. длину, изображающую величину и направление этого главного момента, мы будемъ предполагать отложенною или проведенною изъ точки K .

Проеція на ось X^{oxy} главного момента L_k выразится слѣдующею суммою:

$$(L_k)_x = \sum_{i=1}^{i=n} ((y_i - y_k) Z_i - (z_i - z_k) Y_i),$$

или, что то же самое, такъ:

$$(L_k)_x = L_x + z_k B_y - y_k B_z \dots \dots \dots (633, a)$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$(L_k)_y = L_y + x_k B_z - z_k B_x \dots \dots \dots (633, b)$$

$$(L_k)_z = L_z + y_k B_x - x_k B_y \dots \dots \dots (633, c)$$

здѣсь B_x, B_y, B_z , означаютъ слѣдующія суммы:

$$B_x = \sum_{i=1}^{i=n} X_i, \quad B_y = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i, \quad B_z = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i \dots \dots \dots (634)$$

т. е., это суть проеція на оси координатъ геометрической суммы B всѣхъ силъ F_1, F_2, \dots, F_n ; если бы всѣ эти силы, сохраняя свои величины и направленія, были приложены къ одной точкѣ, то сила B была бы ихъ равнодѣйствующею. Мы условимся называть геометрическую сумму B данныхъ силъ, приложенныхъ къ различнымъ точкамъ, *главнымъ векторомъ этихъ силъ* *).

*) Многие авторы называютъ геометрическую сумму B данныхъ силъ — равнодѣйствующею и тѣмъ даютъ поводъ нѣкоторымъ читателямъ, мало зна-

Изъ формулъ (632) и (633) можно извлечь правило, опредѣляющее, какъ измѣняется величина и направленіе главнаго момента дѣйствующихъ силъ при перемѣнѣ центра моментовъ.

Предположимъ, что главный векторъ B данныхъ силъ проведенъ начала координатъ O и вообразимъ, что онъ изображаетъ нѣкую силу, приложенную къ этой точкѣ; означимъ черезъ $L_k(B_0)$ моментъ этой воображаемой силы вокругъ центра K и составимъ, по формуламъ (632), выраженія проецій этого момента на оси координатъ; для этого надо въ этихъ формулахъ подставить: B_0, B_x, B_y, B_z вместо F_i, X_i, Y_i, Z_i и нули — вместо x_i, y_i, z_i ; получимъ:

$$L_k(B_0) \cos(L_k(B_0), X) = z_k B_y - y_k B_z,$$

$$L_k(B_0) \cos(L_k(B_0), Y) = x_k B_z - z_k B_x,$$

$$L_k(B_0) \cos(L_k(B_0), Z) = y_k B_x - x_k B_y;$$

— тѣ самыя разности, которыя находятся во вторыхъ частяхъ формулы (633), слѣдовательно, эти формулы выражаютъ, что:

$$\overline{L}_k = \overline{L}_0 + \overline{L}_k(B_0), \dots \dots \dots (635)$$

., что главный моментъ данныхъ силъ вокругъ центра K можетъ быть полученъ какъ геометрическая сумма, составленная изъ главнаго момента тѣхъ же силъ вокругъ центра O и момента вокругъ центра K главнаго вектора тѣхъ же силъ, принятаго изъ точки O .

На чертежѣ 57-мъ изображено построение главнаго момента \overline{L}_k тому правилу; \overline{OL}_0 изображаетъ главный моментъ L_0 , длина $\overline{KL'}$ — моментъ воображаемой силы \overline{OB}_0 , приложенной къ точкѣ O , вокругъ

имѣть съ механикою, впадать въ заблужденія относительно значенія этой ражаемой силы B .
[мы назвали силу B «главнымъ векторомъ» слѣдуя примѣру О. И. Сомова Рациональную Механику, часть 2-ю, стр. 276].

центра K ; длина \overline{KL}_k , изображающая главный момент L_k , есть диагональ параллелограмма, построенного на сторонах $\overline{KL'}$ и $\overline{KL'_0}$; последняя равна и параллельна длине $\overline{OL_0}$.

Приведенное здѣсь правило измѣненія главнаго момента при перемѣнѣ центра моментовъ тождественно съ правиломъ, опредѣляющимъ измѣненіе скорости поступательной части движенія твердаго тѣла при перемѣнѣ полюса вращенія (см. стр. 127 кинематической части); формулы (633) имѣютъ тотъ же составъ, что и формулы (144) страницы 127-й кинематической части, такъ что изъ послѣднихъ получимъ первыя, если замѣнимъ:

полюсъ $Ю(x_{ю}, y_{ю}, z_{ю})$	— —	центромъ O ,
полюсъ $Я(x_{я}, y_{я}, z_{я})$	— —	центромъ $K(x_k, y_k, z_k)$,
угловую скорость: $\Omega(P, Q, R),$	$\left. \begin{array}{c} \} \\ \end{array} \right\}$ — —	$\left\{ \begin{array}{l} \text{главнымъ векторомъ:} \\ B(B_x, B_y, B_z), \end{array} \right.$
скорость полюса $Ю$: $w_{ю}(x'_{ю}, y'_{ю}, z'_{ю}),$	$\left. \begin{array}{c} \} \\ \end{array} \right\}$ — —	$\left\{ \begin{array}{l} \text{главнымъ моментомъ:} \\ L_0(L_x, L_y, L_z), \end{array} \right.$
скорость полюса $Я$: $w_{я}(x'_{я}, y'_{я}, z'_{я})$	$\left. \begin{array}{c} \} \\ \end{array} \right\}$ — —	$\left\{ \begin{array}{l} \text{главнымъ моментомъ:} \\ L_k((L_k)_x, (L_k)_y, (L_k)_z). \end{array} \right.$

Подмѣтивъ такую взаимность между теоріею скоростей точекъ неизмѣняемой среды и теоріею главныхъ моментовъ данныхъ силъ вокругъ различныхъ центровъ, мы можемъ, на основаніи этой взаимности, заключить о существованіи слѣдующей зависимости между величинами и направленіями главныхъ моментовъ вокругъ различныхъ центровъ.

Главные моменты данныхъ силъ вокругъ различныхъ центровъ, находящихся на какой либо, параллельной главному вектору этихъ силъ, прямой, равны и параллельны между собою.

Всѣ главные моменты данныхъ силъ вокругъ всевозможныхъ

Относительно главных моментов количества точек вокруг других центров можно сказать сказано относительно главных моментов силъ.

Главный векторъ количества движенія системы быть названъ количествомъ движенія центра ине если предположить, что въ послѣднемъ сосредоточены; въ самомъ дѣлѣ, на основаніи равенствъ получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i x'_i = Mx'_c, \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i y'_i = My'_c, \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i z'_i = Mz'_c$$

Проекціи на оси координатъ главнаго момента движенія системы вокругъ центра K выразятся слѣд.

$$\begin{aligned} (A_k)_x &= A_k \cos(A_k, X) = \sum_{i=1}^{i=n} m_i ((y_i - y_k)z'_i - \\ &= A_x + My'_c z_k - Mz'_c y_k \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A_k)_y &= A_k \cos(A_k, Y) = \sum_{i=1}^{i=n} m_i ((z_i - z_k)x'_i - \\ &= A_y + Mz'_c x_k - Mx'_c z_k \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A_k)_z &= A_k \cos(A_k, Z) = \sum_{i=1}^{i=n} m_i ((x_i - x_k)y'_i - \\ &= A_z + Mx'_c y_k - My'_c x_k \dots \end{aligned}$$

Проекціи на оси координатъ главнаго момента движенія системы точекъ могутъ быть еще выражены

Главный моментъ всѣхъ реакцій связей равенъ нулю, между прочимъ, въ слѣдующихъ случаяхъ:

Когда всѣ точки системы свободны.

Когда точки системы связаны только между собою идеальными стержнями, или гибкими нерастяжимыми нитями, или связями примѣра 55-го, §§ 59 и 68, стр. 306 и 345 — 346, потому что тогда моменты обѣихъ реакцій каждой такой связи равны и прямопротивоположны; но ни одна изъ точекъ системы не должна быть связана никакою связью съ какими либо неподвижными точками или съ точками, посторонними системѣ.

Въ этихъ случаяхъ равенъ нулю главный моментъ всѣхъ реакцій не только вокругъ начала координатъ, но также и вокругъ любого центра.

Въ слѣдующихъ параграфахъ настоящей главы мы будемъ предполагать, что связи, которымъ подчинены точки системы, принадлежатъ къ числу тѣхъ, для которыхъ главный моментъ реакцій есть нуль.

§ 98. Интегралы, выражающіе законъ площадей. Неизмѣняемая плоскость.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда задаваемые силы при всѣхъ положеніяхъ системы удовлетворяютъ условію:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0,$$

тогда первое изъ дифференціальныхъ уравненій (641) получаетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{dA_x}{dt} = 0,$$

а такъ какъ дифференціальныя уравненія (628) или (641) получены изъ дифференціальныхъ уравненій (517) движенія системы точекъ, то интегралъ

$$A_x = C_1 \dots \dots \dots (642, a)$$

Эти три интеграла выражаютъ, что *главный моментъ (вокругъ O) количества движенія системы точекъ сохраняетъ постоянную величину и постоянное направлѣнiе.*

Въ этихъ случаяхъ, въ которыхъ законъ площадей имѣетъ мѣсто во всѣхъ трехъ плоскостяхъ координатъ, онъ имѣетъ мѣсто также и во всякой плоскости, проходящей черезъ начало координатъ. Пусть \mathfrak{F} есть одна изъ такихъ плоскостей и OP — направлѣнiе, перпендикулярное къ ней; по формулѣ (142), стр. 105, § 24-го, секторьяльная скорость проекии точки m на плоскость \mathfrak{F} выражается такъ:

$$\sigma(\mathfrak{F}) = \frac{l_0 \cos(l_0, P)}{2m}, \dots\dots\dots (142)$$

поэтому секторьяльная скорость проекии точки m_i на плоскость \mathfrak{F} выразится такъ:

$$\sigma_i(\mathfrak{F}) = \frac{l_0(m_i v_i) \cos(l_0(m_i v_i), P)}{2m_i}, \dots\dots\dots (643)$$

гдѣ $l_0(m_i v_i)$ означаетъ величину и направлѣнiе момента вокругъ начала координатъ количества движенія точки m_i .

Изъ формулы (643) слѣдуетъ:

$$2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i \sigma_i(\mathfrak{F}) = \sum_{i=1}^{i=n} l_0(m_i v_i) \cos(l_0(m_i v_i), P),$$

но такъ какъ главный моментъ количества движенія есть геометрическая сумма моментовъ количества движенія всѣхъ точекъ, то вторая часть послѣдняго равенства равна проекии l_0 на направлѣнiе P :

$$2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i \sigma_i(\mathfrak{F}) = l_0 \cos(l_0, P), \dots\dots\dots (644)$$

а это равенство выражаетъ законъ площадей въ плоскости \mathfrak{F} , потому что $l_0 \cos(l_0, P)$ есть величина постоянная, такъ какъ OP есть направлѣнiе постоянное и l_0 сохраняетъ неизмѣнное направлѣнiе и постоянную величину.

Если означимъ черезъ r_i проекию радиуса вектора точки m_i на

жкость \mathcal{F} , а через f_i — угол, составляемый направлением r_i съ которою неподвижною осью, проведенною въ плоскости \mathcal{F} , то, съ помощью известныхъ намъ выраженій (§ 23) секторьальной скорости, можно представить равенство (644) подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2 \frac{df_i}{dt} = A_0 \cos(A_0, P) \dots \dots \dots (644, \text{bis})$$

И такъ, если главный моментъ задаваемыхъ силъ вокругъ начала координатъ равенъ нулю, то законъ площадей имѣетъ место во всякой плоскости, проходящей черезъ начало координатъ, и притомъ удвоенная сумма произведений, составленныхъ изъ массъ точекъ и изъ ихъ секторьальныхъ скоростей въ этой плоскости, равна проекціи главнаго момента количества движенія на нормаль къ плоскости.

Одна изъ этихъ плоскостей отличается отъ всѣхъ прочихъ тѣмъ, что для нея вышесказанная сумма имѣетъ величину большую, чѣмъ въ всякой другой плоскости; эта плоскость, перпендикулярная къ направлению A_0 , названа Лапласомъ неизмѣняемою плоскостью; законъ площадей въ этой плоскости выражается такъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \rho_i^2 \frac{d\theta_i}{dt} = A_0 \dots \dots \dots (645)$$

з ρ_i означаетъ проекцію радіуса вектора точки m_i на неизмѣняемую плоскость, а θ_i — уголъ, составляемый направлениемъ ρ_i съ нѣскою неподвижною осью, проведенною въ этой плоскости.

Для всякой плоскости, проходящей черезъ направление A_0 , постоянная, входящая въ вторую часть равенства (644, bis), равна нулю.

Если задаваемыя силы, приложенныя къ точкамъ системы, таковы, что при всякомъ положеніи системы главный моментъ ихъ вокругъ центра K равенъ нулю, то дифференціальныя уравненія движенія системъ точекъ имѣютъ три интеграла:

$$(A_k)_x = C_1, (A_k)_y = C_2, (A_k)_z = C_3,$$

(гдѣ $(A_K)_x$, $(A_K)_y$, $(A_K)_z$ суть выраженія (639, а, b, с) § 95) и законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой плоскости, проходящей черезъ точку K ; неизмѣняемая плоскость, конечно, перпендикулярна къ направлению главнаго момента A_K количества движенія вокругъ центра K .

§ 99. Законъ площадей въ относительномъ движеніи системы материальныхъ точекъ по отношенію къ неизмѣняемой средѣ, имѣющей поступательное движеніе вмѣстѣ съ центромъ инерціи системы.

Представимъ себѣ неизмѣняемую среду, совершающую поступательное движеніе вмѣстѣ съ центромъ инерціи системы материальныхъ точекъ; центръ инерціи C возьмемъ за начало подвижныхъ координатныхъ осей OX , OY , OZ , параллельныхъ неподвижнымъ осямъ координатъ; относительныя координаты точки m_i по отношенію къ этимъ осямъ будутъ:

$$\xi_i = x_i - x_c, \quad \eta_i = y_i - y_c, \quad \zeta_i = z_i - z_c.$$

Въ дифференціальныя уравненія движенія (517) системы точекъ можно замѣнить абсолютныя координаты $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$ суммами: $(\xi_1 + x_c)$, $(\eta_1 + y_c)$, $(\zeta_1 + z_c)$, $(\xi_2 + x_c)$, $(\eta_2 + y_c)$, $(\zeta_2 + z_c), \dots$; это въ особенности уместно въ тѣхъ случаяхъ, когда функціи $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ и выраженія задаваемыхъ силъ заключаютъ только разности соответственныхъ координатъ различныхъ паръ точекъ, а не самыя координаты въ отдѣльности; въ этихъ случаяхъ дифференціальныя уравненія (517) легко преобразовать въ дифференціальныя уравненія, заключающія только относительныя координаты и ихъ производныя по времени.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ уравненіяхъ связей заключаются только разности координатъ: $(x_i - x_j)$, $(y_i - y_j)$, $(z_i - z_j)$ и др., а не отдѣльныя координаты, то тогда въ уравненіяхъ (616) § 85-го члены, заключающіе множителей $\lambda(\varphi_1), \lambda(\varphi_2), \dots, \lambda(\varphi_p)$, взаимно сокращаются; наприимѣръ, если φ_1 заключаетъ x_i только въ разностяхъ: $(x_i - x_1)$,

ниѣющія мѣсто потому, что начало относительныхъ координатъ есть центръ инерціи системы.

Напримѣръ, въ примѣрѣ 61 (стр. 326—327), гдѣ $B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = 0$, и всѣ точки свободны, дифференціальныя уравненія (646) будутъ слѣдующаго вида:

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= -\mu m_i M \ddot{x}_i \\ m_i \ddot{y}_i &= -\mu m_i M \ddot{y}_i \\ m_i \ddot{z}_i &= -\mu m_i M \ddot{z}_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (648, 1)$$

Эти дифференціальныя уравненія суть тѣ же самыя, съ которыми мы ознакомились на стр. 82; отсюда слѣдуетъ, что каждая изъ материальныхъ точекъ въ относительномъ движеніи по отношенію къ воображаемой неизмѣняемой средѣ описываетъ эллипсъ, центръ котораго совпадаетъ съ центромъ инерціи системы.

Предположимъ, что связи, которыми связаны точки системы, таковы, что главный моментъ реакцій вокругъ центра инерціи системы равенъ нулю при всякомъ положеніи системы.

Какъ изъ дифференціальныхъ уравненій (517) составлены три дифференціальныя уравненія (628) параграфа 93-го, такимъ же образомъ изъ дифференціальныхъ уравненій (646) можно составить три слѣдующія дифференціальныя уравненія:

Первое:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} m_i (\eta_i \ddot{x}_i - \zeta_i \ddot{y}_i) &= \sum_{i=1}^{i=n} (\eta_i Z_i - \zeta_i Y_i) - \\ &- \frac{B_x}{M} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \eta_i + \frac{B_y}{M} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \zeta_i, \dots \dots \dots (649, a) \end{aligned}$$

въ силу же равенствъ (647) двѣ послѣднія суммы второй части этого уравненія равны нулю, поэтому получится:

$$\frac{d(L_x)_g}{dt} = (L_x)_g, \dots \dots \dots (649, a)$$

гдѣ $(L_x)_g$ и $(L_y)_g$ суть проекціи на ось X^{ext} главныхъ моментовъ во-

кругъ центра инерціи количествъ движенія системы и задаваемыхъ силъ (см. формулы (650) и (651)).

Подобнымъ же образомъ получимъ еще два слѣдующія дифференціальныя уравненія:

$$\frac{d(L_c)_y}{dt} = (L_c)_y \dots \dots \dots (649, b)$$

$$\frac{d(L_c)_z}{dt} = (L_c)_z; \dots \dots \dots (649, c)$$

гдѣ:

$$(L_c)_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (\eta_i \zeta'_i - \zeta_i \eta'_i), \dots \dots \dots (650, a)$$

$$(L_c)_x = \sum_{i=1}^{i=n} (\eta_i Z_i - \zeta_i Y_i); \dots \dots \dots (651, a)$$

(легко догадаться, какой видъ имѣютъ выраженія величинъ $(L_c)_y$, $(L_c)_z$, $(L_c)_y$, $(L_c)_z$).

Надо замѣтить, что величины $(L_c)_x$, $(L_c)_y$, $(L_c)_z$ могутъ быть выражены еще иначе; такъ такъ:

$$\xi'_i = x'_i - x'_c, \eta'_i = y'_i - y'_c, \zeta'_i = z'_i - z'_c,$$

то $(L_c)_x$ можно представить такъ:

$$(L_c)_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (\eta_i \zeta'_i - \zeta_i \eta'_i) - z'_c \sum_{i=1}^{i=n} m_i \eta_i + y'_c \sum_{i=1}^{i=n} m_i \zeta_i,$$

на основаніи же формулъ (647), двѣ послѣднія суммы равны нулю, а потому:

$$(L_c)_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\eta_i \frac{ds_i}{dt} - \zeta_i \frac{dy_i}{dt} \right) \dots (650, a, bis)$$

и проч.; т. е. по формуламъ (650), величины $(L_c)_x$, $(L_c)_y$, $(L_c)_z$ суть проекціи главнаго момента вокругъ центра инерціи количествъ относительнаго движенія матерьяльныхъ точекъ по отношенію къ вообра-

жаемой неизмѣняемой средѣ, по формуламъ суть проекціи главнаго момента вокругъ ц абсолютнаго движенія тѣхъ же точекъ.

Если задаваемые силы при всякомъ по воряють условіяжъ:

$$(M_c)_x = 0, \quad (M_c)_y = 0,$$

то дифференціальныя уравненія движенія граы:

$$(A_c)_x = C_1, \quad (A_c)_y = C_2, \quad (A$$

Слѣдовательно, если главный моментъ кругъ центра инерціи равенъ нулю при стемы, то законъ площадей импѣтъ мѣ $Z\Xi$, ΞZ , движущихся вмѣстѣ съ центръ торый они проходятъ. Главный моментъ количествъ движенія точекъ системы сохр величину и неизмѣнное направленіе; перпен еость, заключающая въ себѣ центръ инері параллельною самой себѣ, переносясь вмѣстѣ въ пространствѣ; эта плоскость есть неизм сительнаго движенія системы точекъ по от средѣ, движущейся вмѣстѣ съ центромъ ине

Называя эту плоскость неизмѣняемою, мѣваемъ нижеслѣдующее.

Представимъ себѣ, что проведена кака центръ инерціи C системы и что эта плоско воображаемою неизмѣняемою средою; состав рости вокругъ C относительнаго движе стемы на эту плоскость; секторьяльную сѣс множимъ на массу ея и возьмемъ сумму всѣ эта сумма сохраняетъ постоянную величину движенія (гдѣ P — направленіе нормали к мая плоскость, объ которой мы говоримъ,

могутъ быть преобразованы въ слѣдующія равенства:

$$m_1(\eta_1 \zeta_1' - \zeta_1 \eta_1') = C_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

$$m_1(\zeta_1 \xi_1' - \xi_1 \zeta_1') = C_2 \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

$$m_1(\xi_1 \eta_1' - \eta_1 \xi_1') = C_3 \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

изъ которыхъ видно, что точка m_1 совершаетъ свое
женіе въ плоскости:

$$C_1 \xi_1 + C_2 \eta_1 + C_3 \zeta_1 = 0 \dots$$

Въ той же самой плоскости совершаетъ свое отно-
и точка m_2 ; эта плоскость есть неизмѣняемая плоско-
движенія системы по отношенію къ воображаемой и
движущейся поступательно вмѣстѣ съ центромъ инер-

Изъ того, что было упомянуто относительно част-
§ 87 (стр. 429), и изъ только что приведенныхъ ри-
составить себѣ нѣкоторое, хотя еще и неполное, пр-
женіи точекъ.

Центръ инерціи C обѣихъ точекъ движется равно-
вѣрно; представимъ себѣ неизмѣняемую среду, дви-
тельно вмѣстѣ съ центромъ инерціи; движеніе кажд-
ыхъ точекъ можно разсматривать какъ составное изъ
женія вмѣстѣ съ этою воображаемою средою и изъ с-
женія по отношенію къ этой средѣ; относительныя д-
чекъ совершаются въ нѣкоторой плоскости, проходящ-
инерціи, и притомъ траекторіи обѣихъ точекъ подоб-
подобно расположены, нѣтъ центромъ подобія точку
до вида траекторій, то онъ зависитъ отъ вида функц-

Въ примѣрѣ 62-мъ центръ инерціи системы также
линейно и равномерно и притомъ, какъ замѣчено в
графахъ, каждая изъ материальныхъ точекъ описываетъ
относительномъ движеніи по отношенію къ воображае-
средѣ, движущейся поступательно вмѣстѣ съ центро-
всѣхъ эллипсовъ совпадаютъ съ центромъ инерціи
случаѣ относительное движеніе каждой материальной
рлетъ закону площадей, а потому этотъ законъ имѣт-

Если точки системы не свободны, но связи не лежатъ къ числу тѣхъ, которыя указаны въ примѣрѣ 55-мъ, (стр. 305 — 306), 56-мъ, 60-мъ, (стр. 3 томъ, если ни одна изъ такихъ связей не связываетъ материальныхъ точекъ системы ни съ какою либо нею ни съ какою либо точкою постороннею системѣ; если, приложенныя къ материальнымъ точкамъ с взаимодѣйствія между парами точекъ, попарно равноразположены и направлены вдоль по линіямъ, соединяющимъ материальныя точки, то законъ имѣетъ во всякой неподвижной плоскости, даже и разрезъ начало координатъ, а также и во всякой поперечной плоскости, проходящей черезъ центр инерціи.

Такъ, напримѣръ, при движеніи неизмѣняемой (т. е., такой системы, точки которой связаны между ними связями), если эта система свободна и не подложена силамъ, законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой плоскости и во всякой поступательно-движущейся плоскости черезъ центр инерціи системы.

Если точки системы связаны между собою только связями и къ нимъ, кромѣ вышеозначенныхъ приложены силы, направленные къ какому-либо центру, законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой плоскости, проходящей черезъ эту точку.

Примѣръ 66-й, (стр. 371). Въ этомъ примѣрѣ четыре неизмѣняемыя связи и притягиваются къ центру; поэтому законъ площадей имѣетъ мѣсто для ихъ радиусами векторами точекъ, проведенными изъ центра. Кромѣ того, въ этомъ случаѣ законъ площадей имѣетъ мѣсто относительно движенія системы по отношенію къ неподвижной поступательно движущейся плоскости съ центромъ инерціи. Главный моментъ задаваемыхъ силъ вокругъ центра равенъ нулю, какъ въ этомъ не трудно убѣдиться; следовательно, движеніе этой системы вокругъ центра происходитъ такъ:

$$(m_1 \xi^2 + m_2 (l^2 - \xi^2)) \ddot{\varphi},$$

Положимъ, что неизмѣняемая система состоитъ изъ n изъ нихъ точекъ. Представимъ себѣ неизмѣняемую среду, съ точки системы неизмѣняемо связаны. Одну изъ точекъ эту обозначимъ буквою $Ю$.

Составимъ выраженіе проекцій на оси X^{002} , Y^{002} и Z^{002} наго момента вѣрху точки $Ю$ количества движенія неизмѣняемой системы материальныхъ точекъ. Возьмемъ выраженіе:

$$(A_n)_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i [(y_i - y_n)z'_i - (z_i - z_n)y'_i] \dots (63)$$

и подобныя же выраженія для $(A_n)_y$ и $(A_n)_z$, выразимъ заключеніе въ нихъ скорости x'_i , y'_i , z'_i по формуламъ (142) страницъ кинематической части, тогда получимъ слѣдующія выраженія

$$(A_n)_x = M((y_c - y_n)z'_{cn} - (z_c - z_n)y'_{cn}) + \\ + (I_x)_n P - S_{xy} Q - S_{xz} R \dots \dots \dots$$

$$(A_n)_y = M((z_c - z_n)x'_{cn} - (x_c - x_n)z'_{cn}) + \\ + (I_y)_n Q - S_{yz} R - S_{xy} P \dots \dots \dots$$

$$(A_n)_z = M((x_c - x_n)y'_{cn} - (y_c - y_n)x'_{cn}) + \\ + (I_z)_n R - S_{zx} P - S_{yz} Q, \dots \dots \dots$$

гдѣ:

$$(I_x)_n = \sum_{i=1}^{i=n} m_i ((y_i - y_n)^2 + (z_i - z_n)^2),$$

$$S_{yz} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (y_i - y_n) (z_i - z_n),$$

$$(I_y)_n = \sum_{i=1}^{i=n} m_i ((z_i - z_n)^2 + (x_i - x_n)^2),$$

$$S_{zx} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (z_i - z_n) (x_i - x_n),$$

$$w_{\eta} = Mw_{\eta}(\zeta_c \cos(w_{\eta}, \Xi) - \xi_c \cos(w_{\eta}, Z)) + \\ + B_{\eta}q - D_{\eta}r - F_{\eta}p, \dots \dots \dots (661, b)$$

$$w_{\zeta} = Mw_{\zeta}(\xi_c \cos(w_{\zeta}, Y) - \eta_c \cos(w_{\zeta}, \Xi)) + \\ + C_{\zeta}r - E_{\zeta}p - D_{\zeta}q, \dots \dots \dots (661, c)$$

, суть относительныя координаты центра инерціи неизмѣны, а A_{η} , B_{η} , C_{ζ} , D_{η} , E_{ζ} , F_{η} — постоянныя величины слѣдующими суммами:

$$\eta_i^2 + \zeta_i^2, \dots (662, a), \quad D_{\eta} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \eta_i \zeta_i, \dots (662, d)$$

$$\zeta_i^2 + \xi_i^2, \dots (662, b), \quad E_{\zeta} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \zeta_i \xi_i, \dots (662, e)$$

$$\xi_i^2 + \eta_i^2, \dots (662, c), \quad F_{\eta} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \xi_i \eta_i, \dots (662, f)$$

Моменты инерціи.

A_{η} , B_{η} , C_{ζ} (662, a, b, c) называются моментами инерціи системы точекъ вокругъ осей $Ю\Xi$, $ЮY$, $ЮZ$ *). *момъ инерціи какой либо системы точекъ вокругъ какой KU (K есть одна изъ тѣхъ точекъ, черезъ которыя) называется слѣдующая сумма:*

$$m_1 \rho_1^2 + m_2 \rho_2^2 + \dots + m_i \rho_i^2 + \dots + m_n \rho_n^2,$$

... ρ_n суть разстоянія точекъ системы отъ оси KU .

Значитъ мы будемъ обозначать знакомъ $(I_v)_k$, гдѣ значебъ, v внутри скобокъ, служитъ для обозначенія направленія

D_{η} , E_{ζ} , F_{η} извѣстны у англійскихъ авторовъ подъ именемъ *момъ инерціи* (product of inertia).

оси, а значокъ, поставленный въ скобокъ, изъ тѣхъ точекъ, черезъ которыя ось моменты инерціи вокругъ осей, проходящихъ главныхъ осей $X^{оси}$, $Y^{оси}$ и $Z^{оси}$ мы обо $(I_y)_{оси}$, $(I_x)_{оси}$, что уже и сдѣлано въ концѣ §

Моментъ инерціи какого либо сплошна выразится интеграломъ:

$$(I_v)_k = \iiint \sigma \varrho^2 d$$

распространеннымъ по всему объему тѣла; ϱ — нѣ элемента dO отъ оси KU .

Моментъ инерціи есть произведение изъ нн; единица моментовъ инерціи:

$$(\text{единица моментовъ инерціи}) =$$

можетъ быть разсматриваема, какъ моменты точки, масса которой равна единицѣ и котораго которой составляютъ моментъ инерціи единицы длины.

При одномъ и томъ же относительномъ системъ между собою, моменты инерціи системъ имѣютъ весьма различныя величины; одна зависимость между величинами моментовъ ннхъ осей, проходящихъ черезъ одну и ту висимость между величинами моментовъ нн параллельныхъ между собою осей. .

§ 105. Зависимость между моментами осей, проходящихъ черезъ одну и ту инерціи. Главныя оси инерціи.

Для ориентированія данной системы то представимъ себѣ неизмѣняемую среду, въ тѣло расположены и проведемъ черезъ точи

играть существенную роль въ теоріи вращенія тѣлъ; считаемъ нужнымъ теперь же дать нѣкоторыя этого предмета.

Представимъ себѣ, что данная система материальной системы неизмѣняемая (или данное сплошное тѣло), что она можетъ свободно вращаться только воокрѣ $ЮУ$; такъ какъ тогда угловая скорость Ω неизмѣняется быть направлена только вдоль по оси $ЮУ$ пому ея продолженію, то величина главнаго момента неизмѣняемой системы будетъ равна:

$$\Omega \sum_{i=1}^{i=n} m_i \rho_i^2 = (I_U)_0 \Omega,$$

а если угловая скорость будетъ равна единицѣ, то количество движенія неизмѣняемой системы будетъ

$$\frac{1}{\sigma} (I_U)_0 \dots \dots \dots$$

Извѣстно, что твердое тѣло, неподверженное могущее свободно вращаться воокрѣ неподвижной точки по инерціи съ постоянною скоростью, которая была сообщена ему ударомъ или какою-либо стеновавшими на него, но прекратившими свое дѣйствіе.

Поэтому можно дать слѣдующее опредѣленіе *момента инерціи* (669) *выражаетъ величину главнаго момента инерціи неизмѣняемой системы, вращающейся по ЮУ съ угловою скоростью, равною единицѣ; терминъ неизмѣняемой системы точекъ воокрѣ оси ЮУ» выраженіе этого опредѣленія.*

«Эллипсоидъ инерціи», который слѣдовало бы назвать *моментомъ инерціи*, имѣетъ существенное значеніе твердаго тѣла воокрѣ неподвижной точки по инерціи твердаго тѣла будетъ показываю, что при эллипсоидъ инерціи имѣетъ неподвижный центръ, касателю нѣкоторой неподвижной плоскости.

При такомъ движеніи угловая скорость твердаго тѣла, не сохраняетъ неизмѣннаго положенія, ни пространства, за исключеніемъ тѣхъ случаевъ, к

влена по одной изъ трехъ главныхъ осей
рашеніе тѣла по инерціи будетъ продол-
постоянною угловою скоростью и эта ось
направленіе въ пространствѣ; вотъ почему
рціи называются *главными осями инерціи*.
и будетъ рассмотрѣно въ главѣ о движеніи

и центра инерціи (данной системы точекъ)
эллипсоидомъ инерціи, главныя оси его —
осями инерціи данной системы, а мо-
вокругъ этихъ осей CE_0 , CU_0 , CZ_0 —
моментами инерціи данной системы.

ціи данной системы точекъ вокругъ оси
центр инерціи этой системы, выразится

$$A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2, \dots\dots\dots (670)$$

ны главныя центральныя оси инерціи CE_0 ,

между моментами инерціи вокругъ

Ю проведена какая либо ось, а черезъ
1, ей параллельная; возьмемъ C за начало
— за координатную ось CZ , плоскость,
и, — за координатную плоскость ZCE
ь $(I_z)_c$ моментъ инерціи данной системы
) $_{\text{ю}}$ моментъ инерціи ея вокругъ оси $ЮZ_1$,
' K между осями.

ны вокругъ осей CZ и $ЮZ_1$ выразятся

$$(I_z)_c = \sum_{i=1}^{i=n} m_i ((\xi_i - \Delta)^2 + \eta_i^2),$$

последнюю же сумму можно предста

$$(I_C)_\infty = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2).$$

но такъ какъ точка C есть центръ
во второмъ членѣ второй части, ра

$$(I_C)_\infty = (I_C)$$

и вообще:

$$(I_U)_k = (I_U)$$

Если бы всѣ точки данной си
центрѣ инерціи, то моментъ инерціи
былъ произведенію $M\Delta^2$. Выведе
жать, что моментъ инерціи дан
оси, непроходящей черезъ центр
ставленной изъ момента инерціи
параллельной оси, проведенной чере
момента инерціи, который сис
ся сосредоточена въ своемъ цент

Между величинами моментовъ
двухъ параллельныхъ осей KU и
инерціи C на разстояніяхъ Δ и Δ_1
мость:

$$(\text{Мом. инерц. вокруг } K)$$

$$= (\text{Мом. инерц. вокруг } C) + M\Delta^2$$

Между моментами инерціи вокр
осей, моментъ инерціи вокругъ той
инерціи, имѣетъ величину наименьш

§ 107. По центральнымъ г
инерціи могутъ быть опредѣл
всѣхъ прочихъ точкахъ простѣ

Зная направленія главныхъ п

Если однородное сплошное тѣло имѣетъ три взаимно-перпендикулярныя плоскости симметріи (которыя проходятъ черезъ центр O), то пересѣченія этихъ осей суть главныя центральныя оси тѣла.

Если всѣ точки системы находятся въ одной плоскости или же тѣло имѣетъ видъ безконечно-тонкой плоской пластинки, всякой точки этой плоскости или пластинки одна изъ главнейшихъ инерціи перпендикулярна къ плоскости. Если эту плоскость взять за плоскость XU , то для всѣхъ точекъ системы или элементовъ пластинки координата $z = 0$, а потому:

$$A_k = B'_k = \sum my^2, \quad B_k = A'_k = \sum mx^2, \dots\dots (700)$$

$$G_k^*) = \sum m(x^2 + y^2) = A'_k + B'_k, \dots\dots (701)$$

$$D_k = 0, \quad E_k = 0, \quad F_k = \sum mxy.$$

Если система материальныхъ точекъ имѣетъ ось симметріи или же однородное тѣло есть тѣло вращенія, то во всякой точкѣ симметріи эллипсоидъ инерціи есть эллипсоидъ вращенія. Мы будемъ къ примѣрамъ. Прежде всего приведемъ нѣсколько общихъ вычисленій главныхъ центральныхъ моментовъ инерціи однородныхъ тѣлъ, имѣющихъ три взаимно-перпендикулярныя плоскости симметріи. Въ этихъ случаяхъ удобнѣе всего вычислять слѣдующія величины по слѣдующимъ формуламъ:

$$A'_0 = \sigma \iiint \xi^2 d\xi d\eta d\zeta = 2\sigma \int_0^{\xi_1} \xi^3 Q_\xi d\xi, \dots\dots (702, 1)$$

$$B'_0 = \sigma \iiint \eta^2 d\xi d\eta d\zeta = 2\sigma \int_0^{\eta_1} \eta^3 Q_\eta d\eta, \dots\dots (702, 2)$$

$\xi = G_k.$

Вслѣдствіе симметріи тѣла вокругъ оси вращенія, нижеслѣдующія величины равны между собою и потому равны половинѣ \mathfrak{G}_c .

$$\mathfrak{A}'_c = \mathfrak{B}'_c = \frac{1}{2} \mathfrak{G}_c; \dots\dots\dots (709)$$

наконецъ моментъ инерціи тѣла вокругъ всякой центральной экваториальной оси равенъ:

$$\mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c = \sigma \int \zeta^2 Q_c d\zeta + \frac{1}{2} \mathfrak{G}_c \dots\dots\dots (710)$$

Примѣръ 89-й. Главные центральные моменты инерціи цилиндрической круговой трубки; длина трубки $2h$, радіусъ внутренней поверхности R , толщина стѣнки k .

Въ выраженіи (708) надо интегрировать по φ въ предѣлахъ отъ R до $(R+k)$ и по ζ въ предѣлахъ отъ $(-h)$ до $(+h)$.

$$\mathfrak{G}_c = \frac{M}{2} (2R^2 + 2Rk + k^2); \quad \mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c = M \frac{h^2}{3} + \frac{1}{2} \mathfrak{G}_c \dots\dots (711)$$

Примѣръ 90. Главные центральные моменты инерціи кольца съ круговымъ меридіональнымъ сѣченіемъ; радіусъ сѣченія кольца $= r$, расстояние центра сѣченія до оси вращенія $= R$.

$$\mathfrak{G}_c = M \left(R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right); \quad \mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c = \frac{M}{4} r^2 + \frac{1}{2} \mathfrak{G}_c \dots\dots (712)$$

Главныя центральныя моменты инерціи однородныхъ площадей (поверхностная плотность κ).

Примѣръ 91-й. Площадь эллипса:

$$\begin{aligned} \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} &= 1 \\ \mathfrak{A}_c &= 4\kappa \int_0^b a\eta^2 \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{b^2}} d\eta = \pi ab\kappa \frac{b^2}{4} = M \frac{b^2}{4} \\ \mathfrak{B}_c &= M \frac{a^2}{4}; \quad \mathfrak{G}_c = M \frac{a^2 + b^2}{4} \dots\dots\dots (713) \end{aligned}$$

Примѣръ 92-й. Площадь прямоугольника; длины сторонъ: $2a$ и $2b$.

$$\mathfrak{A}_c = M \frac{b^2}{3}, \quad \mathfrak{B}_c = M \frac{a^2}{3}, \quad \mathfrak{G}_c = M \frac{a^2 + b^2}{3} \dots\dots\dots (714)$$

A_1, A_2, K , а выражения этихъ моме-
нта примѣра; такъ что:

$$I_x = \frac{x}{12} ly^3 - \frac{x}{12} ly^3 = 0$$

гдѣ l есть длина $A_1 K$; но такъ вы-
ражается половиною произведенія
этихъ выразится такъ:

$$I_x = \frac{M}{6} ($$

Это выраженіе можетъ быть по-
дано:

$$I_x = \frac{M}{8} \left[\left(\frac{y_3 + y_1}{2} \right)^2 + \frac{y_3^2 + y_1^2}{4} \right]$$

а это выражаетъ, что моментъ инер-
ціи системы, состоя-
щей изъ массъ равныхъ $\frac{M}{8}$ и кото-
рыя находятся на расстояніи $\frac{y_3 + y_1}{2}$ отъ центра инерціи.

Центръ инерціи этихъ трехъ
массъ площади однороднаго тре-
угольника вокругъ ка-
кой бы то ни было направленіи и про-
ходящаго черезъ точку, равняется моменту инерціи
этихъ точекъ.

Примѣръ 95-й. Квадратичный
центр инерціи.

Изъ формулъ (692) слѣдуетъ,
равенъ суммѣ моментовъ инерціи
этихъ взаимно-перпендикулярныхъ

*) Если $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ суть коор-
динаты центра инерціи его площади

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{2}{3} + x_3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3)$$

такъ же выражаются и координаты
этихъ точекъ.

ГЛАВА IX.

Законъ живой силы.

§ 112. Составленіе дифференціального уравненія.

Съ тремя дифференціальными уравненіями движенія (517) § 70 каждой изъ точекъ системы поступимъ такъ, какъ показано въ концѣ параграфа 21-го (стр. 86) относительно составленія дифференціального уравненія (111); затѣмъ, всѣ полученныя такимъ образомъ равенства сложимъ, тогда будемъ имѣть слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} (X_i x'_i + Y_i y'_i + Z_i z'_i) + \lambda(v_1) \left(\frac{dv_1}{dt} - \frac{\partial v_1}{\partial t} \right) + \\ + \lambda(v_2) \left(\frac{dv_2}{dt} - \frac{\partial v_2}{\partial t} \right) + \dots + \lambda(v_p) \left(\frac{dv_p}{dt} - \frac{\partial v_p}{\partial t} \right), \dots (724)$$

гдѣ

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i [(x'_i)^2 + (y'_i)^2 + (z'_i)^2] \dots (535)$$

есть сумма живыхъ силъ всѣхъ точекъ системы и называется *живою силою системы* (какъ уже сказано на стр. 365-й) или *кинетическою энергіею* ея.

§ 113. Силы, имѣющія потенціалъ.

Обратимъ особенное вниманіе на тѣ случаи, въ которыхъ проекціи на оси координатъ всѣхъ задаваемыхъ силъ суть функціи только координатъ точекъ и притомъ такія, что сумма:

$$X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1 + X_2 dx_2 + Y_2 dy_2 + Z_2 dz_2 + \dots + Z_n dz_n$$

или, что то же самое:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$$

функция, выражающая положительно взятую величину отталкивающей силы, действующей из центра O_k на точку m_i .

И такъ, къ каждой точкѣ системы приложены: силы, действующія со стороны прочихъ точекъ и силы, действующія со стороны неподвижныхъ точекъ; зная всѣ функции $F_{12}, F_{13}, \dots, F_{23}, \dots, \Phi_{11}, \Phi_{12}, \dots$ можемъ составить выраженія для $X_1, Y_1, Z_1, X_2, \dots$; напримеръ, X_i выразится слѣдующею суммою:

$$X_i = F_{1i} \frac{\partial r_{1i}}{\partial x_i} + F_{2i} \frac{\partial r_{2i}}{\partial x_i} + \dots + F_{pi} \frac{\partial r_{pi}}{\partial x_i} + \\ + \Phi_{1i} \frac{\partial r_{1i}}{\partial x_i} + \dots + \Phi_{pi} \frac{\partial r_{pi}}{\partial x_i};$$

поэтому сумма, заключающаяся въ первой части равенства (722), выразится такъ:

$$\sum_{i,j} F_{ij}(r_{ij}) dr_{ij} + \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{i=1}^{i=n} \Phi_{ik}(r_{ik}) dr_{ik};$$

первая изъ этихъ суммъ заключаетъ $\frac{n(n-1)}{1.2}$ членовъ, соответственно числу сочетаній, которыя можно сдѣлать изъ n точекъ по двѣ; i есть каждое изъ чиселъ: $1, 2, \dots, n$; j — тоже одно изъ этихъ чиселъ, но не равное i .

Потенціалъ всей совокупности силъ выразится слѣдующею суммою интеграловъ:

$$U = \sum_{i,j} \int F_{ij}(r_{ij}) dr_{ij} + \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{i=1}^{i=n} \int \Phi_{ik}(r_{ik}) dr_{ik} \dots \dots \dots (726)$$

Если центры O_1, O_2, \dots, O_p суть движущіяся точки, совершающія данныя движенія, то координаты ихъ $x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_p$ будутъ данными функциями времени; въ этомъ случаѣ потенціалъ силъ также выразится формулою (726), но это уже будетъ функция не только отъ координатъ материальныхъ точекъ, но и еще отъ времени, которое заключается въ выраженіяхъ координатъ $x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_p$;

Примѣръ 62-й (стр. 326 — 327). Полное рѣшеніе требуетъ опредѣленія 6*n* интеграловъ съ такимъ же числомъ постоянныхъ произвольныхъ. Такъ какъ центръ инерціи системы движется прямолинейно и равномерно и дифференціальныя уравненія относительнаго движенія каждой точки имѣютъ видъ (648) стр. 463, то всѣ 6*n* интеграловъ могутъ быть найдены, и слѣдовательно, рѣшеніе задачи можетъ быть доведено до конца. Составивъ 6 интеграловъ движенія центра инерціи, надо будетъ получить еще (6*n* — 6) интеграловъ, интегрируя дифференціальныя уравненія относительнаго движенія (*n* — 1) точекъ. Объ томъ, что каждая точка въ относительномъ движеніи описываетъ эллипсъ, было уже упомянуто на стр. 463 и 467.

Въ этомъ примѣрѣ силы имѣютъ слѣдующій потенциалъ:

$$U = C - \frac{\mu}{2} \sum_{i,j} m_i m_j r_{ij}^2,$$

а потому законъ живой силы выразится здѣсь такъ:

$$\frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i u_i^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{i,j} m_i m_j r_{ij}^2 = h.$$

Примѣръ 63-й, стр. 327. Система состоитъ изъ двухъ свободныхъ точекъ, движущихся въ плоскости *XU*, поэтому число независимыхъ координатъ равно четыремъ, а число искомыхъ интеграловъ — восьми. Четыре интеграла выражаютъ прямолинейное и равномерное движеніе центра инерціи; пятый интегралъ выражаетъ законъ живой силы:

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_c^2 + \frac{m_1}{2} u_1^2 + \frac{m_2}{2} u_2^2 - \mu m_1 m_2 \operatorname{arctg} \frac{\eta_1 - \eta_2}{\xi_1 - \xi_2} = h.$$

(Предполагается, что силы направлены такъ, какъ изображено на чертежѣ 40-мъ).

Этотъ интегралъ можно представить еще такъ:

$$\frac{u_1^2}{2} - \mu \frac{m_2^2}{m_1 + m_2} \operatorname{arctg} \frac{\eta_1}{\xi_1} = \left(\frac{h}{m_1 + m_2} - \frac{v_c^2}{2} \right) \frac{m_2}{m_1}.$$

Вмѣсто интеграла, выражающаго законъ площадей въ относительномъ движеніи точки *m*₁, получимъ слѣдующій интегралъ:

$$\xi_1 \eta_1' - \eta_1 \xi_1' = \mu \frac{m_2^2}{m_1 + m_2} t + C_3.$$



31. Двѣ матеріальныя точки, массы которых находятся внутри кольцеобразной тонкой односторонней дуги R ; онѣ связаны упругою нитью, тоже по длине этой дуги, въ натуральномъ состояніи, равна длине дуги. Трубка (масса M) лежитъ на гладкой горизонтальной поверхности, по которой можетъ скользить безъ всякаго трения нить растянута на столько, что обѣ точки находятся въ точкѣ A трубки; какъ онѣ, такъ и трубка въ покое, а затѣмъ система предоставлена сама себѣ. Чему равняется отношеніе кинетической энергии нити к кинетической энергии всей системы въ тотъ моментъ, когда нить приняла свою натуральную длину.

Примемъ начальное положеніе центра дуги за начало координатъ, линію OA — за ось X ; изъ возьмемъ въ центрѣ O дуги, который будетъ самымъ центромъ тяжести дуги, который будетъ двигаться поступательно, обѣ точки, будутъ всегда перпендикулярны къ оси X , положимъ такъ, какъ изображено на чертежѣ 75-м.

Такъ какъ центръ инерціи всей системы не находится въ точкѣ O , остаются на окружности: $\xi^2 + \eta^2 =$

$$(M + 2m)x'^2 + 2m\xi'^2 = 0, \quad \eta' =$$

Въ рассматриваемый моментъ ξ относится к кинетической энергии обѣихъ точекъ окажется равна

$$m((x' + \xi')^2 + (\eta')^2) = \frac{4m}{3(M + 2m)^2} (M^2 +$$

а кинетическая энергія всей системы — равною

$$\frac{2m}{3(M + 2m)^2} (2M + m) (M + 2m)$$

32. Двѣ матеріальныя точки m_1 и m_2 связаны нитью длиной l и проходящею черезъ точку O силою, обратно пропорціальною квадрату расстоянія отъ O . Рѣшить вопросъ о движеніи этой системы.

Эту задачу можно рѣшить слѣдующимъ образомъ:

Къ точкѣ m_1 приложена сила, направленная по нити: $l - r_1 - r_2 \geq 0$, направленная туда же; и

И такъ для того, чтобы связать между чекъ, требуется $(3n - 6)$ связей, выражающаго вида:

$$\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} = l_{ij}$$

а потому число степеней свободы такой системы

$$n = 3n - (3n - 6):$$

Такъ какъ $n = 6$, то таково же число степеней движенія такой системы, не заключающаго жесткихъ стержней, которые дѣлаютъ систему жесткою.

Эти шесть уравненій легко могутъ быть приняты во вниманіе, что реакціи воображаемыхъ стержней, прямопротивоположны и направлены какъ въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто спеціальное движеніе центра инерціи, упомянутая на стр. 536 главный моментъ реакцій связей равенъ нулю слѣдующія уравненія:

$$Mx_c'' = \sum_{i=1}^{i=n} X_i, \quad My_c'' = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i, \quad Mz_c'' = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i$$

$$\frac{dL_x}{dt} = L_x, \quad \frac{dL_y}{dt} = L_y, \quad \frac{dL_z}{dt} = L_z$$

Эти же самыя уравненія могутъ быть приняты въ вниманіе, а именно изъ равенства (567) стр. 536 д'Аламбера; для этого надо выразить возможные перемѣненія системы помощью возможныхъ варьаций, а затѣмъ приравнять нулю члены въ равенствѣ (567).

За эти независимыя варьации мы примемъ перемѣненія какой либо точки $Ю$, неизмѣнно связанной

сила тѣла и проеціи на оси
движенія вокругъ центра ин

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{M}_c p^2 + \mathfrak{B}_c q^2 + \mathbb{C}_c r^2) \dots \dots \dots (760)$$

$$= \frac{\partial T}{\partial p} = \mathcal{M}_c p, \quad (\mathcal{A}_c)_{\eta} = \frac{\partial T}{\partial q} = \mathfrak{B}_c q, \quad (\mathcal{A}_c)_{\zeta} = \frac{\partial T}{\partial r} = \mathbb{C}_c r \dots \dots (761)$$

огда дифференціальныя уравненія (758) получаютъ слѣдующій

$$\mathcal{M}_c \frac{dp}{dt} = qr(\mathfrak{B}_c - \mathbb{C}_c) + (\mathcal{M}_c)_{\xi} \dots \dots \dots (762, a)$$

$$\mathfrak{B}_c \frac{dq}{dt} = rp(\mathbb{C}_c - \mathcal{M}_c) + (\mathcal{M}_c)_{\eta} \dots \dots \dots (762, b)$$

$$\mathbb{C}_c \frac{dr}{dt} = pq(\mathcal{M}_c - \mathfrak{B}_c) + (\mathcal{M}_c)_{\zeta} \dots \dots \dots (762, c)$$

ги дифференціальныя уравненія называются Эйлеровыми дифференціальными уравненіями вращательнаго движенія свободнаго тѣла ъ центра инерціи.

дифференціальныя уравненія (616, A) и (758) могутъ быть выведены слѣдующимъ образомъ.

вмѣнивъ къ свободному твердому тѣлу равенство (567, A), правильное въ § 78-мъ на стр. 396, замѣнивъ варьаціи δx_i , δy_i , δz_i вылами (750), тогда R и первая сумма этого равенства выразятся

$$\begin{aligned} & M(x_c' \delta x_{\kappa} + y_c' \delta y_{\kappa} + z_c' \delta z_{\kappa}) + \\ & \mathcal{A}_{\kappa})_x \theta_x + (\mathcal{A}_{\kappa})_y \theta_y + (\mathcal{A}_{\kappa})_z \theta_z = M w_c \varepsilon_{\kappa} \cos(w_c, \varepsilon_{\kappa}) + \mathcal{A}_{\kappa} \theta \cos(\mathcal{A}_{\kappa}, \theta) \\ & \varepsilon_i \cos(F_i, \varepsilon_i) = B \varepsilon_{\kappa} \cos(B, \varepsilon_{\kappa}) + \mathcal{L}_{\kappa} \theta \cos(\mathcal{L}_{\kappa}, \theta); \dots \dots (763) \end{aligned}$$

у сумму R можно представить еще такъ:

$$\begin{aligned} & = M(\alpha_c \varepsilon_{\kappa} \cos(\varepsilon_{\kappa} \Xi) + \beta_c \varepsilon_{\kappa} \cos(\varepsilon_{\kappa} Y) + \gamma_c \varepsilon_{\kappa} \cos(\varepsilon_{\kappa} Z)) + \\ & + (\mathcal{A}_{\kappa})_{\xi} \theta_{\xi} + (\mathcal{A}_{\kappa})_{\eta} \theta_{\eta} + (\mathcal{A}_{\kappa})_{\zeta} \theta_{\zeta}, \end{aligned}$$

а если замѣнимъ производныя p' , q' , r' выраженіями
лучающимися изъ дифференціальныхъ уравненій (762, b

$$PQ' - QP' = G \frac{\mathfrak{G}^2 \gamma r v_s + \mathfrak{B}^2 \beta q u_s - \mathfrak{A}^2 \alpha p}{\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{G}}$$

подразумѣвая подъ α , β и γ слѣдующія выраженія:

$$\alpha = \frac{G}{\mathfrak{A}} - \frac{2h}{G}, \quad \beta = \frac{2h}{G} - \frac{G}{\mathfrak{B}}, \quad \gamma = \frac{2}{G}$$

Помощью этихъ величинъ α , β и γ могутъ быть і
 ω_1^2 , ω_2^2 , ω_3^2 , именно:

$$\omega_1^2 - R^2 = \frac{2h(\mathfrak{B} + \mathfrak{G}) - G^2}{\mathfrak{B} \mathfrak{G}} - \frac{4h^2}{G^2} = -$$

$$\omega_1^2 = R^2 - \beta \gamma, \quad \omega_2^2 = R^2 + \alpha \gamma, \quad \omega_3^2 = R^2$$

Выразивъ, въ (797, bis), косинусы λ_s , μ_s , ν_s въ
ламъ (791), замѣнивъ p^2 , q^2 , r^2 выраженіями (781)
выраженіями (799), и принявъ во вниманіе слѣдующ

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{G} - \mathfrak{B}) - \mathfrak{B}(\mathfrak{G} - \mathfrak{A}) + \mathfrak{G}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})$$

$$\frac{\mathfrak{A}^2(\mathfrak{G} - \mathfrak{B}) - \mathfrak{B}^2(\mathfrak{G} - \mathfrak{A}) + \mathfrak{G}^2(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})}{(\mathfrak{G} - \mathfrak{B})(\mathfrak{G} - \mathfrak{A})(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})} = 1,$$

получимъ:

$$PQ' - QP' = R(\Omega^2 - R^2) - \alpha \beta$$

а потому:

$$\frac{d\psi}{dt} = R - \frac{\alpha \beta \gamma}{R^2} \cotg^2 \vartheta \dots$$

Такова формула, найденная Пуансо.

Вмѣсто $\cotg \vartheta$ можно ввести въ эту формулу вели-
чина r эриода, проведеннаго изъ точки пересѣчені
направленіемъ главнаго момента количества движені
діусъ векторъ r и разстояніе D суть катеты прямоу-
льника, имѣющаго гипотенузу радиусъ векторъ элли
привлеченный вдоль по мгновенной оси, то:

$$r = D \operatorname{tg} \vartheta = \varepsilon R \operatorname{tg} \vartheta = \varepsilon \sqrt{\Omega^2 - R^2};$$

улы (787), (788), (792) дадут $\varphi = u = xt$, $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$; очевидно, это есть случай вращения тела вокруг центральной эллипсоида.

G^2 не равно $2h\mathfrak{C}_0$, но больше $2h\mathfrak{B}_0$, то закон вращения выразится формулами (784) — (788), (792), (793) и (794, 1); постоянная корней \sqrt{a} , \sqrt{b} , \sqrt{c} должны быть определены по величинам начальным: p_0 , q_0 , r_0 .

$G^2 = 2h\mathfrak{B}_0$, то закон вращения выражается формулами (793) и (794, 3); из формулы (790) видно, что при $t \rightarrow \infty$ безконечности, величинами p и r приближаются к нулю, к $n\sqrt{b}$, то есть, к

$$\pm \sqrt{\frac{2h}{\mathfrak{B}_0}},$$

овенная ось асимптотически приближается к совпадению с положительной или с отрицательной осью Y .

мы подразумевать под n положительно взятую величину

$$n = + \sqrt{\frac{2h (\mathfrak{C}_0 - \mathfrak{B}_0) (\mathfrak{B}_0 - \mathfrak{A}_0)}{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{C}_0}};$$

корней \sqrt{a} и \sqrt{c} определяются по знакам начальным p_0 и r_0 , как это видно из равенств:

$$\frac{p_0}{\sqrt{a}} = \frac{r_0}{\sqrt{c}} = \frac{2n}{e^t + e^{-t}} \dots \dots \dots (804)$$

ств, а также и следующее:

$$q_0 = n \sqrt{b} \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} \dots \dots \dots (805)$$

из формулы (790) при ($t = 0$)).

из (804) следует, что знак корня \sqrt{a} должен быть одинаков с знаком величины p_0 и знак корня \sqrt{c} — одинаков с знаком r_0 ; знаки величин p и r остаются неизменными во времени.

величины считать и положительными; в силу этого условия для q ((790), стр. 558) следует, что при возрастании t

Если вращение происходило вокруг средней оси весьма малого тѣла, можетъ повлечь за собою разныя движенія тѣла, въ зависимости отъ того, по какому дѣтъ отклоненъ изъ точки b конецъ мгновенной оси перенесъ этотъ конецъ изъ b въ s_1 или въ s_2 (см. ч. дальнѣйшемъ движеніи конецъ мгновенной оси будетъ къ точкѣ b ; слѣдовательно, отклоненіе угловой скорости изъ этихъ двухъ направленій влечетъ за собою пос. весьма медленное, возвращеніе ея къ оси Y^{ox} . Нап. ніе конца мгновенной оси изъ точки b въ h_1 или h_2 ; дальнѣйшее удаленіе его отъ b ; если же толчекъ отъ мгновенной оси изъ b въ k_1 , k_2 , n_1 или въ n_2 , то дѣленіе этого конца совершается по пологіямъ, изобра. тежѣ; при этомъ отклоненіе угловой скорости отъ концовъ дѣлается весьма замѣтнымъ и вращеніе тѣла сходство съ вращеніемъ вокругъ оси Cb .

Слѣдовательно, вращеніе вокругъ оси Cb имѣетъ характеръ только тогда, когда угловая скорость, откло. остается въ плоскости $\beta b \beta'$, при отклоненіяхъ же п. ныхъ направленіяхъ вращеніе оказывается неустой. причиной средняя ось инерціи и называется осью не. щенія.

§ 122. Вращательное движеніе по инерці. даго тѣла, центральный эллипсоидъ котора. соидъ вращенія или шаръ.

Если $\mathcal{B}_c = \mathcal{M}_c$, т. е., эллипсоидъ инерціи есть щенія, то вращательное движеніе по инерціи получи. той видъ, потому что какъ пологіи такъ и эрпологіи, слѣдовательно, уголъ ϕ , составляемый осью Z главнаго момента количества движенія, будетъ сохр. величину, а поэтому и проекція главнаго момента будетъ постоянна; но такъ какъ:

$$\mathcal{G}_c \gamma = G \cos \phi,$$

Возьмемъ за точку O центръ инерціи C тѣла (46) кинемат. части, тогда U выразится

$$U = kKz_c + k\lambda_\xi A_\xi + k\mu_\eta A_\eta$$

гдѣ:

$$A_\xi = \iiint \xi d\mu, \quad A_\eta = \iiint \eta d\mu,$$

и K есть интегралъ, выражающій количество массы такъ какъ во всякомъ тѣлѣ столько же сѣвернаго сколько и южнаго, то $K = 0$.

Величины A_ξ , A_η , A_ζ называются проекціи магнита на оси X , Y , Z ; величина:

$$A = + \sqrt{A_\xi^2 + A_\eta^2 + A_\zeta^2}$$

называется магнитнымъ моментомъ магнита, связанное съ тѣломъ и составляющее съ осями которыхъ равны отношеніямъ:

$$\frac{A_\xi}{A}, \quad \frac{A_\eta}{A}, \quad \frac{A_\zeta}{A},$$

называется направлениемъ магнитной оси магнита.

Означая черезъ A направленіе магнитной оси, разить U такъ:

$$U = kA \cos(A, Z),$$

а если взять направленіе магнитной оси, про инерціи C твердаго тѣла, за ось Z , то потенція на магнитъ, находящійся въ однородно-магнитномъ полѣ

$$U = kA \cos \phi,$$

т. е., U есть функція только отъ ϕ и притомъ:

$$\frac{\partial U}{\partial \phi} = -kA \sin \phi;$$

слѣдовательно, главный векторъ этихъ силъ равенъ нулю, а направленіе противоположное на

мѣръ 102-й. Элементы тѣрдаго однороднаго шара притягиваются
чаду координатъ силами, дѣйствующими по закону тяготѣнія. Со-
ѣ выраженіе потенціала всей совокупности этихъ силъ.

вначимъ черезъ μ величину притягивающей массы, находящейся въ
ѣ координатъ и черезъ ϵ общій множитель силъ тяготѣнія (см.
на) стр. 182).

отенціалъ притяженія, приложеннаго къ элементу объема, равенъ:

$$\epsilon \mu \frac{\sigma}{r} dO,$$

есть плотность вещества тѣла, а r — разстояніе элемента dO отъ
а координатъ.

отому, потенціалъ этихъ силъ на тѣло какой либо формы, выра-
интеграломъ:

$$U = \epsilon \mu \iiint \frac{\sigma}{r} dO, \dots \dots \dots (811)$$

нтегированіе распространено по всему объема тѣла.

устъ притягиваемое тѣло есть шаръ однородной плотности и ра-
 R .

амѣнимъ r слѣдующимъ выраженіемъ:

$$r = + \sqrt{r_c^2 - 2r_c \rho \cos \varphi + \rho^2},$$

, означаетъ разстояніе центра инерціи C (онъ же центръ поверх-
шара) отъ притягивающаго центра, ρ — разстояніе элемента dO
центра C , φ — уголъ, составляемый между собою направленіями,
денными изъ C къ притягивающему центру и къ элементу dO . Ви-
ѣ dO въ сферическихъ координатахъ (стр. 434), коихъ которыя
въ точкѣ C , а полярная ось направлена по линіи, соединяющей C
притягивающимъ центромъ. Интегрировать придется въ слѣдующихъ
лахъ: по ρ отъ нуля до R , по φ отъ нуля до π , по ψ отъ нуля до

ъ центромъ на материальную точку массы M , если бы она была въ центрѣ шара.

Тѣло однородной плотности имѣетъ не сферическую форму, то моментъ (вокругъ центра инерціи) притягивающихъ силъ не равенъ нулю.

нѣтъ 103-й. Предполагая, что вещество твердаго тѣла расположено симметрично относительно трехъ взаимно-перпендикулярныхъ осей, пересекающихся въ его центрѣ инерціи, и что разстояніе r_c велико сравнительно съ размѣрами тѣла, составимъ приближенное выраженіе потенциала U (811), пренебрегая четвертыми и высшими членами отношеній между размѣрами тѣла и разстояніемъ r_c . Изъ того, что разложимъ отношеніе $(r_c : r)$ въ рядъ, разложимъ по возрастающимъ степенямъ отношенія $(\rho : r_c)$ и отбросимъ включающіе четвертыя и высшія степени этого отношенія.

$$\begin{aligned} \frac{r_c}{r} &= \left[1 - 2 \frac{\rho}{r_c} \cos \varphi + \frac{\rho^2}{r_c^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = (1 - s)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} s + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} s^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} s^3 + \dots; \\ &+ \frac{\rho}{r_c} \cos \varphi + \frac{\rho^2}{r_c^2} \frac{3 \cos^2 \varphi - 1}{2} + \frac{\rho^3}{r_c^3} \frac{5 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi}{2} + \dots \end{aligned}$$

гдѣ φ есть уголъ, составляемый направлениемъ ρ (предполагая подъ направлениемъ, проведенное изъ C къ элементу dO) съ направлениемъ изъ C къ притягивающей точкѣ.

Въ линіи пересѣченія плоскостей симметріи твердаго тѣла заберемъ Z и означимъ черезъ λ , μ , ν косинусы угловъ, составляемыхъ направлениемъ, проведеннымъ изъ притягивающаго центра къ инерціи C ; тогда $\rho \cos \varphi$ выразится такъ:

$$\rho \cos \varphi = -(\lambda \xi + \mu \eta + \nu \zeta).$$

Выраженіе подставимъ въ предыдущій рядъ, а самый рядъ — въ правую часть равенства (811); при интегрированіи по всему тѣлу обратятся въ нуль члены, заключающіе ξ , η , ζ линейно, потому что центръ инерціи есть начало координатъ ξ , η , ζ ; а также въ нуль всѣ члены третьей степени относительно ξ , η , ζ , потому что плоскости координатъ суть плоскости симметріи тѣла; останется:

$$U = \frac{M}{r_c} + \frac{3I_c' - H_c}{2r_c^3}, \dots \dots \dots (814)$$

мъ себѣ,
 продолженіе
 плоскости къ
 перпендикулу
 ψ уголъ,
 — моментъ
 точки K отъ
 OK и че
 ъ слѣдую

$$[\lambda = \sqrt{g}]$$

$$\sqrt{\frac{3}{5}\xi^2 + 3}$$

$$= \alpha$$

$$\mathfrak{B}_c\mu =$$

пільмъ (81

$$I_c)_{\frac{1}{2}} = \frac{\xi}{r_c^{\frac{1}{2}}}$$

$$I_c)_{\eta} = \frac{1}{r_c^{\frac{1}{2}}}$$

$$I_c)_{\xi} = \frac{\xi}{r_c^{\frac{1}{2}}}$$

идею:
 моменты

го момента
 емъ или
 мна L_c р

машинного
 пени раз
 окружъ

.....ложенными к нему, может быть разложена на две части:

1) на работу

$$X \cos(B, \epsilon_n) = \delta x_n \sum_{i=1}^{i=n} X_i + \delta y_n \sum_{i=1}^{i=n} Y_i + \delta z_n \sum_{i=1}^{i=n} Z_i, \dots (827)$$

решаемую ими во поступательной части перемещения и

2) на работу

$$\begin{aligned} L_n \theta \cos(L_n, \theta) &= (L_n)_x \theta_x + (L_n)_y \theta_y + (L_n)_z \theta_z = \\ &= (L_n)_\xi \theta_\xi + (L_n)_\eta \theta_\eta + (L_n)_\zeta \theta_\zeta, \dots \dots \dots (828) \end{aligned}$$

решаемую ими во вращательной части перемещения тела.

Если вся совокупность задаваемых сил, приложенных к твердому телу, имеет потенциал U , который выражен в виде функций $x_n, y_n, z_n, \phi, \psi$ и θ , или от $x_n, y_n, z_n, \lambda_x, \mu_x, \nu_x, \lambda_y, \mu_y, \nu_y, \lambda_z, \mu_z, \nu_z$, то элементарная работа сил на поступательной части возмущающего перемещения тела может быть выражена так:

$$B \epsilon_n \cos(B, \epsilon_n) = \frac{\partial U}{\partial x_n} \delta x_n + \frac{\partial U}{\partial y_n} \delta y_n + \frac{\partial U}{\partial z_n} \delta z_n, \dots (829)$$

му что частными производными от U по x_n, y_n, z_n выражают проекции главного вектора B на оси $X^{(n)}, Y^{(n)}$ и $Z^{(n)}$ (см. (806) стр. 575).

Вторая часть равенства (829) выражает приращение, получаемое значением U при поступательном перемещении всего твердого тела на ϵ_n ; поэтому проекция главного вектора B на направление ϵ_n является отношением приращения, получаемого потенциальной функцией U при поступательном перемещении тела на бесконечно-малую ϵ_n или $\delta \epsilon_n$ по этому направлению, к величинам этого перемещения.

Обыкновенно это отношение выражают символически в виде производной $\frac{dU}{d\epsilon_n}$; так что:

$$B \cos(B, \epsilon_n) = \frac{dU}{d\epsilon_n}, \dots \dots \dots (829, \text{bis})$$

вторая часть есть символ, имеющий следующее значение:

$$\frac{dU}{d\epsilon_n} = \frac{\partial U}{\partial x_n} \cos(\epsilon_n, X) + \frac{\partial U}{\partial y_n} \cos(\epsilon_n, Y) + \frac{\partial U}{\partial z_n} \cos(\epsilon_n, Z), \dots (830)$$

Пусть $\delta_\theta U$ есть приращение, получаемое функцией U при вращении твердаго тѣла на ничтожно-малый уголъ θ вокругъ какой либо оси A , проходящей черезъ точку $Ю$. Элементарная работа, совершаемая при этомъ вращеніи всѣми силами, имѣющими потенціалъ U , выразится съ одной стороны приращеніемъ $\delta_\theta U$, съ другой стороны произведеніемъ $L_\theta \theta \cos(L_\theta, A)$, а потому проэкція главнаго момента L_θ на направленіе A можетъ быть выражена въ видѣ отношенія $(\delta_\theta U : \theta)$; это отношеніе тоже изображаютъ символически подъ видомъ производной $\frac{dU}{d\theta_A}$, замѣняя $\delta_\theta U$ черезъ dU , а θ — черезъ $d\theta_A$; такъ что:

$$L_\theta \cos(L_\theta, A) = \frac{dU}{d\theta_A} \dots \dots \dots (831)$$

Напримѣръ, проэкція главнаго момента на оси $X^{орт}$, $Y^{орт}$, Ξ , Υ выразятся символически въ видѣ производныхъ:

$$(L_\theta)_x = \frac{dU}{d\theta_x}, (L_\theta)_y = \frac{dU}{d\theta_y}, (L_\theta)_\xi = \frac{dU}{d\theta_\xi}, (L_\theta)_\eta = \frac{dU}{d\theta_\eta},$$

значенія этихъ символовъ выражаются формулами (818, а), (818, b) (817, а), (817, b), приведенными выше.

Въ примѣненіи же къ проэкціямъ главнаго момента на оси $Z^{орт}$, Z , и N эти символическія производныя получаютъ буквальный смыслъ, потому что углы θ_x , θ_ξ и θ_n входятъ явнымъ образомъ въ выраженіе U ; а именно: θ_x есть уголъ \mathcal{X} , θ_ξ — уголъ \mathcal{E} и θ_n — уголъ ϕ . Поэтому то:

$$(L_\theta)_x = \frac{\partial U}{\partial \mathcal{X}}, (L_\theta)_\xi = \frac{\partial U}{\partial \mathcal{E}}, L_\theta \cos(L_\theta, N) = \frac{\partial U}{\partial \phi},$$

какъ было доказано въ § 124-мъ.

§ 126. Движеніе свободнаго твердаго тѣла, къ которому приложены силы, имѣющія потенціалъ, выражаемый формулою (810); центральный эллипсоидъ инерціи тѣла есть эллипсоидъ вращенія вокругъ оси Z .

Въ этомъ случаѣ центръ инерціи тѣла находится въ покоѣ, или движется прямолинейно и равномерно.

Составимъ дифференціальныя уравненія вращательнаго движенія вида (769, bis) (стр. 578) для настоящаго случая. Такъ какъ мы

Если же ω не равно нулю, то вращение оси Z вокруг центра инерции совершается иначе, чѣмъ движеніе математическаго маятника.

Каковы бы ни были начальныя обстоятельства вращенія тѣла, т. е. величины $\phi_0, \kappa_0, \vartheta_0, \phi'_0, \kappa'_0, \vartheta'_0$, мы опредѣлимъ постоянныя ω, C_1 и h_1 по формуламъ:

$$\omega = \kappa'_0 \cos \phi_0 + \vartheta'_0, \quad C_1 = \mathcal{A} \kappa'_0 \sin^2 \phi_0 + \mathcal{C} \omega \cos \phi_0$$

$$h_1 = \frac{\mathcal{A}}{2} [(\kappa'_0)^2 \sin^2 \phi_0 + (\phi'_0)^2] + \frac{\mathcal{C}}{2} \omega^2 - Ak \cos \phi_0.$$

Постоянныя h_1 и C_1 мы замѣнимъ двумя другими величинами, причемъ нѣсколько измѣнимъ видъ дифференціальныя уравненія (832 bis) и (834).

Отложимъ отъ центра инерціи тѣла по оси Z длину $R = \overline{C\Pi}$ (черт. 91), выражаемую отношеніемъ (837); проекція этой длины на ось $Z^{\text{ост}}$ равна $R \cos \phi$; скорость v точки Π и проекція этой скорости на плоскость XU выразятся такъ:

$$v = R \sqrt{(\kappa')^2 \sin^2 \phi + (\phi')^2}, \quad v \sin(\phi, Z) = R \kappa' \sin \phi.$$

Если въ дифференціальномъ уравненіи (834) замѣнить \mathcal{A} отношеніемъ (AkR/g) , то это уравненіе можно будетъ представить такъ:

$$\frac{v^2}{2g} - R \cos \phi = \frac{h_1 - \frac{1}{2} \mathcal{C} \omega^2}{Ak} R = -b, \quad (834, A)$$

гдѣ b есть длина, имѣющая то же самое значеніе, какое имѣетъ длина, означенная тѣмъ же знакомъ въ примѣрѣ 33-мъ (стр. 235); а именно $x=b$ есть уровень той плоскости, до которой достигла бы свободная точка, брошенная параллельно отрицательной оси $Z^{\text{ост}}$, если бы она была подвержена силѣ тяжести по направленію положительной оси $Z^{\text{ост}}$ и была бы брошена изъ уровня плоскости $x_0 = R \cos \phi_0$ съ начальною скоростью v_0 ; пусть $B_1 B B_2$ (черт. 91) есть линія пересѣченія плоскости ZZ съ плоскостью $x=b$.

Въ другомъ дифференціальномъ уравненіи: (832, bis) также замѣнимъ \mathcal{A} вышесказаннымъ отношеніемъ и, кромѣ того, представимъ C_1 подъ видомъ:

$$C_1 = \mathcal{C} \omega \frac{D}{R},$$

$$b = R \cos g$$

$$D = R \left(\frac{u_2}{c} \right)$$

разность между ними равна:

$$D - b = \frac{v_0^2}{2g} +$$

Из формулы (843) видно, что l то есть, что уровень $B_1 B B_2$ не в котором находится точка C в нач

Длина D , как видно из форму угла ϕ_0 и величиною отношения $(\phi'_0$

Когда известны b , D и F , то мож нения $SR^2 = 0$.

Между прочимъ можно замѣтити точекъ пересѣченія кривой:

$$z = b = F$$

съ кругомъ радіуса R , имѣющимъ заключить изъ дифференціального ур его подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{R^2}{2g} (\phi'_0)^2 = z -$$

Кривая (846) представляетъ тр разности $(D - b)$; во всякомъ случа части плоскости (zx) , гдѣ $z > b$ и $z < b$.

1) Если $(D - b) > 0$, то крива длинныхъ вѣтвей, пересѣкающихся симметричныхъ относительно оси CZ вѣтви удаляются въ бесконечность, прямой $z = b$, съ другихъ же сторон нечность ($z = \infty$, $z = -\infty$) подобн (846) имѣетъ положительныя значен

Если бы тѣло не вращалось вокруг своей оси, то ось $ОЦZ$ постоянно осн. скорости, проходящей через ось OZ , въ которой чальный моментъ движенія; вслѣдствіе же вращ. Z , ось $ОЦZ$ выходитъ изъ этой плоскости и то вую вышеозначеннаго вида, причемъ прецессіи каждый разъ, какъ точка C вступаетъ на уровень $\delta = D = R \cos \phi_0$.

Случай b_1 ; $D^2 = R^2$, т. е. $D = +R$ или $D = -R$, т. е. $\phi_1 = 0$, т. е. $\delta_1 = D = +R$ (черт. 93) т. е. $\delta_2 = D = -R$; значить кривая, описывающая въ первомъ случаѣ черезъ верхнюю, а во второмъ черезъ нижнюю точку сферы; въ этихъ точкахъ прецессія равна нулю, изображенъ на чертежѣ (93, а). Если бы тѣло осн Z и точка C должна была бы проходить по поверхности сферы, то движеніе ея должно было бы совершаться въ плоскости.

Случай c_1 ; $D^2 > R^2$, то есть, $D > +R$ или $D < -R$. Прецессія не мѣняетъ знака и кривая, описываемая точкою C , имѣетъ видъ (94).

2. Случаи, въ которыхъ $D = b$.

Случай a_2 ; $D^2 < R^2$ (см. черт. 95). Такъ и уровень $\delta = \delta_2$ есть вѣсть съ тѣмъ и уровень прецессія равна нулю, а такъ какъ на немъ же и кривая, описываемая точкою C , имѣетъ на этихъ вратахъ, какъ изображено на чертежѣ (95, а), гдѣ добной кривой.

Такимъ образомъ совершается движеніе то въ случаѣ, когда $\phi'_0 = 0$ и $\psi'_0 = 0$, а δ'_0 и

Въ этомъ случаѣ:

$$SR^2 = (\delta - b) (R^2 - \delta^2 - F\delta)$$

стало бытъ: $\delta_2 = b$,

$$\delta_1 = \frac{F}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 4 \left(\frac{b}{F} + \frac{R^2}{F^2} \right)} \right) = b + \frac{F}{2}$$

$$\delta_1 = b + \frac{\omega_c^2}{6c^2} \frac{2g \sin^2 \phi_0}{\omega^2} - 8b \frac{\omega_c^4}{6c^4} \frac{g^2}{\omega^2}$$

этих колебаний; будетъ только видно, что ось CZ совершаетъ прецессию, величина которой (848) тѣмъ меньше, тѣмъ болѣе ω и тѣмъ болѣе, тѣмъ болѣе силовой моментъ Al ; при этомъ биваетъ слышенъ звукъ, высота котораго соответствуетъ числу промежутковъ времени T въ секунды. Напримѣръ, если тѣло дѣлаетъ 1000 оборотовъ въ минуту, а $G_0 = 2 \text{ Я}$, то $T = 0,015$ секунды и высота звука соответствуетъ 33-мъ колебаніямъ въ секунду.

Случай b_2 ; $D = b = +R$. Въ этомъ случаѣ ось CZ постоянно совпадаетъ съ осью Z' .

Если же $D = b = -R$, то тогда $SR^2 = (3 + R)^2 (R - F - 3)$ и интегралы дифференціальныя уравненій (835) и (832) будутъ слѣдующіе:

$$\frac{2R - F}{R + 1} = \left(\sqrt{\frac{2R - F}{R + 1_0}} \cos nti + i \sqrt{\frac{R - F - 1_0}{R + 1_0}} \sin nti \right)^2 \dots (849)$$

$$\alpha - \alpha_0 = -\frac{\sqrt{2gF}}{2R} t + \arctg \sqrt{\frac{R - F - 1}{F}} - \arctg \sqrt{\frac{R - F - 1_0}{F}}; (850)$$

здесь:

$$n = \frac{\sqrt{2g(2R - F)}}{2R}.$$

Для того, чтобы подобное движеніе могло произойти, необходимо, чтобы $R - F - 1_0$ было болѣе нуля. Изъ равенства (849) можно видѣть, что при этомъ движеніи ось CZ асимптотически приближается къ положенію $\phi = \pi$, причемъ, какъ видно изъ равенства (850), она описываетъ спирально завертывающуюся коническую поверхность.

Если $F = 0$, то точка Π совершаетъ движеніе, разсмотрѣнное на страницѣ 241-й.

Случай c_2 ; $D = b < -R$.

Если $F = 0$, то точка Π совершаетъ движеніе, разсмотрѣнное на страницѣ 240-й.

Если же F не равно нулю, но меньше, чѣмъ

$$\frac{R^2 - 1_0^2}{1_0 - b},$$

то точка Π совершаетъ движеніе по нѣкоторому сферическому поясу; этого движенія разсматривать не будемъ.

3. Случай, въ которомъ D меньше b , т. е. $(D - b) < 0$.

Случай a_3 ; $b < R$. Черт. 96 и (96, а). Кривая имѣетъ видъ, изобра-

женный на чертежѣ (96, а); если $\omega > 0$, то прецессія отрицательная
всего движенія.

Значенія b_2 и c_2 разсматривать не будемъ.

Если корни δ_1 и δ_2 равны между собою, то есть, когда кривая, выра-
женная уравненіемъ (846), прикасается къ кругу радіуса R , тогда ось
звѣзды совершаетъ постоянную прецессию, безъ нутаціи.

Въ случаѣ прикосновенія кривой (846) къ кругу радіуса R можетъ быть
три категоріи случаевъ.

1) случаяхъ (1, c_1), когда $D > R > b$, прикосновеніе можетъ про-
исходить только въ точкахъ верхняго полуокружности (гдѣ $\phi < \frac{\pi}{2}$), какъ
изображено на чертежѣ (94, б).

2) случаяхъ той же категоріи, когда $D > b$ и притомъ $D < -R$,
прикосновеніе можетъ происходить только въ точкахъ нижняго полу-
окружности (гдѣ $\phi > \frac{\pi}{2}$), какъ изображено на чертежѣ (94, в).

3) случаяхъ (2, c_2), когда $D = b < -R$, прикосновеніе можетъ быть
въ точкахъ нижняго полуокружности.

4) случаяхъ (3), когда $D < b$ и кривая имѣетъ видъ, изобра-
женный на чертежѣ 96-мъ, прикосновеніе можетъ происходить и въ
нижнемъ и въ точкахъ верхняго полуокружности.

Если заданы: уголъ ϕ_0 и величина ω (или F), при которыхъ ось
звѣзды должна совершать постоянную прецессию безъ нутаціи,
то можемъ слѣдующимъ образомъ опредѣлять величину прецессіи $\dot{\phi}$.
Въ самомъ началѣ найдемъ соответственные значенія величинъ D и b ;
о возьмемъ равенства:

$$2\delta_1 + \delta_2 = b - F, \quad \delta_1^2 + 2\delta_1\delta_2 = -R^2 - 2FD,$$

$$\delta_1^2\delta_2 = -bR^2 - FD^2$$

изъ нихъ b и δ_2 , тогда получимъ слѣдующее уравненіе для
величины D :

$$D^3 - D \frac{R^2 + b^2}{2b_1} + R^2 - \frac{(R^2 - b_1^2)^2}{2b_1 F} = 0,$$

изъ него находимъ два значенія для D :

$$D_1 = \delta_1 + \frac{R^2 - b_1^2}{2b_1} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2b_1}{F}} \right),$$

$$D_2 = \delta_1 + \frac{R^2 - b_1^2}{2b_1} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2b_1}{F}} \right).$$

Изъ уравненія $SR^2=0$ найдемъ соот-
ветствія b .

Такимъ образомъ оказывается, что дви-
женія при заданныхъ величинахъ $\beta_1=R$ со-
двоякимъ образомъ: съ прецессією

$$\omega'_1 = \frac{\sqrt{2gF}}{2\beta_1} (1 + \sqrt{1})$$

и съ прецессією:

$$\omega'_2 = \frac{\sqrt{2gF}}{2\beta_1} (1 - \sqrt{1})$$

Если $\beta_1 > 0$, то оба рѣшенія возможны
тогда прецессія ω'_1 положительная, а
первая соответствуетъ случаю, изображен-
 $D > R$ и $b < R$; прецессія же ω'_2 соот-
ветствуетъ случаю, изображенна на чертежѣ 96-мъ,
(тогда $D < b < R$).

Если $\beta_1 < 0$, то рѣшеніе возможно при
($-2\beta_1$), т. е., при

$$\omega^2 \text{ не менѣе } \bar{\omega}^2$$

При всякой величинѣ ω , удовлетворя-
ющей совершать два движенія безъ путаці-
ию ω'_1 , другое — съ постоянною преце-
ссією, такъ какъ $\beta_1 < 0$ и корень менѣе $\bar{\omega}$.

§ 127. Примѣръ 104-й. Незмѣняемыя
матеріальныхъ точекъ; движеніе со-
щей каждой изъ точекъ сопротивленію, пр-
отивъ движенія; всѣ точки этой неизмѣняемой
часть координатъ силами, пропорціональ-
ными разстояніямъ отъ начала координатъ.

Проекція на оси X, Y, Z силъ, прилож-
енныя:

$$- \mu m_i x_i - \epsilon m_i x'_i, \quad - \mu m_i y_i - \epsilon m_i y'_i$$

поэтому проекція на тѣ же оси главнаго

$$B_x = - \mu M x_c - \epsilon M x'_c, \quad B_y =$$

$$B_z = - \mu M z_c -$$

$$\mathcal{A}_c \frac{dp}{dt} = (\mathcal{B}_c - \mathcal{C}_c)qr - \varepsilon \mathcal{A}_c p$$

$$\mathcal{B}_c \frac{dq}{dt} = (\mathcal{C}_c - \mathcal{A}_c)rp - \varepsilon \mathcal{B}_c q$$

$$\mathcal{C}_c \frac{dr}{dt} = (\mathcal{A}_c - \mathcal{B}_c)pq - \varepsilon \mathcal{C}_c r,$$

но легко их привести къ слѣдующему виду:

$$\mathcal{A}_c \frac{dp_1}{dt} = (\mathcal{B}_c - \mathcal{C}_c)q_1 r_1, \quad \mathcal{B}_c \frac{dq_1}{dt} = (\mathcal{C}_c - \mathcal{A}_c)r_1 p_1,$$

$$\mathcal{C}_c \frac{dr_1}{dt} = (\mathcal{A}_c - \mathcal{B}_c)p_1 q_1,$$

гдѣ:

$$p_1 = pe^{\varepsilon t}, \quad q_1 = qe^{\varepsilon t}, \quad r_1 = re^{\varepsilon t}, \quad t = -\frac{e^{-\varepsilon t}}{\varepsilon}.$$

Легко теперь получить интегралы:

$$\mathcal{A}_c p^2 + \mathcal{B}_c q^2 + \mathcal{C}_c r^2 = 2ke^{-2\varepsilon t},$$

$$\mathcal{A}_c^2 p^2 + \mathcal{B}_c^2 q^2 + \mathcal{C}_c^2 r^2 = G^2 e^{-2\varepsilon t},$$

изъ которыхъ можно заключить, что центральный эллипсоидъ инерціи неизмѣняемой системы постоянно прикасается къ двумъ плоскостямъ, перпендикулярнымъ къ направленію \mathcal{A}_c и отстоящимъ отъ центра инерціи на разстояніяхъ, равныхъ:

$$D = \sqrt{\mu} \cdot \partial^4 \frac{\sqrt{2h}}{G} \dots \dots \dots (777)$$

Поступая далѣе такимъ же образомъ, какъ въ § 120, получимъ остальныя интегралы; такъ, если D менѣ длины средней полуоси эллипсоида инерціи, получатся слѣдующія выраженія для p , q , r :

$$p = kx\sqrt{a} e^{-\varepsilon t} \cos am\left(u_0 - \frac{x}{\varepsilon} e^{-\varepsilon t}\right),$$

$$q = kx\sqrt{b} e^{-\varepsilon t} \sin am\left(u_0 - \frac{x}{\varepsilon} e^{-\varepsilon t}\right),$$

$$r = x\sqrt{c} e^{-\varepsilon t} \Delta am\left(u_0 - \frac{x}{\varepsilon} e^{-\varepsilon t}\right).$$

если принять въ расчетъ, что варьяціи δx_n , δy_n связаны между собою зависимою $\delta z = 0$, перваго выразить въ δx_n , δy_n , δz_n , θ_x , θ_y , θ_z .

Когда z есть функція отъ t , x_n , y_n , z_n , ϕ , δ зная $\delta\phi$, δx , δz , по формуламъ:

$$\delta\phi = \theta_y \cos \kappa - \theta_x \sin \kappa$$

$$\sin \phi \delta z = \theta_y \sin \kappa + \theta_x \cos \kappa$$

$$\delta \kappa = \theta_z - (\theta_y \sin \kappa + \theta_x \cos \kappa) \cot \phi$$

когда же z есть функція отъ t , x_n , y_n , z_n , λ_x , λ_y , λ_z , тогда выразимъ $\delta\lambda_x$, $\delta\lambda_y$, $\delta\lambda_z$, $\delta\mu_x$, $\delta\mu_y$, $\delta\mu_z$, $\delta\nu_x$, $\delta\nu_y$, $\delta\nu_z$ по формуламъ

$$\delta\lambda_x = \lambda_z \theta_y - \lambda_y \theta_z, \quad \delta\mu_x = \mu_z \theta_y - \mu_y \theta_z$$

$$\delta\nu_x = \nu_z \theta_y -$$

$$\delta\lambda_y = \lambda_x \theta_z - \lambda_z \theta_x, \quad \delta\mu_y = \mu_x \theta_z - \mu_z \theta_x$$

$$\delta\nu_y = \nu_x \theta_z -$$

$$\delta\lambda_z = \lambda_y \theta_x - \lambda_x \theta_y, \quad \delta\mu_z = \mu_y \theta_x - \mu_x \theta_y$$

$$\delta\nu_z = \nu_y \theta_x -$$

Примѣнивъ пріемъ Эйлера и Лагранжа, указанный въ § 389, получимъ три дифференціальныя уравненія три слѣдующія дифференціальныя уравненія:

$$\frac{d(\Lambda_n)_x}{dt} + M(y'_n z'_c - z'_n y'_c) = (\Lambda_n)_x +$$

$$\frac{d(\Lambda_n)_y}{dt} + M(z'_n x'_c - x'_n z'_c) = (\Lambda_n)_y +$$

$$\frac{d(\Lambda_n)_z}{dt} + M(x'_n y'_c - y'_n x'_c) = (\Lambda_n)_z +$$

гдѣ $(\Lambda_n)_x$, $(\Lambda_n)_y$, $(\Lambda_n)_z$ суть проекціи главнаго мом на оси X^{xyz} , Y^{xyz} , Z^{xyz} .

Можно также принять за точку $Ю$ другую точку например его центр инерции C ; тогда уравнение подь слѣдующимъ видомъ:

$$f((x_c + \xi_k \lambda_x + \eta_k \mu_x + \zeta_k \nu_x), (y_c + \xi_k \lambda_y + \eta_k \mu_y + \zeta_k \nu_y), (z_c + \xi_k \lambda_z + \eta_k \mu_z + \zeta_k \nu_z),$$

гдѣ x_c, y_c, z_c суть абсолютныя координаты центра началомъ координатныхъ осей X, Y, Z ; ξ_k постоянныя величины, а именно относительныя ко твердаго тѣла. Такъ какъ теперь точка C замѣняетъ въ уравненіяхъ (859) и (861, a, b, c) прои x_c, y_c, z_c должны быть замѣнены производными а въ уравненіяхъ (861, d, e, f) и (867) величины быть замѣнены моментами λ_c, μ_c, ν_c вокругъ цен

По предыдущимъ формуламъ найдемъ, что вектора реакцій этой связи на оси X, Y, Z суть

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_c} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial y_c} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y_k}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial z_c}$$

и что проекціи главнаго момента на тѣ же оси вы

$$(\Lambda_c)_x = \lambda \left[\frac{\partial f}{\partial x_k} (y_k - y_c) - \frac{\partial f}{\partial y_k} (z_k -$$

$$(\Lambda_c)_y = \lambda \left[\frac{\partial f}{\partial x_k} (z_k - z_c) - \frac{\partial f}{\partial z_k} (x_k -$$

$$(\Lambda_c)_z = \lambda \left[\frac{\partial f}{\partial y_k} (x_k - x_c) - \frac{\partial f}{\partial x_k} (y_k -$$

стало быть реакція этой связи состоитъ изъ одной въ точкѣ K , направленной по нормали къ даннѣйшей величину:

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_k}\right)^2}.$$

2) Связь, обратная предыдущей: поверхности принадлежащая твердому тѣлу, постоянно прохо

Зная длину s_0 , определяющую τ относительныя координаты ξ_0, η_0, ζ_0 и абсолютныя координаты по формула

$$x_0 = x_c + \lambda_x \varphi_1(s_0) + \mu$$

$$y_0 = y_c + \lambda_y \varphi_1(s_0) + \mu$$

$$z_0 = z_c + \lambda_z \varphi_1(s_0) + \mu$$

эти абсолютныя координаты должны

$$f(x_0, y_0, z_0,$$

Въ точкѣ прикосновенія касате перпендикулярна къ нормали, возстал изъ этой точки, т. е.:

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} \frac{dx_0}{ds_0} + \frac{\partial f}{\partial y_0} \frac{dy_0}{ds_0} +$$

Предположимъ, что въ равенств наты x_0, y_0, z_0 замѣнены выражен уравненіе (875) рѣшено относительно зится функциею

$$s_0 = \Phi(t, x_c, y_c, z_c, \lambda_x,$$

отъ показанныхъ здѣсь переменныя функция подставлена вмѣсто s_0 въ последнее обратится въ уравненіе ра

Если надо будетъ получить ча части уравненія связи по одной изъ $1 \dots \nu$, наприимѣръ по x_c , то приди образомъ:

$$\frac{\partial z}{\partial x_c} = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_c} \frac{\partial x_0}{\partial s_0} + \right)$$

Кромѣ того, въ точкѣ прикосновенія, ϵ (878) должна совпадать съ нормалію къ повр-

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_0} \lambda_x + \frac{\partial f}{\partial y_0} \lambda_y + \frac{\partial f}{\partial s_0} \lambda_s}{\frac{\partial F}{\partial \xi_0}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_0} \mu_x + \frac{\partial f}{\partial y_0} \mu_y}{\frac{\partial F}{\partial \eta_0}}$$

$$= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_0} v_x + \frac{\partial f}{\partial y_0} v_y + \frac{\partial f}{\partial s_0} v_s}{\frac{\partial F}{\partial \zeta_0}}.$$

Рѣшивъ три уравненія (877) и (879) отъ

$$\xi_0 = \Phi_1(x_c, y_c, s_c, \lambda_x, \lambda_y, \dots, v_s, t),$$

и подставивъ эти выраженія въ уравненіе (87) разсматриваемой связи:

$$z = f((x_c + \lambda_x \Phi_1 + \mu_x \Phi_2 + v_x \Phi_3), (y_c + \\ + v_y \Phi_3), (s_c + \lambda_s \Phi_1 + \mu_s \Phi_2 + v_s$$

Производная первой части уравненія съ мѣстныхъ $x_c, y_c, s_c, \lambda_x, \lambda_y, \dots, v_s, t$, напишется такъ:

$$\frac{\partial z}{\partial x_c} = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} \lambda_x + \frac{\partial f}{\partial y_0} \lambda_y + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} \mu_x + \frac{\partial f}{\partial y_0} \mu_y + \frac{\partial f}{\partial s_0} \mu_s \right) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_c} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} v_x + \right. \right.$$

или, на основаніи равенствъ (879), такъ:

$$\frac{\partial z}{\partial x_c} = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_c} + \frac{\partial F}{\partial \eta_0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_c} + \right.$$

но изъ равенства (877) слѣдуетъ, что полная x_c равна нулю, поэтому:

$$\frac{\partial z}{\partial x_c} = \frac{\partial f}{\partial x_0}.$$

Тѣло I. Точка O этого тѣла должна оставаться въ началѣ координатъ и ось $Z_1 Z_1'$ должна совпадать съ осью OY , поэтому тѣло это имѣетъ только одну степень свободы: ось $Z_2 OZ_2'$ можетъ составлять произвольный уголъ $\vartheta_1 = Z_2' OZ$ съ осью Z^{oxy} .

Тѣло II. Точка O этого тѣла должна оставаться въ началѣ координатъ, а ось $Z_2 OZ_2'$ — въ плоскости XZ ; поэтому это тѣло имѣетъ двѣ степени свободы: ось OZ_2' можетъ составлять произвольный уголъ $\varphi_2 = \vartheta_1$ съ осью Z^{oxy} и плоскость $Z_2' OYO$ можетъ составлять произвольный уголъ ϑ_2 съ плоскостью $Z OZ_2'$ или $Z OX$. Косинусы угловъ, составляемыхъ направлениемъ OYO (см. черт. 97) съ осями X^{oxy} , Y^{oxy} , Z^{oxy} , получаются изъ формулъ (47), (48) и (49) кинематической части, если примемъ ось OZ_2' тѣла II за ось Z , а направление OYO — за ось Y ; подставивъ $\varphi_2 = \vartheta_1$, $\vartheta_2 = 0$, получимъ:

$$\cos(OYO, X) = \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_1, \quad \cos(OYO, Y) = \sin \vartheta_2,$$

$$\cos(OYO, Z) = -\cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1.$$

Тѣло III имѣетъ три степени свободы.

Тѣло IV имѣетъ четыре степени свободы: точка IO , координаты которой можно выразить такъ:

$$x_{io} = r_{io} \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_1, \quad y_{io} = r_{io} \sin \vartheta_2, \quad z_{io} = -r_{io} \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1,$$

(r_{io} означаетъ величину разстоянія точки IO отъ точки O), можетъ имѣть произвольное положеніе, на сколько позволяетъ длина стержня SS , и плоскость $Z'IOZ_4'$ можетъ составлять произвольный уголъ ϑ_4 съ плоскостью, проведенною черезъ ось IOZ_4' параллельно оси Z^{oxy} . Такъ какъ ось $Z_4 IOZ_4'$ параллельна оси $Z_2 Z_2'$, то послѣдняя плоскость должна быть параллельна плоскости XZ и кромѣ того уголъ φ_4 , составляемый осью IOZ_4' съ осью Z^{oxy} , долженъ быть равенъ ϑ_1 , поэтому двѣ связи, ограничивающія свободу движенія твердаго тѣла IV, выражаются слѣдующими равенствами:

$$\vartheta_4 = 0, \quad \operatorname{tg} \varphi_4 = \operatorname{tg} \vartheta_1 = -\frac{z_{io}}{x_{io}},$$

гдѣ φ_4 и ϑ_4 суть углы, опредѣляющіе направленіе оси IOZ_4' тѣла IV.

Косинусы угловъ, составляемыхъ направлениемъ IOZ' съ осями X^{oxy} , Y^{oxy} , Z^{oxy} , получаются изъ формулъ (47), (48), (49) кинематической части, если въ нихъ замѣнимъ φ , ϑ и ϑ величинами $\varphi_4 = \vartheta_1$, $\vartheta_4 = 0$ и ϑ_4 ; получимъ:

$$\cos(IOZ', X) = \cos \vartheta_4 \cos \vartheta_1, \quad \cos(IOZ', Y) = \sin \vartheta_4,$$

$$\cos(IOZ', Z) = -\cos \vartheta_4 \sin \vartheta_1 \dots \dots \dots (884)$$

*

По устройству механизма, расстояние r_0 не может выходить изъ некоторыхъ предѣловъ; а именно, когда вилка B_1B_2 упрется въ верхній конецъ гильзы L — расстояние r_0 получитъ наименьшее значеніе, когда же нижнее утолщеніе стержня S задержится нижнимъ концомъ гильзы L , состояніе r_0 получитъ наибольшее значеніе.

Пока r_0 заключается внутри, а не на границахъ этихъ предѣловъ, шаровое тѣло V имѣетъ пять степеней свободы; составимъ уравненіе или, представляемой описаннымъ механизмомъ при промежуточныхъ состояніяхъ r_0 .

Означимъ черезъ ϕ и α углы, опредѣляющіе направленіе оси KOZ' шароваго тѣла V ; косинусы угловъ, составленныхъ этою осью съ осями X^{000} и X^{001} , выразятся съ одной стороны въ углахъ ϕ и α по формуламъ:

$$v_x = \cos \phi, \quad v_z = \sin \phi \cos \alpha,$$

съ другой стороны въ углахъ ϑ_1 и ϑ_2 по формуламъ (881), поэтому:

$$\operatorname{tg} \phi \cos \alpha = -\operatorname{cotg} \vartheta_1 = \frac{x_0}{x_n};$$

куда получимъ уравненіе связи:

$$x_n \sin \phi \cos \alpha - x_0 \cos \phi = 0 \dots \dots \dots (882)$$

$$x_n v_x - x_0 v_z = 0 \dots \dots \dots (882, \text{bis})$$

Проекція на оси X^{000} , Y^{000} и Z^{000} главнаго вектора V и главнаго момента Λ_n реакцій этой связи суть:

$$V_x = -\lambda v_x, \quad V_y = 0, \quad V_z = \lambda v_z,$$

$$(\Lambda_n)_x = -\lambda x_n v_y, \quad (\Lambda_n)_y = \lambda (x_n v_x + x_0 v_z), \quad (\Lambda_n)_z = -\lambda x_0 v_y.$$

Главный векторъ реакцій этой связи пропорціоналенъ синусу угла, составляемаго направленіемъ оси KOZ' съ осью Y^{000} , и заключается въ плоскости параллельной плоскости XZ ; а величина момента Λ_n пропорціональна проекціи r_0 на плоскость XZ :

$$V = \lambda \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = \lambda \sqrt{1 - v_y^2} = \lambda \sin(Z', Y),$$

$$\Lambda_n = \lambda \sqrt{x_n^2 + x_0^2}.$$

6) Разсмотримъ такимъ же образомъ другой механизмъ на чертежѣ 98-мъ. Онъ состоитъ также изъ пяти

Тѣло I есть такой же крестъ, какъ и въ предыдущемъ

Тѣло II состоитъ изъ двухъ вилокъ B_1B_1 и B_2B_2 связанныхъ между собою стержнемъ S ; ось $Z_3Z'_3$ тѣла II вилокъ B_2B_2 , параллельна оси $Z_2Z'_2$.

Тѣло III, замѣняющее собою кольцо предыдущаго креста, центръ котораго $Ю$ находится въ постоянной началу координатъ O , а ось $Z_4Z'_4$ перпендикулярна

Тѣло IV, состоящее изъ вилокъ B_3B_3 съ приклееннымъ стержнемъ S_4 , имѣетъ четыре степени свободы, такъ какъ оно имеетъ два условія:

$$x_{ю}^2 + y_{ю}^2 + z_{ю}^2 - l^2 = 0 \dots$$

$$x_{ю} \sin \phi_4 \cos \alpha_4 - z_{ю} \cos \phi_4 = 0$$

гдѣ ϕ_4 , α_4 суть углы, опредѣляющіе направление изъ этихъ условій выражаетъ, что точка $Ю$ должна находиться на разстояніи отъ точки O , второе же условіе тождественно (882) предыдущаго примѣра.

Ось $ЮZ$ стержня S_4 перпендикулярна къ оси K воугъ ϕ уголъ (см. черт. 99), составляемый направлениемъ $Z_{ю}$, буквою α — уголъ, составляемый плоскостью съ плоскостью $Z'ЮX'$ и буквою ψ — уголъ, составленный плоскостью $Z'ЮZ$ съ плоскостью $Z'_4ЮZ$. По известнымъ формуламъ тригонометріи, примененнымъ къ сферическому треугольнику, въ которомъ дуга Z'_4Z заключаетъ 90° , получимъ:

$$\cos \phi_4 = \sin \phi \cos \psi, \dots$$

$$\sin (\alpha - \alpha_4) = \frac{\sin \psi}{\sin \phi_4}, \quad \cos (\alpha - \alpha_4) = -$$

изъ послѣднихъ двухъ равенствъ выведемъ слѣдующее

$$\sin \phi_4 \cos \alpha_4 = \sin \psi \sin \alpha - \cotg \phi \cos \alpha$$

а отсюда, на основаніи перваго (885), получимъ:

$$\sin \phi_4 \cos \alpha_4 = \sin \psi \sin \alpha - \cos \psi \cos \alpha$$

На стержнѣ S нарезана лѣвоинтовая винтъ, шагъ h ; тѣло V просверлено насквозь и въ отверстіи нарезана

которые, по исключении изъ нихъ x и ψ , дадутъ производимой разсмотрѣннымъ нами механизмомъ

7) Если въ предположенъ механизмъ высота x равна нулю, такъ что тѣло V можетъ свободно вращаться по точна O должна оставаться въ совпаденіи съ осью YOZ стержня S_4 , то въ этомъ случаѣ x постояненъ и независимъ, а связь выражается уравненіемъ

Проекція на оси X^{oxy} , Y^{oxy} и Z^{oxy} главного момента (вокругъ O) реакцій этой связи выразятся

$$\begin{aligned} V_x &= 2\lambda(x_c - \kappa v_x) = 2\lambda x_c, \quad V_y = 2\lambda y_c, \\ (\Lambda_c)_x &= 2\lambda(y_c v_z - z_c v_y) \kappa, \quad (\Lambda_c)_y = 2\lambda(z_c v_x - x_c v_z) \kappa, \\ (\Lambda_c)_z &= 2\lambda(x_c v_y - y_c v_x) \kappa; \end{aligned}$$

слѣдовательно, главный векторъ направленъ параллельно осей X и Y , а главный моментъ перпендикуляренъ къ плоскости YOZ и къ направленію главнаго вектора.

§ 131. Примеры рѣшенія вопросовъ движенія тяжелыхъ тѣлъ по плоскостямъ.

Примѣръ 105. Волчокъ на гладкой горизонтальной плоскости.

Подъ волчкомъ подразумѣваемъ тѣло вращающееся симметрично вокругъ оси вращенія инерціи его находится на этой оси; тѣло это симметрично на оси симметріи, которымъ оно описываетъ окружность радиуса ρ .

Ось Z^{oxy} направимъ противоположно направленію OX и положимъ, что остроконечіе находится на сѣченіи въ разстояніи l отъ центра инерціи, такъ что $z_c = -l$.

Аналитическое выраженіе связи, ограничивающаго движеніе твердаго тѣла, въ настоящемъ случаѣ имѣетъ видъ

$$z_c - l v_z \geq 0 \quad \text{или} \quad z_c - l \cos \vartheta \geq 0$$

Задаваемые силы суть силы тяжести; главный моментъ центра инерціи равенъ нулю.

*) Этотъ механизмъ описанъ въ § 201-мъ перваго тома *on Natural Philosophy* Томсона и Тэта.

Далѣе должно поступать подобнымъ же образомъ, какъ и въ вопросѣ параграфа 126-го (стр. 592—605). Не входя въ разсмотрѣніе различныхъ видовъ движенія волчка, ограничимся обзоромъ только нижеслѣдующихъ двухъ видовъ:

а. Въ начальный моментъ ($t=0$) уголъ ϕ имѣетъ величину ϕ_0 *) и волчку сообщена угловая скорость ϖ'_0 вокругъ оси симметріи; начальные значенія угловыхъ скоростей ϕ' , χ' и линейныхъ скоростей x'_c , y'_c , z'_c равны нулю.

Въ этомъ случаѣ постоянныя производныя будутъ имѣть слѣдующія значенія:

$$C_1 = 0, C_2 = 0, r = C_4 = \varpi'_0, C_3 = \mathfrak{C}_c C_4 \cos \phi_0$$

$$2h - \mathfrak{C}_c C_4^2 = 2Mgl \cos \phi_0.$$

Прецессія выразится такъ:

$$\chi' = \frac{\mathfrak{C}_c C_4}{\mathfrak{M}_c} \frac{(\cos \phi_0 - \cos \phi)}{\sin^2 \phi} \dots \dots \dots (894)$$

Исключивъ прецессию изъ (893) и (894), получимъ дифференціальное уравненіе:

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{M}_c + Ml^2 \sin^2 \phi) \sin^2 \phi \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \\ & = (\cos \phi_0 - \cos \phi) \left[2Mgl \sin^2 \phi - \frac{\mathfrak{C}_c^2 C_4^2}{\mathfrak{M}_c} (\cos \phi_0 - \cos \phi) \right] \dots (895) \end{aligned}$$

Уголъ ϕ можетъ имѣть только такія значенія, которыя дѣлаютъ вторую часть этого уравненія положительною. При ϕ меньшемъ ϕ_0 первый множитель второй части меньше, а второй — больше нуля; при $\phi = \phi_0$ первый множитель обращается въ нуль, второй имѣетъ положительную величину; при дальнѣйшемъ возрастаніи ϕ первый множитель становится положительнымъ и второй продолжаетъ оставаться положительнымъ до тѣхъ поръ, пока не обратится въ нуль; а онъ

*) Предполагается, что этотъ уголъ меньше того угла, при которомъ волчокъ касается плоскости своею боковою поверхностью.

здѣсь:

$$b = \frac{2h - M(C_1^2 + C_2^2) - \mathfrak{C}_c C_4^2}{2Mg}, \quad D = \frac{C_4 l}{\mathfrak{C}_c C_4}.$$

Этотъ многочленъ:

$$S_1 = (z_c - b)(l^2 - z_c^2) + nl(D - z_c)^2$$

сходенъ съ многочленомъ $R^3 S$:

$$R^3 S = (z - b)(R^2 - z^2) - F(D - z)^2$$

второй части дифференціального уравненія (835, А) въ вопросѣ параграфа 126-го; разница только въ томъ, что гдѣ во второмъ многочленѣ стоятъ величины z , R , F , тамъ въ первомъ многочленѣ стоятъ величины z_c , l , $(-nl)$.

Вслѣдствіе такого сходства вида многочленовъ S_1 , $R^3 S$, мы можемъ въ занимающемъ насъ теперь вопросѣ прямо воспользоваться результатами, полученными въ концѣ § 126-го; а именно, мы вправѣ заключить слѣдующее:

Для того, чтобы уголъ наклоненія волчка къ вертикальной линіи оставался постоянно равнымъ ϕ_0 во все время движенія, необходимо, чтобы постоянная D имѣла одно изъ двухъ слѣдующихъ значеній:

$$\frac{D - (z_c)_0}{l^2 - (z_c)_0^2} = \frac{1}{2(z_c)_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2(z_c)_0}{nl}} \right),$$

тогда ось Z будетъ совершать постоянную прецессию, имѣющую одну изъ двухъ слѣдующихъ величинъ:

$$\mathcal{M}_1' = \frac{l \mathfrak{C}_c C_4}{2 \mathfrak{M}_c (z_c)_0} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2(z_c)_0}{nl}} \right) \dots \dots (897, a)$$

$$\mathcal{M}_2' = \frac{l \mathfrak{C}_c C_4}{2 \mathfrak{M}_c (z_c)_0} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2(z_c)_0}{nl}} \right) \dots \dots (897, b)$$

Если вращеніе волчка вокругъ оси Z настолько быстро, что можно пренебречь квадратами и высшими степенями отношенія $(2(z_c)_0 : nl)$, то, разложивъ корень по восходящимъ степенямъ этого отношенія и отбросивъ высшія степени, получимъ слѣдующія приближенныя выраженія для \mathcal{M}_1' и \mathcal{M}_2' :

$$\mathcal{M}_1' = \frac{l \mathfrak{C}_c C_4}{2 \mathfrak{M}_c (z_c)_0} - \frac{Mlg}{\mathfrak{C}_c C_4}; \quad \mathcal{M}_2' = \frac{Mgl}{\mathfrak{C}_c C_4} \dots \dots (898)$$

датель, а интегралъ, выражающій законъ живой с
дующій видъ:

$$M(R \cos \phi - H \sin \phi)^2 (\dot{\phi})^2 + \mathcal{M}_c \left[(\dot{\phi})^2 \sin \phi \right. \\ \left. = 2h_1 - Mg(R \sin \phi + H \right.$$

Исключивъ отсюда и изъ интеграла (891) п
слѣдующее дифференціальное уравненіе для с
между ϕ и t :

$$\left[\mathcal{M}_c + M(R \cos \phi - H \sin \phi)^2 \right] \dot{\phi} \\ = (2h_1 - \mathcal{C}_c C_4^2 - Mg(R \sin \phi + H \cos \phi)) \dot{\phi}$$

Въ этомъ примѣрѣ ограничимся рассмотрѣ
женій цилиндра, которыя не сопровождаются п

Для того, чтобы ϕ было постоянно равно ϕ_0
все время движенія было: $\dot{\phi} = 0$, $\ddot{\phi} = 0$, а с
при этихъ условіяхъ дифференціальныя уравнен

$$M\ddot{\phi} = -Mg + \lambda, \quad \mathcal{M}_c \ddot{\phi} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \lambda (R \cos \phi - H \sin \phi)$$

обратятся въ слѣдующія равенства:

$$Mg = \lambda, \quad \mathcal{M}_c (\dot{\phi})^2 \sin \phi_0 \cos \phi_0 - \mathcal{C}_c C_4 \dot{\phi} \sin \phi_0 - \lambda$$

исключивъ изъ нихъ λ , получимъ уравненіе, с
между $\dot{\phi}$ и ϕ_0 ; это уравненіе даетъ двѣ велич

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{C}_c C_4}{\mathcal{M}_c \cos \phi_0} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4 M \mathcal{M}_c g \cos \phi_0}{\mathcal{C}_c^2 C_4^2 \sin \phi_0}} (R \cos \phi_0 - H \sin \phi_0) \right)$$

Если проеція центра пверціи на плоско
скорость точки прикосновенія (ξ_0 , η_0 , ζ_0) реб
тальной плоскостью перпендикулярна къ рад
точку съ точкою (x_c , y_c , 0) и величина скор
здѣсь

$$\rho_0 = R \cos \phi_0 - H \sin \phi_0, \quad \dot{\phi} = C_4$$

Примѣръ 107-й. Однородное тяжелое тве
поверхностью вращенія, опирается на плоско
угломъ J къ горизонту.

Примѣръ 108-й. Движеніе тяжелаго однороднаго шара по наклонной негладкой плоскости; принять въ расчетъ треніе между шаромъ и плоскостью.

Въ этомъ случаѣ выраженіе связи принимаетъ весьма простой видъ $x_c = l$, гдѣ l есть величина радіуса шара; реакція плоскости направлена къ центру шара и моментъ ея вокругъ центра равенъ нулю.

Треніе между шаромъ и плоскостью приложено къ точкѣ прикосновенія шара къ плоскости и заключается въ этой плоскости; означимъ черезъ F_x и F_y проэкціи его на оси координатъ; проэкціи на оси X^{000} , Y^{000} и Z^{000} момента (вокругъ C) этой силы выразятся такъ:

$$(L_c)_x = lF_y, (L_c)_y = -lF_x, (L_c)_z = 0.$$

Составимъ дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = Mg \sin J + F_x, M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = F_y, 0 = -Mg \cos J + \lambda$$

и дифференціальныя уравненія вращенія шара вокругъ центра инерціи (формулы (867):

$$\frac{2}{5} M r^2 \frac{dP}{dt} = lF_y, \frac{2}{5} M r^2 \frac{dQ}{dt} = -lF_x, \frac{2}{5} M r^2 \frac{dR}{dt} = 0,$$

гдѣ P , Q , R суть проэкціи угловой скорости на неподвижныя оси координатъ.

Последнее изъ этихъ уравненій интегрируется непосредственно даетъ

$$R = C_1; \dots \dots \dots (901)$$

изъ остальныхъ же четырехъ, исключивъ F_x и F_y , получимъ два дифференціальныя уравненія, которыя тоже интегрируются и даютъ слѣдующіе интегралы:

$$\frac{dx_c}{dt} + \frac{2}{5} lQ = g t \sin J + C_2, \frac{dy_c}{dt} - \frac{2}{5} lP = C_3 \dots (902)$$

Такимъ образомъ, не опредѣливъ еще вида выраженій для силъ F_x , F_y , мы имѣемъ возможность получить три интеграла дифференціальныхъ уравненій движенія. Для дальнѣйшаго же рѣшенія вопроса необходимъ условиться относительно того, какъ выражается величина силы тренія.

Въ § 46-мъ на стр. 219 были приведены законы, которымъ, какъ предполагается, слѣдуетъ треніе между матеріальною точкою, давящею на поверхность, и поверхностью; мы предположимъ, что эти законы примѣняются и къ разсматриваемому нами вопросу, хотя здѣсь треніе

интегрируя, найдемъ:

$$x_c = \frac{5g \sin J}{7} \frac{t^2}{2} + at + a, y_c = \beta t + b$$

гдѣ a и b суть начальныя значенія координатъ центра инерціи, а a и β начальныя значенія проекцій скорости центра инерціи $U^{\text{осн}}$.

Слѣдовательно, когда шаръ катится безъ скольженія инерціи его описываетъ параболу, плоскость которой клонной, плоскости, а ось параллельна оси $X^{\text{осн}}$; ускореніе равно не $g \sin J$, но $\frac{5}{7}$ этой величины.

Изъ полученныхъ выраженій (903) найдемъ:

$$lQ = a + \frac{5}{7}gt \sin J, lP = -\beta, F_x = -\frac{2}{7}Mg \sin J$$

слѣдовательно $F = \frac{2}{7}Mg \sin J$; но съ другой стороны, точка K равна нулю, тогда треніе не должно быть (потому катаніе шара по наклонной плоскости безъ скольженія возможно только при томъ условіи, чтобы $\frac{2}{7} \sin J$ было не больше $\frac{1}{2}k$, т. е., чтобы $\tan J$ былъ не больше $\frac{1}{2}k$). Шаръ не можетъ катиться по наклонной плоскости безъ скольженія, если уголъ наклона больше $\arctg(\frac{1}{2}k)$.

Чтобы вполне опредѣлить движеніе тѣла, надо имѣть дифференціальныя уравненія:

$$\varphi' \cos \varphi \sin \phi - \phi' \sin \varphi = -\frac{\beta}{t} = F$$

$$\varphi' \sin \varphi \sin \phi + \phi' \cos \varphi = \frac{a}{t} + \frac{5}{7}g$$

$$\varphi' \cos \phi + \varphi' = C_1 = R_0.$$

б) Когда шаръ скользитъ по плоскости, тогда проеціи на оси $X^{\text{осн}}$ и $Y^{\text{осн}}$ выражаются такъ:

$$F_x = -kMg \cos J \cos(\omega_K, X), F_y = -kMg \cos J \sin(\omega_K, X).$$

Эти выраженія должно подставить въ первыя два дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи, причеъ величины ω_K исключить при посредствѣ интеграловъ (902). Получимъ окончательныя уравненія:

$$x_c'' = g \sin J - \left(x_c' - \frac{5}{7}gt \sin J - \frac{5}{7}C_2\right)^2$$

$$y_c'' = -\left(y_c' - \frac{5}{7}C_3\right) \frac{k g \cos J}{\frac{2}{7}\omega_K},$$

до этого момента центр инерции шара будет совершать параболическое движение по закону:

$$x_c = a + at + (\sin J + k \cos J) \frac{gt^2}{2}, \quad y_c = \beta t + b,$$

причем проекция угловой скорости на оси X^{osz} и Z^{osz} будут оставаться постоянными, а проекция угловой скорости на ось Y^{osz} будет уменьшаться по следующему закону:

$$Q = Q_0 - \frac{5}{2} \frac{k \cos J}{1} gt; \quad (P = P_0, R = R_0).$$

Во время этого движения сила трения направлена параллельно положительному направлению оси X^{osz} и имеет величину: $Mkg \cos J$.

В момент $t = t_1$ направление силы трения изменяется в противоположное и начинается новое движение, при котором начальная скорость w_K равна нулю.

Если $\operatorname{tg} J$ меньше $\frac{7}{2} k$, то новое движение будет катанием шара без скольжения, причем сила трения будет направлена параллельно отрицательной оси X^{osz} и будет равна $\frac{2}{7} Mg \sin J$.

Если же $\operatorname{tg} J$ больше $\frac{7}{2} k$, то движение центра шара после момента t_1 станет совершаться по следующему закону:

$$x_c = a + at + \frac{g \sin J}{2} t^2 + \frac{gk \cos J}{2} (4tt_1 - 2t_1^2 - t^2), \quad y_c = b + \beta t,$$

а вращение шара будет совершаться так:

$$P = P_0, \quad Q = Q_0 + \frac{5}{2} kg \cos J (t - 2t_1), \quad R = R_0;$$

при этом величина силы трения равна $kMg \cos J$, а направление ее параллельно отрицательной оси X^{osz} .

Перейдем теперь к тем случаям, в которых начальное значение скорости y'_c не равно нулю.

Чтобы составить интегралы дифференциальных уравнений (904), воспользуемся тем обстоятельством, что вопрос о движении тяжелой материальной точки по шероховатой наклонной плоскости сводится к вопросу о движении свободной материальной точки при действии на нее постоянной силы и сопротивления среды, имеющего постоянную величину; на основании этого замечания, приведенного уже в примѣрѣ 28-м на стр. 221-й, мы получим интегралы дифференциальных уравнений (904) в видѣ формулъ страницы 144-й (задача 13), если замѣнимъ въ нихъ: g — величиною $\frac{2}{7} g \sin J$, k — величиною $\frac{7}{2} k \cotg J$; кромѣ того, надо предположить, что постоянная сила действует по оси X^{osz} ,

переменная η непрерывно убывает, если наче-
жательное; это лучше всего видно изъ слѣдующ

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{2}{7} \frac{\eta}{v_{\mu}} g \sin J$$

Непрерывно-убывающая переменная η при $\kappa > 1$, то, какъ видно изъ равенства (905, а), въ моментъ $t = -T_1$, если же $\kappa < 1$, то прибли-
жается безъ конца.

Если $\kappa > 1$, т. е. $\operatorname{tg} J < \frac{7}{2} k$, то при $t = -$
въ нуль, скорость точки K тоже обратится в
формулы (905, b), причемъ координаты центра
ныя значенія a_2 и b_2 (эти значенія получимъ
если сдѣлаемъ въ нихъ t равнымъ $-T_1$, а η р
съ момента $t = -T_1$ шаръ начнетъ катиться
безъ скольженія (см. а).

Если $\kappa < 1$, т. е. $\operatorname{tg} J > \frac{7}{2} k$, то, по мѣрѣ
нечности и приближенія η къ нулю, скорость
стать до бесконечности, какъ видно изъ (905, b)
видно, что x_0 и y_0 тоже возрастаютъ неогранич

Примѣръ 109. Движеніе тяжелаго однород
тальной шероховатой плоскости.

Дифференціальныя уравненія движенія отъ
предыдущаго примѣра тѣмъ, что теперь $\sin J =$

Интегралы (901), (902) въ настоящемъ случ

$$R = R_0, x'_0 + \frac{2}{5} lQ = C_2, y'_0 - \frac{2}{5}$$

Начнемъ со случаевъ:

(б), когда шаръ скользятъ по плоскости. Диф
(904) при $J = 0$ получаютъ слѣдующій видъ:

$$x''_{\mu} = -kg \frac{x'_{\mu}}{v_{\mu}}, y''_{\mu} = -k$$

изъ нихъ слѣдуетъ:

$$\frac{x'_{\mu}}{x'_{\mu}} = \frac{y'_{\mu}}{y'_{\mu}};$$

интегрируя это уравненіе два раза, найдемъ:

$$x'_{\mu} = y'_{\mu} \operatorname{tg} \varphi_0, x_{\mu} - a = (y_{\mu} -$$

т. е. точка μ движется прямолинейно.

здѣсь:

$$\alpha_1 = \frac{5}{7} (\alpha + \frac{2}{5} l Q_0) = \frac{5}{7} C_2 = kg(t_2 - t_1),$$

$$a_1 = a + \frac{2 (\alpha - l Q_0) (6\alpha + l Q_0)}{49 kg}.$$

Когда шаръ катится безъ скольженія, треніе равно нулю.

Если $\beta = 0$, то движеніе центра шара совершается по прямой линіи; сначала это движеніе равнозамедленное, а, начиная съ момента t_1 шаръ катится равномерно; если Q_0 есть величина отрицательная и α_1 менѣе нуля, то равномерная часть движенія совершается въ обратномъ направленіи.

§ 132. Дифференціальныя уравненія движенія твердаго тѣла, имѣющаго менѣе пяти степеней свободы.

Дифференціальныя уравненія движенія твердаго тѣла, связаннаго нѣсколькими связями:

$$\varphi_1(x_0, y_0, z_0, \phi, \theta, \varphi) = 0,$$

$$\varphi_2(x_0, y_0, z_0, \phi, \theta, \varphi) = 0,$$

.....

могутъ быть получены на тѣхъ же основаніяхъ, какъ и въ параграфѣ 129-мъ; во вторыхъ частяхъ этихъ шести уравненій будетъ заключаться столько множителей $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, сколько связей подчинено тѣло. Если число связей менѣе шести, то, исключивъ эти множители, получимъ столько дифференціальныхъ уравненій, сколько тѣло имѣетъ степеней свободы.

§ 133. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки.

Твердое тѣло, одна изъ точекъ котораго неподвижна (назовемъ эту точку — точкою O), связано тремя связями:

$$x_0 = \text{постоянн.}, \quad y_0 = \text{постоянн.}, \quad z_0 = \text{постоянн.}$$

и имѣетъ три степени свободы.

состоитъ въ томъ, что теперь центромъ моментовъ силъ служить точка $Ю$, а осями Ξ , Υ , Z — главные оси инерціи тѣла въ этой точкѣ $Ю$, между тѣмъ, какъ при составленіи уравненій (762) центромъ моментовъ силъ служилъ центръ инерціи тѣла, а осями Ξ , Υ , Z — главные центральныя оси инерціи тѣла.

По причинѣ такого сходства, нижеслѣдующіе два вопроса могутъ быть рѣшены такъ, какъ показано въ §§ 120 и 126.

Примѣръ 110. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки, если главный моментъ (вокругъ этой точки) приложенныхъ силъ равенъ нулю.

Въ этомъ случаѣ дифференціальныя уравненія (906, bis) получаютъ слѣдующій видъ:

$$\mathcal{A}_\infty \frac{dp}{dt} = (\mathcal{B}_\infty - \mathcal{C}_\infty)qr, \quad \mathcal{B}_\infty \frac{dq}{dt} = (\mathcal{C}_\infty - \mathcal{A}_\infty)rp,$$

$$\mathcal{C}_\infty \frac{dr}{dt} = (\mathcal{A}_\infty - \mathcal{B}_\infty)pq;$$

а потому вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки совершается по тому же закону, по какому свободное твердое тѣло вращается по инерціи вокругъ своего центра инерціи; разница только въ томъ, что теперь, вмѣсто главныхъ центральныхъ моментовъ инерціи \mathcal{A}_c , \mathcal{B}_c , \mathcal{C}_c , будутъ входить моменты инерціи \mathcal{A}_∞ , \mathcal{B}_∞ , \mathcal{C}_∞ твердаго тѣла вокругъ главныхъ осей инерціи въ неподвижной точкѣ $Ю$.

Примѣръ 111. Центръ инерціи C твердаго тѣла не совпадаетъ съ неподвижною точкою $Ю$; эллипсоидъ инерціи для точки $Ю$ есть эллипсоидъ вращенія вокругъ оси $ЮС$; движеніе тѣла подѣ вліяніемъ силы тяжести.

Возьмемъ ось $Z^{\text{вп}}$ по направленію силы тяжести, а за ось Z примемъ ось симметріи $ЮС$; означимъ черезъ l разстояніе центра инерціи отъ точки $Ю$.

Потенціалъ силъ тяжести, приложенныхъ ко всѣмъ элементамъ тѣла, выразится такъ:

$$U = g \iiint \sigma r dO = Mgs_c = Mlg \cos \phi;$$

то выражение совершенно сходно съ выраженіемъ (810); различіе заключается только въ томъ, что тамъ косинусъ помноженъ на Δk , а здесь — на Mlg , поэтому все сказанное въ § 126-мъ примѣняется въ настоящему примѣру съ надлежащею замѣною величинъ Δk , \mathcal{M}_c — величинами Mlg , \mathcal{M}_c .

Между прочимъ можемъ замѣтить, что если ω будетъ равно нулю, ось Z будетъ совершать то же самое движеніе, какое совершаетъ ось математическаго маятника, имѣющаго слѣдующую длину:

$$R = \frac{\mathcal{M}_{cg}}{Mlg} = \frac{\mathcal{M}_c}{Ml} + l, \dots \dots \dots (907)$$

формулы (837) параграфа 126-го.

Примѣръ 112. Центръ инерціи тѣла неподвиженъ; масса его имѣетъ симметрію (Z) и перпендикулярную къ ней плоскость симметріи (плоскость XY). Тѣло притягивается по закону тяготѣнія однороднымъ неподвижнымъ шаромъ массъ M_1 , центръ котораго находится на отрицательной оси Z^{oxy} въ весьма большомъ разстояніи L отъ центра инерціи притягиваемаго тѣла. Имѣется въ виду пренебрегать четвертыми и высшими степенями отношеній между размѣрами тѣла и разстояніемъ L . См. въ примѣрѣ 103-мъ, стр. 582 — 583).

Изъ формулъ (814 bis) и (821) слѣдуетъ, что силы притяженія, приложенныя къ первому тѣлу, имѣютъ слѣдующій потенціалъ:

$$U = \epsilon M_1 \left(\frac{M}{L} + \frac{\mathcal{G}_c - \mathcal{M}_c - 3(\mathcal{G}_c - \mathcal{M}_c) \cos^2 \phi}{2L^3} \right),$$

къ какъ въ настоящемъ случаѣ:

$$\mathcal{M}_c = \mathcal{B}_c, \lambda = \lambda_z, \mu = \mu_z, \nu = \nu_z = \cos \phi.$$

По формуламъ (818) стр. 585 мы найдемъ, что проекціи на оси x^{oxy} , y^{oxy} и z^{oxy} главнаго момента притяженій (вокругъ O) равны:

$$L_x = -\frac{3\epsilon M_1}{L^3} (\mathcal{G}_c - \mathcal{M}_c) \nu_y \nu_z, \quad L_y = \frac{3\epsilon M_1}{L^3} (\mathcal{G}_c - \mathcal{M}_c) \nu_z \nu_x, \quad L_z = 0;$$

по формуламъ (817) стр. 585 или (819) проекціи того же момента на X , Y , Z равны:

$$L_x = \frac{3\epsilon M_1}{L^3} (\mathcal{G}_c - \mathcal{M}_c) \mu_z \nu_z, \quad L_y = -\frac{3\epsilon M_1}{L^3} (\mathcal{G}_c - \mathcal{M}_c) \nu_z \lambda_z, \quad L_z = 0.$$

Такъ какъ проекція главнаго момента то проекція на ту же ось главнаго момента имѣетъ постоянную величину; даѣе, та мента силъ на ось Z равна нулю, то 1 уравненій (906, б) дастъ: $r = \text{постоянна}$ случай имѣетъ мѣсто законъ живой силы. слѣдующіе три интеграла:

$$M_0 \kappa' \sin^2 \varphi + G_0 \omega \cos \varphi =$$

$$M_0 [(\dot{\varphi})^2 + (\kappa')^2 \sin^2 \varphi] = 2h_1 -$$

Дальнѣйшее рѣшеніе этого вопроса мы же методу, который примѣняютъ въ § 12 ніями.

Къ числу тѣхъ движеній, которыя мы при условіяхъ данныхъ въ этомъ примѣрѣ сопровождаемы нутаціею. При данномъ скорости ω возможны два такіа движенія,

$$n = \left[1 - \frac{12 M_1 M_0 (G_0)}{G_0^2 \omega^2} \right]$$

имѣетъ знакъ положительный; величинами n женіяхъ равны:

$$\kappa'_1 = \frac{G_0 \omega}{2 M_0 \cos \varphi} (1 + \sqrt{n}); \quad \kappa'_2$$

§ 134. Общій взглядъ на тѣ симметріи тѣла совершаетъ постоян нутаціи.

При изложеніи предыдущихъ примѣ щали вниманіе на тѣ случаи, въ кото тѣла вращенія совершаетъ постоянную въ настоящемъ параграфѣ мы сдѣлаемъ относительно вращеній этого рода.

Положимъ, что масса твердаго тѣла такъ что для всякой точки этой оси эллипсоидъ вращенія вокругъ нея же.

Означимъ черезъ γ уголъ $ZIOG$ (черт. 101, 102), составляемый направлениемъ IOG главнаго момента количества движенія съ осью Z ; положительныя значенія этого угла будемъ также отсчитывать отъ оси IOZ въ ту сторону, гдѣ находится ось IOZ ; изъ вышесказаннаго слѣдуетъ:

$$A_{\infty} \cos \gamma = G_{\infty} \Omega \cos \beta, \quad A_{\infty} \sin \gamma = M_{\infty} \Omega \sin \beta; \quad \dots (909)$$

а отсюда получимъ, во первыхъ, выраженіе для A_{∞} :

$$A_{\infty} = \Omega \sqrt{M_{\infty}^2 \sin^2 \beta + G_{\infty}^2 \cos^2 \beta}, \quad \dots \dots \dots (910)$$

во вторыхъ, выраженіе для $tg \gamma$:

$$tg \gamma = \frac{M_{\infty}}{G_{\infty}} tg \beta \quad \dots \dots \dots (911)$$

и, въ третьихъ, выраженіе для проэкціи главнаго момента количества движенія на направленіе мгновенной оси:

$$A_{\infty} \cos (\gamma - \beta) = \Omega I, \quad I = M_{\infty} \sin^2 \beta + G_{\infty} \cos^2 \beta \dots (912)$$

Такъ какъ величины угловой скорости Ω и угла β — постоянны, то изъ выраженій (910) и (911) слѣдуетъ, что главный моментъ количества движенія долженъ имѣть постоянную величину (означимъ эту постоянную черезъ G) и долженъ составлять постоянный уголъ γ съ осью Z .

Кромѣ того, изъ равенства (911) видно, что:

$\gamma < \beta$, если $G_{\infty} > M_{\infty}$, т. е. если эллипсоидъ инерціи — сжатый по оси вращенія (черт. 102); напротивъ:

$\gamma > \beta$, если $M_{\infty} > G_{\infty}$, т. е. если эллипсоидъ инерціи растянутъ по оси вращенія (черт. 101).

Дифференціальныя уравненія вращенія тѣла вокругъ неподвижной точки:

$$\frac{d(A_{\infty})_x}{dt} = (L_{\infty})_x, \quad \frac{d(A_{\infty})_y}{dt} = (L_{\infty})_y, \quad \frac{d(A_{\infty})_z}{dt} = (L_{\infty})_z$$

выражаютъ, что скорость точки, описывающей годографъ главнаго момента количества движенія, равна и параллельна главному моменту силъ, приложенныхъ къ тѣлу (сравн. § 96 стр. 456).

плоскость $ZЮZ$ вращалась бы вокруг оси $Z^{орт}$ съ постоянною угловою скоростью \mathcal{J}' , необходимо, чтобы:

главный моментъ $L_{ю}$ силъ, приложенныхъ къ тѣлу, былъ направленъ по линіи $ЮN$ параллельно скорости точки, описывающей подографъ количества движенія,

и чтобы главный моментъ $L_{ю}$ этихъ силъ имѣлъ величину постоянную и равную (914) или:

$$L_{ю} = \mathcal{C}_{ю} \mathcal{J}' \sin \phi + (\mathcal{C}_{ю} - \mathcal{A}_{ю}) (\mathcal{J}')^2 \sin \phi \cos \phi. \dots (914, \text{bis})$$

§ 135. Условіе, потребное для измѣненія направленія оси симметріи тѣла, вращающагося по инерціи вокругъ этой оси.

Представимъ себѣ твердое тѣло, имѣющее неподвижную точку $Ю$ и имѣющее ось симметріи $ЮZ$, проходящую черезъ ту же точку, такъ что моменты инерціи этого тѣла вокругъ всѣхъ экваторіальныхъ осей, проходящихъ черезъ точку $Ю$, равны между собою.

Пусть это тѣло вращается по инерціи вокругъ оси $ЮZ$ съ угловою скоростью ω ; если къ тѣлу не приложено никакихъ силъ, то направленіе оси Z остается неизмѣннымъ въ пространствѣ.

Требуется опредѣлить, какую силу надо приложить къ точкѣ K , находящейся на оси Z въ разстояніи l отъ точки $Ю$, для того, чтобы сообщить этой оси данную угловую скорость въ данной плоскости.

Примемъ за ось $ЮZ$ какое либо направленіе въ этой плоскости, а эту самую плоскость возьмемъ за плоскость $ZЮX$; слѣдовательно, \mathcal{J} будетъ равно нулю, а такъ какъ ось $ЮZ$ должна оставаться въ плоскости $ZЮX$, то \mathcal{J}' и \mathcal{J}'' тоже должны быть равны нулю. Силу, приложенную къ точкѣ K , разложимъ на три составляющія: на составляющую R по направленію $ЮK$, на составляющую Φ по направленію, проведенному изъ точки K въ плоскости $ZЮX$ перпендикулярно къ $ЮK$ (въ сторону возрастающаго ϕ), и на составляющую $У$ параллельно оси $У^{орт}$.

Возьмемъ Лагранжевы уравненія (769) стр. 548 и примѣнимъ ихъ къ настоящему случаю, положивъ: $\mathcal{B}_{ю}$ равнымъ $\mathcal{A}_{ю}$, \mathcal{J} , \mathcal{J}' и \mathcal{J}''

Моментъ инерціи стержня =

$$\text{больша} = 331,11(2^2 + \frac{3}{4} \cdot 1^2)$$

$$\text{пластинки} = 5,06 \cdot \frac{1}{2}(1^2 + 0)$$

Моментъ инерціи всего тѣла

Пусть это тѣло вращается 1
то въ секунду, такъ что:

$$\omega = 2\pi \cdot 100 \frac{1}{\text{секунд}}$$

Спрашивается, какую силу
Ю неподвижна) для того, чтобы
оборотовъ въ минуту; по предм.
равна

$$= \mathfrak{G} \frac{\omega}{r} \phi = 1575,$$

$$= 345$$

Полагая $g = 981 \frac{\text{сант.}}{(\text{сек.})^2}$,
335560 динамъ; слѣдовательно

Если точка К будетъ уд.
при возрастаніи угла ϕ , эта
ніе на плоскость по направ.
при уменьшеніи угла ϕ , — да
ной оси $Y^{орт}$; величина давлен

Въ существованіи такого ,
при помощи слѣдующаго прибора

Твердое тѣло, изображенное
цахъ оси симметріи по одному в
леніями тѣло вставлено между о
(черт. 104), винченнхъ въ к
ченъ или вдѣланъ небольшою ш

Тѣло приводится въ быст
шнурка съ петлею на концѣ.

Этотъ приборъ служить главнымъ образомъ для показанія прецессіональной части движенія быстро вращающагося тѣла. Для этого поступаютъ такъ: уравниваютъ противовѣсъ G съ кольцомъ RR ; затѣмъ, помощью шнура, сообщаютъ тѣлу M быстрое вращательное движеніе вокругъ его оси симметріи; если теперь передвинуть противовѣсъ G ближе къ муфтѣ N и, закрѣпивъ его винтомъ g въ новомъ положеніи, предоставить снарядъ самому себѣ, то замѣчается слѣдующее: послѣ нѣсколькихъ порывистыхъ колебаній, стержень SS приметъ нѣкоторое наклонное положеніе къ горизонту и вмѣстѣ съ вилкою V и стержнемъ PP получить вращательное движеніе вокругъ вертикальной оси этого послѣдняго; это прецессіональное движеніе тѣмъ медленнѣе, чѣмъ быстрѣе вращеніе тѣла M вокругъ его оси симметріи и чѣмъ меньше передвинуть противовѣсъ G ; если противовѣсъ G передвинуть въ противоположную сторону, далѣе отъ муфты, то получится прецессіональное движеніе противоположнаго знака.

Приборъ Фуко есть ни что иное, какъ снарядъ, описанный въ предыдущемъ параграфѣ и изображенный на чертежѣ 104-мъ; на кольцо, надъ однимъ изъ винтовъ A или B , сдѣлано коническое углубленіе, изображенное точкою y на чертежѣ 104-мъ; этимъ углубленіемъ кольцо накладывается на остріе какого либо заостреннаго вертикальнаго стержня, прикрѣпленнаго къ тяжелой подставкѣ.

Если тѣло M не вращается, то, при наложеніи кольца RR углубленіемъ y на остріе стержня, придется поддерживать кольцо рукою, чтобы оно не упало; если же тѣлу M предварительно сообщено быстрое вращеніе вокругъ его оси симметріи, то можно отнять руку и кольцо не упадетъ, а будетъ вращаться на остріѣ, совершая прецессіональное движеніе тѣмъ медленнѣе, чѣмъ быстрѣе вращается тѣло M .

Если тѣло M вращается вокругъ оси AB (черт. 106) въ сторону, означенную оперенною стрѣлкою, то прецессія оси AB будетъ совершаться въ сторону, означенную неоперенною стрѣлкою BN . Въ самомъ дѣлѣ, сила тяжести сообщаетъ точкѣ B движеніе по направленію BG , а, слѣдовательно, тѣлу M и кольцу RR угловую скорость вокругъ оси AU ; какъ только это движеніе начнетъ зарождаться

Эти кривыя отличаются отъ теоретически
ныхъ на чертежахъ 93 а, 94 а, 95 а, 92 а,
изъ послѣднихъ заключается между двумя ко
тогда какъ первыя имѣютъ видъ спиралей вслѣд
ство волчка отъ сопротивленія воздуха.

Кривыя эти получены при слѣдующихъ :

Когда волчокъ не вращается и стоитъ
нельзя его изъ положенія равновѣсія толчкомъ
часть стержня AB , приведемъ волчокъ въ
тождественное съ качаніемъ простаго мата
вертикальной плоскости; при этомъ остріе
копченной бумагѣ прямую линію, а разма
вслѣдствіе сопротивленія воздуха и тренія о
передъ сообщеніемъ толчка, волчку было со
вкругъ оси AB , то остріе будетъ чертить кр
вую на чертежѣ 108; соответствующая же
изображена на чертежѣ 93 а.

Если ось AB вращающагося волчка
скорость вкругъ вертикальной оси въ сторону
получатся кривыя вида, изображеннаго на че
94, а), или вида, изображеннаго на чертежѣ
92, а); если же ось AB сообщена угловая
противоположную, то остріе чертитъ кривыя т
112 и 113 (сравнить черт. 96, а). Если волчокъ
отклонено за остріе B и затѣмъ пущено безъ
лучится одна изъ кривыхъ вида, изображен
(сравнить чертежъ 95, а).

Если волчку сообщена значительная ско
рость симметрія и ось его AB отклонена отъ
острія вычерчиваетъ спираль съ зазубринами
чертѣ 114-ю; подобныя же спирали вычерчи
оси и въ приборахъ Фесселя и Фуко.

гдѣ ξ_0, η_0, ζ_0 суть относительныя координаты движущагося тѣла.

Для примѣра, рассмотримъ вопросъ о такъ названномъ вращеніи.

Примѣръ 112. Твердое однородное тѣло, ось вращенія, имѣетъ неподвижную точку на о инерціи его не совпадаетъ съ неподвижною точкою поверхности, на которую опирается наружная поверхность тѣла, такова, что точка взаимнаго прикосновенія дѣлится въ постоянномъ разстояніи R отъ неподвижной точки, что движущееся тѣло подвержено дѣйствію. Обратитъ вниманіе на тѣ случаи, въ которыхъ дѣло определено вполнѣ.

При заданномъ условіи, нѣкоторый опредѣленіи вращающагося тѣла прикасается къ периметру нѣ неподвижной фигуры, образуемой пересѣченіемъ ности со сферою радіуса R ; пусть ρ есть радіусъ n а ζ_0 — разстояніе его плоскости отъ точки $Ю$; (ρ чимъ черезъ β величину угла, подъ которымъ радіу $Ю$ ($\rho = R \sin \beta$, $\zeta_0 = R \cos \beta$). Условимся обозначать Q , а сферическую кривую — буквою S .

Прежде всего выразимъ условіе взаимнаго касанія кривыхъ. Проведемъ сферу радіуса равна центромъ точку $Ю$; означимъ черезъ Z, Z и K пересѣченія этой сферы осями $ЮZ$ (направлена радіусомъ, проведеннымъ изъ $Ю$ къ точкѣ прикосновенія кривыхъ; пусть φ и ψ суть сферическія координаты

$$\varphi = f(\psi) \dots \dots$$

— уравненіе конической поверхности, вершиною и $Ю$, а направляющею — периметръ неподвижной и

Такъ какъ дуга KZ постоянно равна β , то (с

$$\cos \beta = \cos \varphi \cos \vartheta + \sin \varphi \sin \vartheta \cos$$

кромѣ того, дуга ZK должна быть ортогональною $K\sigma$ (черт. 115), образуемой пересѣченіемъ со сферою; это выразится такъ:

$$\frac{d\varphi}{\sin \varphi d\psi} = \tan \psi, \dots$$

Взявъ производную отъ (917, bis) по t и принявъ во вниманіе равенство (918, bis), будемъ имѣть:

$$x_0 v'_x + y_0 v'_y + z_0 v'_z = 0;$$

замѣнивъ производныя отъ косинусовъ ихъ выраженіями по формуламъ (120) стр. 105 кинематической части, получимъ:

$$q(x_0 \lambda_x + y_0 \lambda_y + z_0 \lambda_z) - p(x_0 \mu_x + y_0 \mu_y + z_0 \mu_z) = 0, \quad (919)$$

или:

$$q \xi_0 - p \eta_0 = 0, \quad \dots \dots \dots (919, a)$$

$$\frac{p}{\xi_0} = \frac{q}{\eta_0} \quad \dots \dots \dots (919 b)$$

Это равенство, полученное такимъ образомъ чрезъ однократное дифференцированіе уравненія связи (917, bis) по t , можно получить гораздо проще при помощи слѣдующаго соображенія:

Такъ какъ кругъ Q долженъ всегда касаться къ неподвижной сферической кривой S , то скорость той точки движущагося твердаго тѣла, которою оно прикасается къ кривой S , должна быть либо перпендикулярна къ тому радіусу круга Q , который направляется къ точкѣ прикосновенія, либо равна нулю; поэтому, во всякомъ случаѣ, проекція на ось Z скорости этой точки должна быть нуль, т. е.:

$$\eta_0 p - \xi_0 q = 0.$$

Кромѣ этой формулы (919), которою намъ придется воспользоваться при изслѣдованіи вопроса, мы выведемъ теперь же еще и другія формулы и выраженія, необходимыя намъ для той же цѣли.

а) Изъ равенства (919, a) можемъ прямо заключить, что:

$$\xi_0 \theta_\eta - \eta_0 \theta_\xi = 0, \quad \dots \dots \dots (920)$$

а отсюда видно, что проекціи на оси Ξ , Υ , Z момента реакціи вокругъ точки KO равны:

$$(\Lambda_m)_\xi = -\lambda \eta_0, \quad (\Lambda_m)_\eta = \lambda \xi_0, \quad (\Lambda_m)_z = 0 \quad \dots \dots (921)$$

б) Для опредѣленія множителя λ намъ послужить равенство:

$$\xi_0 \frac{dq}{dt} - \eta_0 \frac{dp}{dt} = p \frac{d\eta_0}{dt} - q \frac{d\xi_0}{dt}, \quad \dots \dots \dots (922)$$

получаемое изъ равенства (919 a) чрезъ дифференцированіе по t .

гдѣ:

$$\frac{d\sigma}{d\psi} = \sqrt{\sin^2 \varphi + (f'(\psi))^2}.$$

е) Дуга ZK (черт. 115) сохраняет постоянную длину и всегда ортогональна къ кривой $K\sigma$, а потому она ортогональна также и къ той кривой линіи, которую описываетъ точка Z , поэтому:

$$\frac{1}{\sin \varphi} \frac{d\varphi}{d\kappa} = \frac{\varphi'}{\kappa' \sin \varphi} = \operatorname{tg} \epsilon_1; \dots \dots \dots (927)$$

но такъ какъ:

$$v^2 = (\varphi')^2 + (\kappa')^2 \sin^2 \varphi,$$

то изъ равенства (927), при помощи формулъ сферической тригонометріи, получимъ:

$$\varphi' = v \sin \epsilon_1 = v \sin \varphi \frac{\sin(\psi - \kappa)}{\sin \beta}, \dots \dots \dots (928)$$

$$\kappa' \sin \varphi = v \cos \epsilon_1 = \frac{v}{\sin \beta} (\cos \varphi \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi \cos(\psi - \kappa)) \dots (929)$$

г) Изъ равенствъ (928) и (929) слѣдуетъ:

$$-\frac{d \cos \varphi}{dt} = v \frac{d\psi}{d\sigma} f'(\psi) \sin \varphi; \dots \dots \dots (930)$$

равенство же (929) можно представить еще такъ:

$$\kappa' \sin^2 \varphi = v (\cos \varphi \sin \beta + \cos \beta \frac{d\psi}{d\sigma} \sin^2 \varphi) \dots (929, a)$$

г) Возьмемъ производную по t отъ $\cos \varphi$, выраженнаго формулою (924); по сравненіи найденнаго такимъ образомъ выраженія съ выраженіемъ (930), получимъ слѣдующую зависимость между $\frac{d\sigma}{dt}$ и v :

$$H \frac{d\sigma}{dt} = v \sin \varphi, \dots \dots \dots (931)$$

гдѣ:

$$H = \sin \varphi \cos(\psi - \kappa) + \frac{\sin \beta \sin \varphi}{f'(\psi)} \frac{d\sigma}{d\psi} \frac{d\left(\sin \varphi \frac{d\psi}{d\sigma}\right)}{d\sigma}.$$

h) Слѣдуетъ замѣтить, что

$$v_0 = \pm R \frac{d\sigma}{dt}.$$

Если вращающееся тѣло скользитъ по !
 правленіе силы тренія противоположно напр-
 точки P , и величина силы равна:

$$F = kN = k \frac{\lambda \rho}{R \sin}$$

гдѣ k — коэффициентъ тренія.

Означимъ черезъ w_0 величину и направ-
 даго тѣла; какъ извѣстно:

$$w_0 \cos(w_0, X) = q\zeta_0 - r\eta_0, \quad w_0 \cos(w_0, Y) =$$

$$w_0 \cos(w_0, Z) = p\eta_0$$

Если w_0 не равна нулю, то проэкціи (
 будутъ:

$$- F \cos(w_0, X), \quad - F \cos$$

а моменты ея вкругъ этихъ осей выразятся

$$\zeta_0 F \cos(w_0, Y), \quad - \zeta_0 F \cos(w_0, X), \quad - \xi_0 F$$

Если же вращающееся тѣло катится и
 скользя, то величина силы F заранее
 случаѣ, она не можетъ быть болѣе kN ; вели-
 чина силы тренія: вдоль ли по скорости v_0 ,
 это можетъ быть опредѣлено только послѣ
 сдѣлается извѣстнымъ.

Во всякомъ случаѣ, если означимъ чер-
 тренія на оси X и Y , то моменты ея вкругъ
 такъ:

$$- \zeta_0 F_\eta, \quad \zeta_0 F_\xi, \quad (\xi_0 F_\eta$$

Дифференціальными уравненіи вращенія (

$$X \frac{dp}{dt} = (X - G)qr - Mgr\mu$$

$$X \frac{dq}{dt} = (G - X)rp + Mgr\lambda$$

$$G \frac{dr}{dt} = \xi_0 F_\eta - \eta_0 F_\xi \dots\dots\dots$$

и что:

$$\xi_0 F_\xi + \eta_0 F_\eta = 0,$$

такъ какъ сила тренія перпендикулярна къ ρ_0 , получимъ:

$$2v_0 \rightarrow (\xi - \eta) \rho^2 \zeta_0 + Mg\gamma (s_0 - \zeta_0 \cos \phi) = \lambda \rho^2 \dots (936)$$

Величину и направление силы тренія можно опредѣлить изъ уравненія (932, c); вторая часть этого уравненія выражаетъ моментъ силы тренія вокругъ оси **Z**, такъ что:

$$\xi \frac{dr}{dt} = \rho_0 F;$$

но $r:\zeta_0 = \Omega:R$, поэтому на основаніи равенствъ (935), (930) получимъ:

$$F = - \frac{\xi Mg\gamma \zeta_0}{2\rho_0^2 + \xi \zeta_0^2} \sin \varphi f'(\psi) \frac{d\psi}{d\sigma} \dots \dots \dots (937)$$

Изъ этого выраженія видно, что сила тренія равна нулю въ тѣхъ мѣстахъ кривой *S*, гдѣ $f'(\psi) = 0$. Въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ $f'(\psi) > 0$, получается отрицательное значеніе для *F*; это означаетъ, что въ этихъ мѣстахъ сила тренія имѣетъ отрицательный моментъ вокругъ оси **Z**. Напротивъ, въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ $f'(\psi) < 0$, сила тренія имѣетъ противоположное направленіе.

Выраженіе (936) послужитъ для того, чтобы опредѣлить, въ какихъ мѣстахъ периметра *S* движущееся тѣло отдѣлится отъ сферической кривой; это будетъ тамъ, гдѣ выраженіе:

$$\lambda \rho_0^2 = \left(2R \frac{\sin \varphi}{H} + (\xi - \eta) \zeta_0 \right) \frac{2\rho_0^2 (Mg\gamma v_0 + h)}{2\rho_0^2 + \xi \zeta_0^2} + \\ + Mg\gamma (s_0 - \zeta_0 v_0) \dots \dots \dots (936, a)$$

обращается въ нуль, переходя отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ.

Съ другой стороны это же самое выраженіе и выраженіе (937) послужатъ для того, чтобы опредѣлить, въ какихъ мѣстахъ движущееся тѣло начнетъ скользить по периметру *S*; это будетъ тамъ, гдѣ абсолютная величина *F* будетъ болѣе $k\mathcal{R}$.

гдѣ верхніе знаки относятся къ случаю катанія круга Q внѣ круга S , нижніе — къ случаю катанія внутренняго.

Изъ соотношеній между синусами угловъ сферическихъ треугольниковъ ZKZ и ZKC (см. чертежъ 118-й) получимъ равенство:

$$\sin \varphi \sin \phi \sin (\kappa - \psi) = \sin \beta \sin \kappa \sin u,$$

съ помощью котораго изъ равенствъ (925) и (930) выведемъ слѣдующее:

$$\frac{d \cos \phi}{dt} = v \sin \kappa \sin u;$$

затѣмъ, изъ равенствъ, приведенныхъ въ концѣ предыдущей страницы, получимъ:

$$v_0 = R \frac{d\sigma}{dt} = \frac{R \sin \alpha}{\sin (\alpha \pm \beta)} v.$$

Вслѣдствіе этого величины $\lambda \rho_0^2$ и F (936, а) (937) выразятся слѣдующими формулами:

$$\lambda \rho_0^2 = \left(\mathfrak{A} \frac{R \sin \alpha}{\sin (\alpha \pm \beta)} + (\mathfrak{E} - \mathfrak{A}) \zeta_0 \right) v^2 \pm$$

$$\pm Mg\gamma \rho_0 (\cos \kappa \sin (\alpha \pm \beta) + \sin \kappa \cos (\alpha \pm \beta) \cos u), \dots (939)$$

$$F = \frac{\mathfrak{E} Mg\gamma \zeta_0}{\mathfrak{A} \rho_0^2 + \mathfrak{E} \zeta_0^2} \sin \kappa \sin u \dots \dots \dots (940)$$

Разсмотримъ случай наружнаго катанія. Означимъ черезъ ω_1 то значеніе, которое имѣетъ v тогда, когда кругъ Q прикасается къ самой верхней точкѣ круга S , т. е., при $\kappa = \pi$, гдѣ $\phi = \alpha + \beta - \kappa$. Взявъ въ формулѣ (939) верхніе знаки, дадимъ ей слѣдующій видъ:

$$\lambda \rho_0^2 = B \cos^2 \frac{u}{2} + A \sin^2 \frac{u}{2},$$

гдѣ:

$$A = D\omega_1^2 + Mg\gamma \rho_0 \sin (\alpha + \beta - \kappa),$$

$$D = \frac{R}{\sin (\alpha + \beta)} (\mathfrak{A} \sin \alpha + (\mathfrak{E} - \mathfrak{A}) \cos \beta \sin (\alpha + \beta)),$$

$$B = D\omega_1^2 - K, \quad K = Mg\gamma \rho_0 (E \sin \kappa + G \sin (\alpha + \beta)),$$

$$E = \frac{2D\varrho_0}{R^2 I} \sin(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta),$$

$$G = \frac{2D\varrho_0}{R^2 I} \sin \kappa - \cos \kappa, \quad R^2 I = 2\varrho_0^2 + \zeta_0^2.$$

Очевидно, A есть величина положительная. Если и B тоже величина положительная, т. е., если $D\omega_1^2$ больше K , то λ будет положительным всяких u ; стало быть кругъ Q тогда нигдѣ не сойдѣтъ съ периметромъ S .

Если же $D\omega_1^2$ меньше K , то λ будетъ имѣть положительныя значенія только для тѣхъ u , которыя не меньше u_1 и не больше $(2\pi - u_1)$, гдѣ u_1 есть уголъ, определяемый равенствомъ:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{u_1}{2} = \frac{K - D\omega_1^2}{A};$$

тому въ такихъ случаяхъ оконечность тѣла будетъ двигаться слѣдующимъ образомъ (см. черт. 119-й): отъ a черезъ b до c кругъ Q катится периметру S , въ точкѣ c онъ отдѣляется отъ S и оконечность тѣла, являясь на свободѣ, описываетъ дугу cfa нѣкотораго круга, имѣющаго центръ на вертикальной линіи OZ , пока опять не приляжетъ къ периметру въ точкѣ a ; затѣмъ катаніе по периметру повторится снова.

Надо еще узнать, вездѣ ли кругъ Q будетъ катиться безъ скольженія по периметру круга S . Чистое катаніе возможно только тамъ, гдѣ мгновенная величина силы F (940) меньше kN . Составимъ выраженіе ости ($kN - F$) или разности:

$$A \sin^2 \frac{u}{2} + B \cos^2 \frac{u}{2} - 2Mg\gamma\varrho_0 C \sin \kappa \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}$$

$$C = \frac{\zeta_0 \sin \alpha}{R I k}$$

представимъ это выраженіе подѣ слѣдующимъ видомъ:

$$A \left(\sin \frac{u}{2} - Mg\gamma\varrho_0 \frac{C}{A} \sin \kappa \cos \frac{u}{2} \right)^2 + \frac{N}{A} \cos^2 \frac{u}{2}, \dots (941)$$

$$N = AB - (Mg\gamma\varrho_0 C \sin \kappa)^2.$$

Легко убедиться, что

$$\sin(\alpha + \beta - \kappa) = E \sin \kappa - G \sin(\alpha + \beta),$$

а потому N выразится такъ:

$$N = (D\omega_1^2 - Mg\gamma\rho_0 G \sin(\alpha + \beta))^2 - (Mg\gamma\rho_0 \sin \kappa)^2 (E^2 + C^2). \quad (942)$$

Изъ выражений (941) и (942) оказывается, что катаніе будетъ совершаться безъ скольженія по всему периметру, если N болѣе нуля, т. е., $D\omega_1^2$ не только болѣе K , но еще и болѣе слѣдующей величины:

$$L = Mg\gamma\rho_0 \left[(\sin \kappa) \sqrt{E^2 + C^2} + G \sin(\alpha + \beta) \right].$$

Если $D\omega_1^2$ болѣе K , но менѣе L , то катаніе будетъ совершаться безъ скольженія только по той части периметра, на которой u не менѣе u_2 и не болѣе $(2\pi - u_2)$, гдѣ u_2 есть уголъ, опредѣляемый равенствомъ:

$$\operatorname{tg} \frac{u_2}{2} = Mg\gamma\rho_0 \frac{C}{A} \sin \kappa + \frac{\sqrt{-N}}{A}.$$

Если $D\omega_1^2$ менѣе K , то уголъ u_2 оказывается больше угла u_1 ; слѣдовательно, отъ u_1 до u_2 и отъ $(2\pi - u_2)$ до $(2\pi - u_1)$ катаніе круга Q по периметру должно сопровождаться скольженіемъ.

Обратимся теперь къ тѣмъ случаямъ, въ которыхъ движущееся тѣло скользитъ по периметру S , не отдѣляясь отъ него.

Предварительно измѣнимъ видъ нѣкоторыхъ предыдущихъ формулъ, а именно тѣхъ, которыя заключаютъ съ собою выраженіе $(p\xi_a + q\eta_a) = \pm \rho_0 \cos(\varphi, \rho_0)$ или $\cos(\varphi, \rho_0)$; этотъ косинусъ равняется (± 1) въ тѣхъ случаяхъ, когда катаніе не сопровождается скольженіемъ, такъ какъ тогда мгновенная ось должна проходить черезъ точку прикосновенія; въ тѣхъ же случаяхъ, когда тѣло скользитъ по периметру S , не отдѣляясь отъ него, угловая скорость ω можетъ быть направлена вдоль по ρ_0 или противоположно ρ_0 , т. е. косинусъ $\cos(\varphi, \rho_0)$ можетъ быть равенъ плюсу единицы или минусъ единицы.

Условимся обозначать произведение: $\omega \cos(\varphi, \rho_0)$ знакомъ ω , причѣмъ будемъ имѣть въ виду, что $\omega = \pm \omega$.

При такомъ условіи:

$$p\dot{\xi}_0 + q\eta_0 = \omega\rho_0,$$

тому формулу (923) слѣдуетъ писать такъ:

$$p'\eta_0 - q'\xi_0 = v_0\omega + r\rho_0\omega - \omega^2\zeta \dots \dots (923, \text{bis})$$

(алге, формула (927) справедлива во всякомъ случаѣ, по формулы) и (929) придется нѣсколько исправить, а именно онѣ должны написаны такъ:

$$\phi' = \omega \sin \varepsilon_1, \dots (928 \text{ bis}), \quad \omega' \sin \phi = \omega \cos \varepsilon_1 \dots (929 \text{ bis})$$

Поэтому въ формулахъ (930), (929, a), (931) величина ϕ должна быть не ϕ величиною ω , а произведение $\lambda\rho_0^2$ выразится такъ:

$$= 2R\omega^2 \frac{\sin \varphi}{H} - 2\omega^2\zeta_0 + 6r\omega\rho_0 + Mg\gamma(z_0 - \zeta_0 \cos \phi). (936, \text{bis})$$

Въ случаяхъ скользящаго дифференціальное уравненію (932, c) будетъ слѣдующій видъ:

$$6 \frac{dr}{dt} = - \rho_0 \frac{F}{\omega_0} (r\rho_0 - \zeta_0\omega), \dots \dots (932, c, \text{bis})$$

*) Величины ϕ' и $\omega' \sin \phi$ можно разсматривать двояко: либо какъ проекціи скорости точки Z (черт. 115 и 120; длина OZ равна единицѣ), какъ проекціи угловой скорости ϕ ; въ первомъ смыслѣ ϕ' выражаетъ проекцію скорости точки Z на координатную ось β полярныхъ координатъ этой точки, а $\omega' \sin \phi$ — проекцію этой скорости на ось γ (на чертежѣ 120-мъ эти двѣ изображены длинами $\overline{Ze_1}$ и $\overline{Zb_1}$); во второмъ смыслѣ ϕ' представляется длиной \overline{OE} , отложенною по направленію ON (когда $\phi' > 0$) или по направленію противоположному (когда $\phi' < 0$), угловая же скорость $\omega' \sin \phi$ представляется длиной \overline{OB} , отложенною по направленію OQ' параллельно и противоположно β (когда $\omega' \sin \phi > 0$) или по направленію OQ , а $\omega' \sin \phi < 0$). Отложимъ отъ точки Z длины \overline{Zb} и \overline{Ze} равныя и параллельныя длинамъ \overline{OB} и \overline{OE} ; діагональ \overline{Zy} прямоугольника, построеннаго этихъ длинахъ, будетъ равна и параллельна ϕ и вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ перпендикулярна къ скорости $\overline{Zy_1}$ точки Z , такъ что сферическій уголъ, т. е. ε_1 , равенъ сферическому углу $(y_1 Z b_1)$.

На чертежѣ 120-мъ изображенъ тотъ случай, когда $\cos(\phi, \rho_0) = 1$; тогда $\phi \sin \varepsilon_1$ и $\omega' \sin \phi = \omega \cos \varepsilon_1$; если же $\cos(\phi, \rho_0) = -1$, то ϕ' будетъ равна $\sin \varepsilon_1$ и $\omega' \sin \phi = -\omega \cos \varepsilon_1$.

гдѣ ω есть абсолютная величина разности $(r\rho_0 - \zeta_0\omega)$, такъ что:

$$\left. \begin{aligned} \zeta \frac{dr}{dt} &= -\rho_0 F, \text{ если } (r\rho_0 - \zeta_0\omega) > 0 \\ \zeta \frac{dr}{dt} &= \rho_0 F, \text{ если } (r\rho_0 - \zeta_0\omega) < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (943)$$

Изъ двухъ другихъ дифференціальныхъ уравненій (932, а) (932, б) и изъ равенства:

$$p \frac{d\xi_0}{dt} + q \frac{d\eta_0}{dt} = 0$$

составимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\mathcal{M} \frac{d\omega}{dt} \rho_0 = Mg\gamma(\lambda_s \eta_0 - \mu_s \xi_0) + \zeta_0 \rho_0 \frac{F}{\omega_0} (r\rho_0 - \zeta_0\omega), \dots\dots\dots (944)$$

гдѣ первый членъ второй части можетъ быть преобразованъ слѣдующимъ образомъ:

$$\lambda_s \eta_0 - \mu_s \xi_0 = \frac{\eta_0}{q} (\lambda_s q - \mu_s p) = -\frac{\rho_0 \phi' \sin \phi}{\omega}.$$

Изъ дифференціальныхъ уравненій (944) и (932, с, bis) составимъ слѣдующее уравненіе:

$$\mathcal{M} \rho_0 \frac{d\omega}{dt} + \zeta \rho_0 \frac{dr}{dt} = Mg\gamma \frac{\rho_0}{\omega} \frac{d \cos \phi}{dt} \dots\dots\dots (945)$$

Для рѣшенія вопроса о скользяніи тѣла по данному периметру, надо интегрировать дифференціальныя уравненія (943) и (945).

Мы имѣемъ возможность рѣшить вопросъ для того случая, когда периметръ S есть кругъ $\phi = \alpha$; тогда $\phi =$ постоянному, а потому интегралъ уравненія (945) будетъ таковъ:

$$\mathcal{M} \rho_0 \omega + \zeta \rho_0 r = C \dots\dots\dots (946)$$

Если кругъ Q внѣ круга S , то $\phi = (\alpha + \beta)$, $H = \sin(\alpha + \beta)$; исключивъ изъ выраженія (936 bis) и интеграла (946) величину r , получимъ слѣдующее выраженіе для $\lambda \rho_0^2$:

$$\lambda \rho_0^2 = -\mathcal{M} R \frac{\lg \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \omega^2 + C \operatorname{ctg} \beta + Mg\gamma \rho_0 \sin(\alpha + \beta).$$

Если ω_0 меньше ω_1 , но больше тогда движение тела должно удовлетворять уравнению (943); исключив (946), получим следующее диффе

$$\frac{d\omega}{dt} = - \frac{k \cos \alpha}{\sin \alpha \sin(\alpha - \omega)}$$

или

$$\frac{d\omega}{\omega_1 - \omega} = - \frac{1}{\omega}.$$

$$n = \frac{kC}{2R \sin \alpha} \sqrt{1 - \frac{\omega}{\omega_1}}$$

Интегрируя это уравнение и в постоянной произвольной, получимъ

$$\omega - \omega_0 = - \frac{(\omega_1 - \omega_0)}{\omega_1}.$$

Угловая скорость ω уменьшается пока не становится равной ω_n , катание безъ скольжения.

Если ω_0 меньше ω_n , но больше движение должно удовлетворять уравнению (943); решение — следующее.

$$\omega - \omega_0 = \frac{(\omega_1 - \omega_0)}{\omega_0}.$$

Угловая скорость увеличивается пока не достигнет величины ω_n катание безъ скольжения.

Подобнымъ же образомъ мы $\phi = \alpha - \beta$.

§ 138. Вращение твердаго подвижной оси. Дифференцирование реакции связей.

Твердое тело, имѣющее возм. данной постоянной неподвижной вдоль этой оси, имѣетъ только одно движение ограничено нитью у

нимъ l , а, кромѣ того, примемъ во вниманіе, что всѣ s остаются постоянными, тогда равенства будутъ таковы:

$$M \frac{d^2 x_0}{dt^2} = B_x + \lambda_1 + \lambda_4, \dots \dots \dots (948, a)$$

$$M \frac{d^2 y_0}{dt^2} = B_y + \lambda_2 + \lambda_5, \dots \dots \dots (948, b)$$

$$0 = B_z + \lambda_3, \dots \dots \dots (948, c)$$

$$-\sum_{i=1}^{i=n} m_i s_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = L_x - l \lambda_5, \dots \dots \dots (948, d)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i s_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = L_y + l \lambda_4, \dots \dots \dots (948 e)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(x_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - y_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) = L_z \dots \dots \dots (948, f)$$

Последнее равенство есть дифференціальное уравненіе вращенія тѣла, а первыя пять служатъ для опредѣленія величинъ реакцій связей.

Первыя части равенствъ (948, d, e, f) суть производныя по времени отъ проекцій на оси X^{cos} , Y^{cos} и Z^{cos} главного момента количествъ движенія вокругъ начала координатъ; можно выразить величины этихъ проекцій по формуламъ (658, a, b, c) стр. 471-й, причежъ слѣдуетъ принять въ расчетъ, что въ настоящемъ случаѣ x'_0 , y'_0 , z'_0 , P и Q равны нулю, такъ какъ тѣло можетъ только вращаться вокругъ оси Z , и что x_0 , y_0 , z_0 равны нулю, такъ какъ точка $Ю$ находится въ началѣ абсолютныхъ координатъ; поэтому:

$$A_x = -S_{xz}R, \quad A_y = -S_{yz}R, \quad A_z = I_z R,$$

гдѣ

$$I_z = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad S_{xz} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i s_i x_i, \quad S_{yz} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i s_i.$$

43*

опоры; третье изъ этихъ равенствъ даетъ величину проекціи главнаго вектора \mathfrak{D} этихъ давленій на ось $Z^{ост}$:

$$\mathfrak{D} \cos(\mathfrak{D}, Z) = -\lambda_3 = B_z, \dots \dots \dots (949, a)$$

а изъ равенствъ (948 a, b) мы можемъ получить выраженія проекцій этого главнаго вектора \mathfrak{D} на оси X и Y или на оси Ξ и Υ , а именно:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} \cos(\mathfrak{D}, \Xi) &= -(\lambda_1 + \lambda_4) \cos \vartheta + (\lambda_2 + \lambda_5) \sin \vartheta = \\ &= B \cos(B, \Xi) + M\xi_c(\vartheta')^2 \dots \dots \dots (949, b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} \cos(\mathfrak{D}, \Upsilon) &= -(\lambda_2 + \lambda_5) \cos \vartheta - (\lambda_1 + \lambda_4) \sin \vartheta = \\ &= B \cos(B, \Upsilon) - M\xi_c \vartheta'' \dots \dots \dots (949, c) \end{aligned}$$

Изъ этихъ формулъ видно, что главный векторъ давленій вращающагося тѣла на точки опоры постоянной оси есть геометрическая сумма трехъ силъ:

а) Силы равной и параллельной главному вектору B задаваемыхъ силъ.

б) Силы $M\xi_c(\vartheta')^2$, равной и параллельной центробѣжной силѣ, которую имѣла бы масса M , если бы она была сосредоточена въ центрѣ инерціи тѣла; эту часть давленія иногда называютъ *центробѣжною силою тѣла*.

в) Силы $M\xi_c \vartheta''$, направленной параллельно отрицательной оси Υ , если $\vartheta'' > 0$, и имѣющей направленіе параллельное положительной оси Υ , если $\vartheta'' < 0$.

Здѣсь умѣстно замѣтить, что геометрическая сумма двухъ силъ b и c противоположна ускоренію центра инерціи тѣла, а по величинѣ равняется произведенію изъ величины этого ускоренія на массу тѣла.

Слѣдовательно, главный векторъ давленій, производимыхъ вращающимся тѣломъ на точки опоры его постоянной оси, есть геометрическая сумма, составленная изъ главнаго вектора задаваемыхъ силъ и изъ фриктивной силы инерціи всей массы тѣла, какъ бы сосредоточенной въ ея центръ инерціи.

(вокруг $Ю$) направлен по этой оси, то каких давлений на точки опоры этой оси следующие условия относительно $т$

1) ξ_c должно быть равно нулю, т. е. должен быть на оси вращения,

2) D_{xx} и E_{xx} должны быть равны нулю, должна быть одною из главных осей инерции.

При этих условиях ось вращения может быть та, что точки опоры нужны только на случай равных сил, которые будут стремиться к первоначальному положению.

Если центр инерции тела не находится при вращении является центробежная сила, есть подшипников в сторону положения центра. Если вращение не равномерно, то является ложное вращательной части ускорения центра.

Если только соблюдено первое условие (второе (т. е. D_{xx} и E_{xx} не равны нулю), то может повернуться вокруг некоторой оси, стоянной оси, и давлений, производимых на эти более величины D_{xx} и E_{xx} .

§ 140. Примеры определения закона вращения вокруг постоянной оси под влиянием физических маятников.

Для определения закона вращения над ренциальное уравнение (948, f).

Пример 113-й. Однородный круговой вазы R , масса M) может вращаться во которая, посредством двух точек опоры в горизонтальном положении; на боковую поверхность (весьма большое число раз) бесконечно-тонкая растяжимая нить, свободная часть которой (черт. 121) и нить на конце своем тяж

гдѣ:

$$l = \frac{C_{\pi}}{M\epsilon_c}; \dots\dots\dots (951)$$

сравнимъ его съ уравненіемъ:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = (\varphi'_0)^2 + \frac{2g}{R}(\cos \varphi - \cos \varphi_0),$$

выражающимъ законъ живой силы въ движеніи простаго круговаго математическаго маятника (примѣръ 33-й, стр. 235—241), мы увидимъ, что если въ первомъ (т. е. въ (950, bis)) замѣнить уголъ φ угломъ φ , а величину l длиною R , то получимъ послѣднее уравненіе; при этомъ слѣдуетъ замѣтить, что l имѣетъ измѣренія длины, такъ какъ это есть отношеніе момента инерціи къ произведенію изъ массы на длину.

На этомъ основаніи мы можемъ составить себѣ слѣдующее понятіе о законѣ вращенія твердаго тѣла вокругъ горизонтальной оси подъ вліяніемъ силы тяжести:

Если отложимъ отъ начала координатъ по оси Ξ длину l (951), то точка Π твердаго тѣла, находящаяся на концѣ этой длины, будетъ совершать то же самое движеніе, какое совершаетъ тяжелая точка круговаго математическаго маятника длины l при начальномъ углѣ отклоненія $\varphi_0 = \varphi_0$ и при начальной скорости v_0 , равной $l\varphi'_0$.

Твердое тѣло, находящееся въ тѣхъ условіяхъ, при которыхъ мы разсматриваемъ его движеніе въ настоящемъ примѣрѣ, т. е. имѣющее возможность свободно вращаться вокругъ горизонтальной оси, не проходящей черезъ центръ инерціи, и подверженное дѣйствію силы тяжести, называется *физическимъ маятникомъ*. Длина l называется *приведенною длиною физическаго маятника* или *длиною маятника математическаго, эквивалентнаго данному физическому маятнику*; точка Π называется *центромъ качаній*, соответствующимъ данной оси привѣса, т. е. оси вращенія тѣла; линія, проведенная черезъ центръ качанія параллельно оси привѣса, называется *осью качаній*, соответствующею оси привѣса.

Ту же самую продолжительность будутъ имѣть размахи того же твердаго тѣла, подвѣшеннаго за ось качаній.

Осью привѣса даннаго твердаго тѣла можетъ быть произвольная прямая линія, взятая въ тѣлѣ или неизмѣнно-связанная съ нимъ; каждой оси привѣса соотвѣтствуетъ опредѣленная ось качанія, которая параллельна оси привѣса и заключается въ одной плоскости съ нею и съ центромъ инерціи, но находится по другую сторону этого центра. Означимъ черезъ y разстояніе оси привѣса отъ центра инерціи, черезъ x — разстояніе оси качанія отъ него же, черезъ I_c — моментъ инерціи вокругъ центральной оси, параллельной оси привѣса, и черезъ r — плечо инерціи тѣла вокругъ той же центральной оси (см. стр. 491-ю); по формулѣ (951, bis) будемъ имѣть слѣдующую зависимость между этими величинами:

$$xy = \frac{I_c}{M} = r^2 \dots \dots \dots (954)$$

Сумма разстояній x и y даетъ приведенную длину l физическаго маятника для качаній вокругъ выбранной оси привѣса, а эту длину можно выразить по формулѣ (953), такъ что будемъ имѣть еще другую зависимость:

$$x + y = g \frac{\tau^2}{\pi^2} \dots \dots \dots (955)$$

между x , y и продолжительностью τ малыхъ размаховъ маятника вокругъ выбранной оси привѣса или вокругъ оси качаній.

Равенства (954) и (955) показываютъ, что x и y суть два корня уравненія второй степени:

$$X^2 - \frac{\tau^2}{\pi^2} g X + r^2 = 0,$$

такъ что если даны: направленіе оси привѣса въ твердомъ тѣлѣ и величина продолжительности малыхъ качаній и требуется найти положеніе оси привѣса въ тѣлѣ, то слѣдуетъ прежде всего опредѣлить величину плеча инерціи r вокругъ центральной оси параллельной данному направленію и затѣмъ опредѣлить знакъ разности:

$$(\tau^2 g)^2 - 4\pi^4 r^2;$$

если окажется, что знакъ этой разности отрицательный, то это будетъ значить, что корни предыдущаго уравненія мнимые и что тѣло не можетъ совершать размаховъ столь краткой продолжительности вокругъ осей даннаго направленія; если же

$$\tau^2 > \frac{2\pi^2 r}{g},$$

Проекції на тѣ же оси главнаго вектора реакцій обозначимъ черезъ B_1, B_2

Припомнимъ теперь значеніе шести ній движенія твердаго тѣла. Три уравненія выражаютъ, что произведеніе изъ ускореннаго на массу тѣла, равняется геометрическому суммѣ вектора задаваемыхъ силъ и главнаго вектора моментовъ могутъ быть разсматриваемы какъ разложеніе того, что скорость точки, черт. мента (вокругъ центра инерціи) количественно равняется геометрической суммѣ изъ главнаго вектора силъ и главнаго момента реакцій.

Новыя дифференціальныя уравненія проекцій вышесказанныхъ величинъ какъ эти оси измѣняютъ своимъ направленности центра инерціи и главнаго момента, на основаніи формулы (293) кинематики

$$\dot{v}_e \cos(\dot{v}_e, X) = \frac{d(v \cos(v, X))}{dt} - \omega_s v \cos$$

.....

Поэтому новыя дифференціальныя

$$M\left(\frac{da}{dt} - \omega_s b + \omega_s c\right) = B$$

$$M\left(\frac{db}{dt} - \omega_1 c + \omega_s a\right) = B$$

$$M\left(\frac{dc}{dt} - \omega_s a + \omega_1 b\right) = B$$

$$\frac{dA_1}{dt} - \omega_s A_2 + \omega_s A_3 = L$$

$$\frac{dA_2}{dt} - \omega_1 A_3 + \omega_s A_1 = L$$

$$\frac{dA_3}{dt} - \omega_s A_1 + \omega_1 A_2^*) = .$$

*) Моменты количествъ движенія A_1, A_2 ,
или такъ:
 $A_1 = (A_0)_x \cos(X, X) + (A_0)_y \cos(X,$

$A_1 = \mathfrak{I}_1 \varphi - \mathfrak{E}_{12} \vartheta -$
гдѣ входятъ моменты и произведенія инерціи

и вывести эти выражения, вообразимъ себѣ, кромѣ X, Y, Z , еще другія неподвижныя оси координатъ ξ, η, ζ , выраженія косинусовъ угловъ между тѣми и другими вычислимъ выраженія для $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ по формулѣ 2-й кинематической части.

что уравненіе поверхности, по которой движется шевъ относительно \mathcal{H} :

$$F(x, y) - z = 0;$$

значеніями, принятыми на стр. 187 и приведенною 15).

a_x, a_y означаютъ косинусы угловъ, составленныхъ съ имѣ либо направленіемъ, проведеннымъ черезъ раз-у поверхности въ касательной къ ней плоскости, по-и должны удовлетворять уравненію:

$$a_x^2 + qa_y^2 - \sqrt{1 - a_x^2 - a_y^2} = 0,$$

поставить еще и такъ:

$$1) a_x^2 + 2pqa_x a_y + (1 + q^2) a_y^2 = 1 \dots \dots (960)$$

и η опредѣляется тѣмъ, что для нихъ тричленъ

$$ra_x^2 + 2sa_x a_y + ta_y^2$$

имѣетъ или наибольшее или наименьшее значеніе. Поступая по извѣст-ны найдемъ, что значенія косинусовъ a_x и a_y , оп-авленія осей X, Y , должны удовлетворять, кромѣ ще и слѣдующему уравненію:

$$\frac{ra_x + sa_y}{1 + p^2 a_x + pqa_y} = \frac{sa_x + ta_y}{pqa_x + (1 + q^2) a_y} \dots \dots \dots (961)$$

есть уравненіе второй степени относительно част-корни его обозначимъ черезъ x_1 и x_2 , предполагая, етъ оси X , а x_2 — оси Y ; кромѣ того, означимъ че-ющія выраженія:

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(1 + p^2) x_1^2 + 2pqx_1 + 1 + q^2} \\ &= \sqrt{(1 + p^2) x_2^2 + 2pqx_2 + 1 + q^2}, \end{aligned}$$

тогда косинусы угловъ, составляемыхъ осями $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ съ осями X, Y, Z , выразятся такъ:

$$\begin{aligned} l_x &= \frac{x_1}{k_1}, \quad l_y = \frac{1}{k_1}, \quad l_z = \frac{px_1+q}{k_1}, \\ m_x &= \frac{x_2}{k_2}, \quad m_y = \frac{1}{k_2}, \quad m_z = \frac{px_2+q}{k_2}, \\ n_x &= \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad n_y = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad n_z = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \dots (962) \end{aligned}$$

Для упрощенія дальнѣйшихъ выводовъ мы можемъ предположить, что неподвижныя оси X, Y, Z совпадаютъ съ положеніемъ, которое имѣютъ подвижныя оси $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ въ разсматриваемый моментъ; для этого положенія неизмѣняемой среды:

$$l_x=1, \quad m_y=1, \quad n_z=1, \quad \sqrt{1+p^2+q^2}=-1;$$

прочіе шесть косинусовъ равны нулю, далѣе:

$$p=0, \quad q=0, \quad s=0, \quad x_1=\infty, \quad x_2=0, \quad k_1=x_1, \quad k_2=1, \dots (963)$$

$$\mathcal{R}_1=r, \quad \mathcal{R}_2=t;$$

тогда изъ формулъ (113) и трехъ слѣдующихъ за ними на страницѣ 102-й кинематической части получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= -m_y n'_y = -n'_y, \quad \omega_2 = l_x n'_x = n'_x, \\ \omega_3 &= m_y l'_y = -l_x m'_x = l'_y = -m'_x. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (964)$$

Такъ какъ всѣ девять косинусовъ предполагаются выраженными въ функціяхъ отъ x и отъ y , то производныя отъ нихъ по времени выразятся такъ:

$$\left. \begin{aligned} n'_x &= \frac{\partial n_x}{\partial x} a + \frac{\partial n_x}{\partial y} b, \quad n'_y = \frac{\partial n_y}{\partial x} a + \frac{\partial n_y}{\partial y} b, \\ l'_y &= \frac{\partial l_y}{\partial x} a + \frac{\partial l_y}{\partial y} b = -m'_x = -\frac{\partial m_x}{\partial x} a - \frac{\partial m_x}{\partial y} b; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (965)$$

а составляя выраженія частныхъ производныхъ отъ косинусовъ по x и

Сравнимъ уравненія (958, a_1) и (958, b_1) съ уравненіями (957, a) и (957, b), мы найдемъ выраженія величинъ проэкцій силы тренія на касательную къ траекторіи и на ось \mathfrak{Y} :

$$F \cos(F, \mathfrak{X}) = -\frac{2}{7} (B \cos(B, \mathfrak{X}) - MR \cos \tau),$$

$$F \cos(F, \mathfrak{Y}) = -\frac{2}{7} (B \cos(B, \mathfrak{Y}) - MR \sin \tau).$$

Положимъ, что $B=0$; спрашивается, не будетъ ли центръ шара описывать тогда геодезическую линію?

Изъ уравненія (958, b_1) видно, что геодезическая кривизна траекторіи будетъ только тогда равна нулю, когда $\tau=0$; но изъ уравненія (958, f_1) видно, что τ можетъ быть постояннымъ только тамъ, гдѣ $\sigma=0$, т. е., гдѣ геодезическая линія не имѣетъ завитія.

Слѣдовательно, если шаръ катится по какой либо поверхности безъ скользянія и притомъ, если къ нему не приложено никакихъ другихъ силъ, за исключеніемъ силы тренія, то центръ инерціи его можетъ описывать геодезическую линію только при томъ условіи, чтобы она была плоскою.

Обратимся къ разсмотрѣнію частныхъ случаевъ.

Примѣръ 115-й. Данная поверхность есть шаръ радіуса ($R_1 - R$) и подвижный шаръ прикасается къ нему снаружи.

Въ этомъ случаѣ за линіи кривизны поверхности шара радіуса R_1 можно принять систему меридіановъ и систему параллельныхъ круговъ; положеніе центра инерціи движущагося шара будемъ выражать въ сферическихъ координатахъ φ и ψ .

Ось \mathfrak{Z} направимъ внутрь неподвижной сферы, ось \mathfrak{X} по касательной къ меридіану, въ сторону убывающихъ φ , а ось \mathfrak{Y} по касательной къ параллельному кругу, въ сторону возрастающихъ ψ ; тогда $a = -R_1 \varphi'$, $b = R_1 \psi' \sin \varphi$, далѣе:

$$\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_2 = \frac{1}{R_1}, \quad \text{tg}(\rho_1, \mathfrak{Z}) = 0, \quad \text{tg}(\rho_2, \mathfrak{Z}) = \cotg \varphi,$$

слѣдовательно:

$$\omega_1 = \psi' \sin \varphi, \quad \omega_2 = \varphi', \quad \omega_3 = -\psi' \cos \varphi.$$

а если проекция силы B на ось \mathcal{Y} всегда равна нулю, то будем иметь еще и другой интеграл, а именно:

$$MR_1 \psi' \sin^2 \varphi = C + \frac{2}{7} MR_1 \cos \varphi \dots \dots \dots (969)$$

Обратимъ вниманіе на тотъ случай, когда сила B есть главный векторъ силы тяжести, а шаръ однороденъ; предположимъ, что полярная ось сферическихъ координатъ направлена вертикально сверху внизъ и служить, вмѣстѣ съ тѣмъ, неподвижною осью Y^{oxy} , имѣющей начало въ центрѣ; тогда:

$$B_1 = Mg \sin \varphi, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = -Mg \cos \varphi,$$

$$U = MgR_1 \cos \varphi = Mgy.$$

Уравненіе (968) можно представить подъ слѣдующимъ видомъ:

$$v^3 = \frac{10}{7} g(y - b), \dots \dots \dots (968, a)$$

гдѣ b имѣетъ слѣдующее значеніе:

$$b = y_0 - \frac{7}{10} \frac{v_0^2}{g}.$$

Давленіе шара на сферу (направленное къ центру ея) выразится такъ:

$$D = -Mg \cos \varphi - M \frac{v^2}{R_1} = -M \frac{17g}{7R_1} \left(y - \frac{10}{17} b \right) \dots \dots (970)$$

Катящійся шаръ оставляетъ поверхность сферы въ томъ мѣстѣ ея, гдѣ D обращается въ нуль, переходя отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ: изъ выраженія (970) видно, что D болѣе нуля до тѣхъ поръ, пока центръ шара находится выше уровня $y = \frac{10}{17} b$; на этомъ уровнѣ шаръ отдѣляется отъ сферы и далѣе падаетъ свободно.

Примѣръ 116-й. Движеніе однороднаго шара радіуса R по внутренней сторонѣ неподвижной сферы радіуса $(R + R_1)$.

Въ этихъ случаяхъ центръ шара можетъ находиться внутри или на поверхности сферы радіуса R_1 .

Ось \mathcal{Z} направимъ внаружу сферы, ось \mathcal{X} — по касательной къ координатной оси β (т. е. въ сторону возрастающихъ φ) и ось \mathcal{Y} — по

верхности, а ось координат σ — съ прямою линією, въ которую обра- щается периметръ одного изъ сѣченій, ортогональнаго къ произво- дящимъ.

Линіи кривизны цилиндрической поверхности суть: прямолинейныя производящія $\sigma = \text{постоянн.}$ и ортогональныя къ нимъ сѣченія $s = \text{постоянн.}$; какъ извѣстно, для цилиндрической поверхности:

$$\mathfrak{K}_1 = 0, \quad \text{tg}(\rho_1, \mathfrak{Z}) = 0, \quad \text{tg}(\rho_2, \mathfrak{Z}) = 0,$$

\mathfrak{K}_2 есть кривизна ортогональнаго сѣченія, взятая со знакомъ плюсъ, если ρ_2 направленъ по положительной оси \mathfrak{Z} , и взятая со знакомъ ми- нусъ, если ρ_2 направленъ по отрицательной оси \mathfrak{Z} (положительная ось \mathfrak{Z} направлена изъ точки C чрезъ точку прикосновенія шара съ поверх- ностью, по которой онъ катается); поэтому формулы (959) для цилин- дрической поверхности будутъ:

$$\omega_1 = b\mathfrak{K}_2, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0,$$

а дифференціальныя уравненія движенія будутъ таковы:

$$\frac{da}{dt} = \frac{5}{7} \frac{B_1}{M} - \frac{2}{7} Rtb\mathfrak{K}_2,$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{5}{7} \frac{B_2}{M}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{ab}{R} \mathfrak{K}_2,$$

гдѣ:

$$a = \frac{ds}{dt}, \quad b = \frac{d\sigma}{dt}, \quad \mathfrak{K}_2 = f(\sigma),$$

f есть нѣкоторая функція, выражающая зависимость кривизны \mathfrak{K}_2 отъ координаты σ .

Если B_2 зависитъ только отъ σ , но не отъ s , то второе изъ диффе- ренціальныхъ уравненій будетъ имѣть слѣдующій интегралъ:

$$(\sigma')^2 = C_1^2 + \frac{10}{7M} \int B_2 d\sigma \dots \dots \dots (971)$$

Въ томъ случаѣ, когда B_1 равно нулю, мы получимъ слѣдующее рѣшеніе:

$$\frac{2}{7} R^2 \tau^2 + (\sigma')^2 = C_2^2,$$

$$R\tau = C_2 \sqrt{\frac{7}{2}} \sin \left(C_3 + \sigma_1 \sqrt{\frac{2}{7}} \right),$$

$$\sigma' = C_2 \cos \left(C_3 + \sigma_1 \sqrt{\frac{2}{7}} \right), \quad \sigma_1 = \int \mathfrak{K}_2 d\sigma.$$

смотрим по тому, направлен ли радиус этой главной кривизны по положительной или отрицательной оси β . Въ формулы (959) входит геодезическая кривизна криволинейной линии кривизны:

$$-\frac{1}{g} = \mathfrak{K}_2 \operatorname{tg}(\rho_2, \beta).$$

Если развернуть коническую (или вообще линейчатую развертываемую на плоскость) поверхность на плоскость, то плоская кривая, образующаяся из какой либо начерченной на поверхности кривой линии, будет имѣть кривизну равную геодезической кривизнѣ ея на неразвернутой поверхности, такъ что геодезическая кривизна какого либо элемента кривой на неразвернутой поверхности обратится въ обыкновенную кривизну того-же элемента кривой на плоскости. Ортогональная траекторія $r = \text{постоянн.}$ прямолинейныхъ производящихъ конической поверхности обращается, при развертываніи поверхности на плоскость, въ кругъ радиуса r , поэтому:

$$-\mathfrak{K}_2 \operatorname{tg}(\rho_2, \beta) = \frac{1}{g} = \frac{1}{r}.$$

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что для конической поверхности формулы (959) получать такой видъ:

$$\omega_1 = r \mathfrak{K}_2 \frac{d\theta}{dt}, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \frac{d\theta}{dt}.$$

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ таковы:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{5}{7} \frac{B_1}{M} - \frac{2}{7} R r \mathfrak{K}_2 \frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(r^2 \theta')}{dt} = \frac{5}{7} \frac{B_2}{M}; \quad R \frac{dr}{dt} = r \mathfrak{K}_2 r' \theta'.$$

Если сила B имѣетъ потенциалъ, то имѣетъ мѣсто законъ живой силы, выражаемый интеграломъ:

$$M \left[(r')^2 + r^2 (\theta')^2 + \frac{2}{7} R^2 r^2 \right] = \frac{10}{7} U + 2h \dots \dots (972)$$

Если постоянно $B_2 = 0$, то будемъ имѣть интегралъ:

$$r^2 \theta' = C_1 \dots \dots \dots (973)$$

Если поверхность есть прямой круговой конусъ и шаръ находится внутри того конуса, по которому онъ катится, то: $r \mathfrak{K}_2 = -\cotg \alpha$, гдѣ

1

2

въ проеціяхъ ускореній относительнаго, переноснаго и поворотнаго;
тогда получатся такія уравненія:

$$\begin{aligned} Mx_c'' = & B \cos(B, X) + V \cos(V, X) - M\dot{w}_0 \cos(\dot{w}_0, X) - \\ & - M(\xi_c \omega_3' - \eta_c \omega_3') - M\omega_1(\omega_1 x_c + \omega_2 y_c + \omega_3 z_c) + \\ & + M\omega^2 x_c - 2M(\omega_3 \xi_c' - \omega_3 \eta_c'), \dots \dots \dots (975, a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} My_c'' = & B \cos(B, Y) + V \cos(V, Y) - M\dot{w}_0 \cos(\dot{w}_0, Y) - \\ & - M(x_c \omega_1' - \xi_c \omega_1') - M\omega_2(\omega_1 x_c + \omega_2 y_c + \omega_3 z_c) + \\ & + M\omega^2 y_c - 2M(\omega_3 x_c' - \omega_1 \xi_c'), \dots \dots \dots (975, b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Mz_c'' = & B \cos(B, Z) + V \cos(V, Z) - M\dot{w}_0 \cos(\dot{w}_0, Z) - \\ & - M(y_c \omega_1' - x_c \omega_2') - M\omega_3(\omega_1 x_c + \omega_2 y_c + \omega_3 z_c) + \\ & + M\omega^2 z_c - 2M(\omega_1 y_c' - \omega_2 x_c'), \dots \dots \dots (975, c) \end{aligned}$$

гдѣ B и V — главные векторы задаваемыхъ силъ и реакцій, приложенныхъ къ твердому тѣлу, \dot{w}_0 — ускореніе точки Ω неизмѣняемой средн.

Дифференціальныя уравненія моментовъ количествъ относительнаго движенія могутъ быть представлены въ различномъ видѣ, смотря по выбору координатныхъ осей; мы составимъ дифференціальныя уравненія при осяхъ IOX , IOY , IOZ , неизмѣнно связанныхъ съ твердымъ тѣломъ и совпадающихъ съ главными осями инерціи тѣла въ точкѣ IO .

Проекціи на эти оси главнаго момента количествъ движенія вокругъ точки IO выразятся такъ (см. (661) стр. 473 и (757) стр. 542):

$$\begin{aligned} (A_{\infty})_{\xi} &= \mathfrak{A}_{\infty} p + M(\gamma \eta_c - \beta \zeta_c), \quad (A_{\infty})_{\eta} = \mathfrak{B}_{\infty} q + M(\alpha \zeta_c - \gamma \xi_c), \\ (A_{\infty})_{\zeta} &= \mathfrak{C}_{\infty} r + M(\beta \xi_c - \alpha \eta_c), \end{aligned}$$

выражающія проэкціи углового относительнаго ускоренія твёрдаго тѣла на оси Ξ , Υ , Z , и производныя:

$$\frac{d\omega_{\Xi}}{dt}, \quad \frac{d\omega_{\Upsilon}}{dt}, \quad \frac{d\omega_Z}{dt},$$

которыя не равны проэкціямъ углового ускоренія $\dot{\omega}$ неизмѣняемой среды на тѣ же оси; въ самомъ дѣлѣ, по общей формулѣ (293) кинематической части (стр. 251), выражающей проэкцію скорости годографа на подвижное направленіе, мы найдемъ, что проэкціи углового ускоренія $\dot{\omega}$ на оси Ξ , Υ , Z выразятся такъ:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{\Xi} &= \dot{\omega} \cos(\dot{\omega}, \Xi) = \frac{d\omega_{\Xi}}{dt} - r\omega_{\Upsilon} + q\omega_Z = \\ &= \omega'_{\Xi} - r\omega_{\Upsilon} + q\omega_Z \dots \dots \dots (978, a) \end{aligned}$$

$$\dot{\omega}_{\Upsilon} = \dot{\omega} \cos(\dot{\omega}, \Upsilon) = \omega'_{\Upsilon} - p\omega_Z + r\omega_{\Xi} \dots \dots \dots (978, b)$$

$$\dot{\omega}_Z = \dot{\omega} \cos(\dot{\omega}, Z) = \omega'_Z - q\omega_{\Xi} + p\omega_{\Upsilon} \dots \dots \dots (978, c)$$

При помощи формулъ (977) и (978), дифференціальныя уравненія (976) могутъ быть преобразованы въ слѣдующія дифференціальныя уравненія моментовъ количествъ относительнаго движенія вокругъ осей Ξ , Υ , Z :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\Xi} \frac{dp}{dt} &= (\mathfrak{B}_{\Xi} - \mathfrak{C}_{\Xi})(qr + \omega_{\Upsilon}\omega_Z) - \mathcal{M}_{\Xi}\dot{\omega}_{\Xi} + (\mathcal{L}_{\Xi})_{\Xi} + (\Lambda_{\Xi})_{\Xi} - E_{\Xi} + \\ &+ (\mathcal{M}_{\Xi} + \mathfrak{B}_{\Xi} - \mathfrak{C}_{\Xi})q\omega_Z - (\mathcal{M}_{\Xi} - \mathfrak{B}_{\Xi} + \mathfrak{C}_{\Xi})r\omega_{\Upsilon} \dots \dots \dots (979, a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{\Xi} \frac{dq}{dt} &= (\mathfrak{C}_{\Xi} - \mathcal{M}_{\Xi})(rp + \omega_Z\omega_{\Xi}) - \mathfrak{B}_{\Xi}\dot{\omega}_{\Upsilon} + (\mathcal{L}_{\Xi})_{\Upsilon} + (\Lambda_{\Xi})_{\Upsilon} - E_{\Upsilon} + \\ &+ (\mathfrak{B}_{\Xi} + \mathfrak{C}_{\Xi} - \mathcal{M}_{\Xi})r\omega_{\Xi} - (\mathfrak{B}_{\Xi} - \mathfrak{C}_{\Xi} + \mathcal{M}_{\Xi})p\omega_Z \dots \dots \dots (979, b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\Xi} \frac{dr}{dt} &= (\mathcal{M}_{\Xi} - \mathfrak{B}_{\Xi})(pq + \omega_{\Xi}\omega_{\Upsilon}) - \mathfrak{C}_{\Xi}\dot{\omega}_Z + (\mathcal{L}_{\Xi})_Z + (\Lambda_{\Xi})_Z - E_Z + \\ &+ (\mathfrak{C}_{\Xi} + \mathcal{M}_{\Xi} - \mathfrak{B}_{\Xi})p\omega_{\Upsilon} - (\mathfrak{C}_{\Xi} - \mathcal{M}_{\Xi} + \mathfrak{B}_{\Xi})q\omega_{\Xi} \dots \dots \dots (979, c) \end{aligned}$$

Наконецъ, составимъ еще дифференціальныя уравненія моментовъ количествъ относительнаго движенія при координатныхъ осяхъ X , Y , Z .

дое тѣло есть дискъ MM , подобный тѣмъ, которые изображены на чертежахъ 104-мъ и 105-мъ; ось ab этого тѣла свободно вращается въ подшипникахъ вилки BB , прикрѣпленной къ концу S стержня S_0S маятника, могущаго вращаться вокругъ оси $\mathfrak{D}\mathfrak{Y}$, неизмѣнно связанной со средою. Вращаясь вокругъ этой оси, стержень остается въ плоскости ZOD . Вилка прикрѣплена къ стержню такъ, что ось ab (CZ) остается въ той же плоскости.

Тѣлу MM сообщена угловая скорость C вокругъ оси CZ ; опредѣлить, какое движеніе будетъ совершать маятникъ подъ вліяніемъ силы тяжести (дѣйствующей параллельно отрицательной оси $Z^{орт}$) и переноснаго движенія вмѣстѣ съ вращающеюся средою.

Положимъ, что начало O неподвижныхъ осей координатъ выбрано такъ, что точка \mathfrak{D} находится въ плоскости XV ; положительная ось $\mathfrak{D}\mathfrak{X}$ пусть совпадаетъ съ продолженіемъ направленія, проведеннаго изъ O черезъ \mathfrak{D} , а ось $\mathfrak{D}\mathfrak{Z}$ параллельна оси $Z^{орт}$. Уголь $\mathfrak{X}OX$ означимъ черезъ ϑ_1 ($\vartheta_1 = \omega t$), а уголь $\mathfrak{SD}\mathfrak{Z}'$ — черезъ φ .

Чтобы составить уравненія тѣхъ связей, которымъ подчинено твердое тѣло, надо принять во вниманіе, что маятникъ имѣетъ по отношенію къ неизмѣняемой средѣ только одну степень свободы (именно онъ можетъ вращаться вокругъ оси \mathfrak{Y}), а твердое тѣло имѣетъ по отношенію къ маятнику тоже одну степень свободы; слѣдовательно, твердое тѣло имѣетъ въ сложности двѣ степени свободы, т. е. подчинено четырѣмъ связямъ. Нетрудно составить уравненія этихъ связей; онѣ таковы:

$$x_c - (D + l \cos \varphi) \cos \omega t = 0, \quad y_c - (D + l \cos \varphi) \sin \omega t = 0,$$

$$z_c + l \sin \varphi = 0, \quad \mathfrak{X} - \omega t = 0,$$

или

$$x_c - l \cos \varphi = 0, \quad y_c = 0, \quad z_c + l \sin \varphi = 0, \quad \mathfrak{X}_3 = 0, \dots \quad (984)$$

гдѣ D означаетъ величину разстоянія $O\mathfrak{D}$, l — разстояніе центра инерціи C диска отъ точки \mathfrak{D} ; $\varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ есть уголь, составляемый осью Z съ осью \mathfrak{Z} , а \mathfrak{X}_3 есть уголь, составляемый плоскостью, проведенною черезъ ось CZ параллельно оси \mathfrak{Z} съ плоскостью $\mathfrak{Z}\mathfrak{D}\mathfrak{X}$ (этотъ уголь равенъ нулю въ настоящемъ случаѣ).

По формуламъ (47 — 55) кинематической части составимъ выраженія для косинусовъ $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \dots, \nu_3$; такъ какъ здѣсь $\mathfrak{X}_3 = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi$, то они будутъ таковы:

По этимъ формуламъ найдемъ, что:

$$V \cos(V, X) = \Delta_1, \quad V \cos(V, Y) = \Delta_2, \quad V \cos(V, Z) = \Delta_3$$

$$(\Lambda_c)_1 = 0, \quad (\Lambda_c)_2 = \Lambda_c \cos(\Lambda_c, Y) = \Delta_1 l \cos \varphi + \Delta_3 l \sin \varphi.$$

Теперь, по формуламъ предыдущаго параграфа, составимъ дифференціальныя уравненія относительнаго движенія центра инерціи (первое и третье), дифференціальное уравненіе моментовъ вокругъ оси Z (979, с) и дифференціальное уравненіе моментовъ вокругъ оси параллельной оси Y и проведенной черезъ точку C ; эти уравненія въ настоящемъ случаѣ будутъ таковы:

$$\begin{aligned} Ml \frac{d^2 \sin \varphi}{dt^2} &= \Delta_1 + M(D + l \sin \varphi) \omega^2, \\ - Ml \frac{d^2 \cos \varphi}{dt^2} &= - Mg + \Delta_3, \quad \mathfrak{G}_c \frac{dr}{dt} + \mathfrak{G}_c \omega \frac{dv_3}{dt} = 0, \\ - \mathfrak{M}_c \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= (\Delta_1 \cos \varphi + \Delta_3 \sin \varphi) l - 2\mathfrak{M}_c' r \omega \cos \varphi - \\ &\quad - (\mathfrak{G}_c - \mathfrak{M}_c) \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi^*). \end{aligned}$$

Третье изъ этихъ уравненій интегрируется непосредственно и даетъ интегралъ:

$$r + \omega \sin \varphi = C = r_0,$$

гдѣ r_0 есть угловая скорость вращенія вокругъ оси симметріи при φ равномъ нулю.

Исключивъ изъ трехъ остальныхъ дифференціальныхъ уравненій множители Δ_1 и Δ_3 , получимъ дифференціальное уравненіе втораго порядка:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M}_c + Ml^2) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= (\mathfrak{G}_c r_0 + MDl\omega) \omega \cos \varphi - Mlg \sin \varphi + \\ &\quad + (Ml^2 - \mathfrak{M}_c) \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi, \dots \dots \dots (982) \end{aligned}$$

*) Для тѣла вращенія:

$$2\mathfrak{M}_c' = \mathfrak{G}_c \text{ (см. стр. 495).}$$

Прежде чѣмъ перейдемъ къ остальнымъ двумъ примѣрамъ, обратимъ вниманіе на слѣдующее обстоятельство.

Если неизмѣняемая среда не имѣетъ углового ускоренія, а точка Σ имѣетъ постоянное ускореніе A по оси X , если твердое тѣло подчинено такимъ связямъ, выраженія которыхъ заключаютъ x_c, y_c, z_c и косинусы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \dots, \nu_3$, но не заключаютъ времени t ; наконецъ, если силы, приложенныя къ тѣлу, имѣютъ потенціаломъ функцію отъ тѣхъ же переменныхъ $x_c, y_c, z_c, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \dots, \nu_3$, то дифференціальныя уравненія относительнаго движенія тѣла имѣютъ интеграль, заключающій живую силу относительнаго движенія.

Въ самомъ дѣлѣ, помножимъ уравненія (975, a, b, c) на x'_c, y'_c, z'_c , а уравненія (979, a, b, c) на p, q, r , причемъ за точку O примемъ центръ инерціи тѣла; сложивъ, получимъ:

$$\frac{dT}{dt} = M \frac{\omega^2}{2} \frac{d\rho_c^2}{dt} - \frac{M}{2} \frac{d(\omega_1 x_c + \omega_2 y_c + \omega_3 z_c)^2}{dt} + \frac{dU}{dt} - M A x'_c +$$

$$+ \mathcal{A}_c \omega_\xi (\omega_\eta r - \omega_\zeta q) + \mathcal{B}_c \omega_\eta (\omega_\zeta p - \omega_\xi r) + \mathcal{C}_c \omega_\zeta (\omega_\xi q - \omega_\eta p),$$

гдѣ:

$$T = \frac{M}{2} [(x'_c)^2 + (y'_c)^2 + (z'_c)^2] + \frac{1}{2} (\mathcal{A}_c p^2 + \mathcal{B}_c q^2 + \mathcal{C}_c r^2), \dots (984)$$

$$\rho_c^2 = x_c^2 + y_c^2 + z_c^2.$$

На основаніи формулъ (978, a, b, c) мы найдемъ, что послѣдній многочленъ второй части предыдущаго уравненія равенъ:

$$\mathcal{A}_c \omega_\xi \omega'_\xi + \mathcal{B}_c \omega_\eta \omega'_\eta + \mathcal{C}_c \omega_\zeta \omega'_\zeta,$$

а потому это уравненіе интегрируется и даетъ слѣдующій интеграль:

$$T = \frac{M}{2} [\omega^2 \rho_c^2 - (\omega_1 x_c + \omega_2 y_c + \omega_3 z_c)^2] + U - M A x_c + \\ + \frac{1}{2} (\mathcal{A}_c \omega_\xi^2 + \mathcal{B}_c \omega_\eta^2 + \mathcal{C}_c \omega_\zeta^2) + h. \dots \dots \dots (985)$$

Примѣръ 120-й. Измѣняемая среда вращается равномерно вокругъ постоянной неподвижной оси. Центръ инерціи C твердаго тѣла неизмѣнно связанъ съ нѣкоторою точкою Σ неизмѣняемой среды. Ось Z

Нетрудно убедиться, что если въ начальный моментъ ось Z совпадала съ осью $З$ и если начальныя значенія производныхъ ϕ' и κ' были равны нулю, то ось Z будетъ постоянно совпадать съ осью $З$.

Примѣръ 121-й. Къ задавію предыдущаго примѣра присоединяется условіе, что ось симметріи (ось Z) твердаго тѣла должна оставаться въ какой либо плоскости, неизмѣнно связанной съ движущеюся средою.

Положимъ, что нормаль H этой плоскости составляетъ уголъ ϵ съ осью $З$ и что плоскость, проведенная черезъ $З$ и H составляетъ уголъ δ съ плоскостью $ЗХ$, такъ что косинусы угловъ, составляемыхъ нормалью съ осями $Х$, $У$, $З$, будутъ:

$$\sin \epsilon \cos \delta, \sin \epsilon \sin \delta, \cos \epsilon,$$

а условіе, что ось Z перпендикулярна къ H , выразится такъ:

$$v_1 \sin \epsilon \cos \delta + v_2 \sin \epsilon \sin \delta + v_3 \cos \epsilon = 0, \dots (991)$$

или:

$$\sin \epsilon \sin \phi \cos (\delta - \kappa) + \cos \epsilon \cos \phi = 0 \dots (991, \text{bis})$$

Такъ какъ это уравненіе не заключаетъ времени явнымъ образомъ, то и въ настоящемъ случаѣ вращеніе тѣла удовлетворяетъ интегралу (988).

Кромѣ того, дифференціальное уравненіе моментовъ вѣрнѣе ося Z имѣетъ совершенно тотъ же самый видъ, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, поэтому теперь имѣетъ мѣсто также и интегралъ (986).

По исключеніи величины g изъ этихъ двухъ интеграловъ, получимъ слѣдующее уравненіе:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_c ((\phi')^2 + (\kappa')^2 \sin^2 \phi) &= 2h - \zeta_c C_1^2 + 2\zeta_c C_1 \omega \cos \phi + \\ &+ \mathcal{A}_c \omega^2 \sin^2 \phi. \dots (992) \end{aligned}$$

Углы ϕ и κ могутъ быть выражены функціями нѣкотораго угла, опредѣляющаго положеніе оси Z на данной плоскости. Означимъ черезъ θ уголъ между плоскостью HZ и плоскостью $HЗ$; это есть вмѣстѣ съ тѣмъ уголъ при вершинѣ H сферическаго треугольника $HЗЗ$, противолежащій сферической сторонѣ $ЗЗ$, равной ϕ ; другія двѣ стороны этого треугольника суть $HЗ = \epsilon$ и $HZ = \frac{\pi}{2}$; сферическій уголъ при $З$, противолежащій сторонѣ HZ , равенъ $(\delta - \kappa)$; по извѣстнымъ формуламъ сферической тригонометріи:

$$\cos \phi = \sin \epsilon \cos \theta, \quad \sin \phi \sin (\delta - \kappa) = \sin \theta.$$

Сравнивъ уравненіе (992, с) съ уравненіемъ

$$(\theta')^2 = 2 \frac{g}{R} (\cos \theta - \cos \theta_0),$$

которому удовлетворяютъ качанія круговаго математическаго маятника длины R , мы увидимъ, что колебанія оси Z совершаются по закону болѣе сложному, чѣмъ колебанія простаго маятника; но если пренебречь дробью $(\omega : g_0)$, то можно сказать, что *приблизительно продолжительность каждаго весьма малаго размаха оси Z равна:*

$$\pi \sqrt{\frac{M_c}{G_c g_0 \omega \sin \epsilon}} \dots \dots \dots (993)$$

Поэтому, если гироскопъ, изображенный на чертежѣ 104-мъ, будетъ подвѣшенъ такимъ образомъ, чтобы онъ могъ свободно вращаться вокругъ оси FF , неподвижной по отношенію къ землѣ, и если тѣлу M будетъ сообщено быстрое вращеніе g_0 вокругъ оси AB , то, вслѣдствіе вращенія земли вокругъ оси, ось AB будетъ совершать качанія около нѣкотораго положенія равновѣсія.

Если ось FF будетъ вертикальна, то есть перпендикулярна къ истинному горизонту мѣста наблюденій, то положеніе равновѣсія будетъ направлено по меридіональной линіи, а продолжительность малыхъ качаній будетъ равна:

$$\pi \sqrt{\frac{M_c}{G_c g_0 \omega \cos \Lambda}},$$

гдѣ Λ есть истинная широта мѣста наблюденій.

Если же ось FF будетъ перпендикулярна къ плоскости меридіана того мѣста, гдѣ совершаются наблюденія, то положеніе равновѣсія совпадаетъ съ направленіемъ оси міра, а продолжительность качаній будетъ равна:

$$\pi \sqrt{\frac{M_c}{G_c g_0 \omega}}.$$

Эти явленія показаль и объяснилъ Фуко.

Относительно силъ взаимодѣйствія, дѣйствующихъ между матерьяльными точками, замѣняющими атомы, дѣлаются обыкновенно слѣдующія предположенія.

Предположеніе E Предполагается, что силы эти слѣдуютъ относительно взаимно-находящихся между атомами. началу равенства и противоположности, т. е., что силы, дѣйствующія между атомами A и B , равны и прямопротивоположны.

Кромѣ того предполагается, что эти силы направлены по линіи, соединяющей точки, то есть атомы A и B , и что величина каждой изъ этихъ силъ равняется произведенію

$$m_A m_B f(r_{AB}),$$

гдѣ m_A и m_B суть массы атомовъ, а r_{AB} — разстояние между ними.

Кромѣ этихъ силъ, на атомы могутъ дѣйствовать еще и другія силы, исходящія изъ центровъ, лежащихъ внѣ разсматриваемаго тѣла.

При такихъ предположеніяхъ, теорія движенія и равновѣсія матерьяльнаго нетвердаго тѣла приводится къ вопросу механики системы матерьяльныхъ точекъ, къ которымъ приложены данныя силы.

§ 146. Шестъ такихъ дифференціальныхъ уравненій для каждой части тѣла, изъ которыхъ исключены величины всѣхъ внутреннихъ силъ этой части.

Представимъ себѣ всю систему матерьяльныхъ точекъ, замѣняющихъ атомы даннаго матерьяльнаго тѣла.

Выдѣлимъ мысленно какую либо часть тѣла, какую угодно и которую угодно.

Всю совокупность атомовъ, заключающихся внутри выдѣленной части, будемъ обозначать знакомъ Jn , а всю совокупность атомовъ остальной части тѣла — знакомъ Ex .

Атомъ части Jn будемъ обозначать буквою m съ надлежащимъ значкомъ внизу и сбоку ея, а атомъ части Ex — буквою μ , тоже съ

Эти шесть дифференціальныхъ уравненій будутъ таковы:

$$\sum_{Jn} m_i x_i'' = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(x_i - x_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} X_i \dots (994, a)$$

$$\sum_{Jn} m_i y_i'' = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(y_i - y_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} Y_i \dots (994, b)$$

$$\sum_{Jn} m_i z_i'' = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(z_i - z_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} Z_i \dots (994, c)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_x}{dt} = & \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(x_i y_k - y_i x_k)}{r_{ik}} + \\ & + \sum_{Jn} (y_i Z_i - z_i Y_i), \dots \dots \dots (994, d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_y}{dt} = & \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(x_i z_k - z_i x_k)}{r_{ik}} + \\ & + \sum_{Jn} (z_i X_i - x_i Z_i), \dots \dots \dots (994, e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_z}{dt} = & \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(y_i x_k - x_i y_k)}{r_{ik}} + \\ & + \sum_{Jn} (x_i Y_i - y_i X_i), \dots \dots \dots (994, f) \end{aligned}$$

гдѣ λ_x , λ_y и λ_z суть моменты количествъ движенія части Jn вокругъ осей X^{osz} , Y^{osz} и Z^{osz} .

Такія шесть дифференціальныхъ уравненій должны имѣть мѣсто, какъ для всего матерьяльнаго тѣла, такъ и для всякой части его, большой или малой.

§ 147. Радіусъ сферы дѣйствія частичныхъ силъ.

Произведеніе $m_i \mu_k f_{ik}(r_{ik})$, заключающееся въ предыдущихъ формулахъ, выражаетъ положительно-взятую величину отталкивающей силы или отрицательно-взятую величину притягательной силы, дѣйствующей между атомами m_i и μ_k .

гомъ слоѣ такой же толщины, прилежащемъ къ той же поверхности S со стороны Jn ; на чертежѣ 123-мъ изображены оба эти слоя, первый обозначенъ буквою β , второй — буквою α .

Такимъ образомъ оказывается, что частичныя силы, дѣйствующія со стороны части тѣла $E\alpha$ на часть Jn , приложены къ атомамъ слоя α и исходятъ изъ атомовъ слоя β .

§ 148. Напряженіе (Stress).

Выдѣлимъ мысленно изъ поверхности S какой либо элементъ ΔS весьма малыхъ размѣровъ.

Представимъ себѣ всю совокупность тѣхъ частичныхъ силъ, приложенныхъ къ атомамъ части слоя α , прилежащей къ элементу ΔS , направленія которыхъ пересекаютъ поверхность этого элемента.

Въ англійскомъ научномъ языкѣ существуетъ особый терминъ для наименованія этой совокупности силъ, а именно терминъ „Stress“, который мы переведемъ на русскій языкъ словомъ „напряженіе“; но намъ необходимо условиться относительно правильнаго употребленія этого термина.

Вышесказанную совокупность силъ мы будемъ называть *напряженіемъ, дѣйствующимъ сквозь площадку ΔS на часть тѣла Jn со стороны части $E\alpha$* ; вслѣдствіе равенства и противоположности взаимодѣйствій между атомами, *напряженіе, дѣйствующее сквозь ту же площадку на часть тѣла $E\alpha$ со стороны части тѣла Jn* , будетъ совокупностью силъ, равныхъ и противоположныхъ силамъ предыдущей совокупности.

Пусть A есть какая либо точка поверхности S , находящаяся внутри площади ΔS или на ея периметрѣ. Возстановимъ нормаль n изъ точки A къ поверхности S внаружу части Jn .

Составимъ сумму проецій на ось $X^{орт}$ всѣхъ силъ первой совокупности и раздѣлимъ эту сумму на величину площади элемента ΔS ; точно также поступимъ и съ суммами проецій этихъ силъ на двѣ другія оси; получимъ три отношенія:

$$\frac{\sum X}{\Delta S}, \quad \frac{\sum Y}{\Delta S}, \quad \frac{\sum Z}{\Delta S} \dots\dots\dots (995)$$

и могут изменяться съ измененіемъ и съ уменьшеніемъ размѣровъ его; при вровъ элемента, отношенія эти будутъ предѣльными значеніямъ, величины ко-го, къ какой точкѣ поверхности при-ошлася периферія элемента.

уменьшеніи размѣровъ элемента ΔS , и нмъ образомъ, чтобы точка A всегда ферія; пусть X_n , Y_n и Z_n суть пре-ь отношенія (995) приближаются при элемента ΔS , т. е.:

$$\left. \begin{aligned} S=0 &= X_n, \\ S=0 &= Y_n, \\ S=0 &= Z_n. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (996)$$

$$\sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2} \dots\dots\dots (997)$$

ю напряженія, дѣйствующаго на жости S , а направленіе, проведенное съ осями координатъ такіе углы, ко-ніямъ:

$$\frac{Y_n}{F_n}, \quad \frac{Z_n}{F_n},$$

напряженія.

и будемъ обозначать тѣмъ же знакомъ чину его; поэтому можемъ написать

$$\left. \begin{aligned}) &= X_n, \\) &= Y_n, \\) &= Z_n, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (998)$$

выражающія, что X_n, Y_n, Z_n суть проекціи напряженія F_n на оси координатъ, или составляющія его по этимъ осямъ.

§ 149. Выраженія проэкцій на оси координатъ главнаго вектора и главнаго момента напряженій, дѣйствующихъ на часть тѣла.

Если точка приложенія какой либо силы будетъ перенесена на какую либо длину вдоль по ея направленію, то черезъ это не измѣнится ни моментъ ея вокругъ какой нибудь оси, ни моментъ ея вокругъ какого либо центра.

Поэтому, при составленіи уравненій (994) мы вправѣ предположить, что точка приложенія каждой частичной силы, дѣйствующей изъ атома μ части E_n на атомъ t части J_n , перенесена изъ t , вдоль по направленію tm , въ точку пересѣченія длины tm съ поверхностью S ; черезъ это величины проэкцій главнаго вектора и главнаго момента частичныхъ силъ не измѣнятся, но измѣнится видъ выраженій этихъ величинъ, такъ какъ мѣстомъ приложенія частичныхъ силъ будетъ теперь считаться не слой α , а поверхность S .

Для того, чтобы составить новыя выраженія соответственныхъ членовъ уравненій (994), надо прежде всего представить себѣ, что вся поверхность S раздроблена на безчисленное множество элементовъ бесконечно-малыхъ размѣровъ, затѣмъ надо составить выраженія проэкцій на оси координатъ вектора и момента напряженій, приложенныхъ къ каждому элементу; эти выраженія будутъ заключать величины X_n, Y_n, Z_n . Составивъ надлежащія выраженія, останется только взять интегралы по всей поверхности.

Величины X_n, Y_n, Z_n , т. е. проэкціи на оси координатъ напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ поверхности S , суть функціи координатъ точекъ поверхности, но функціи не сплошныя; онѣ могли бы быть сплошными, если бы вещество было сплошнымъ въ дѣйствительности, а не состояло бы изъ атомовъ, раздѣленныхъ промежутками, и если бы частичныя силы дѣйствовали между всѣми точками слоя β и всѣми точками слоя α , а не между изолированными точками-атомами этихъ слоевъ.

$$\left. \begin{aligned} \iint (y_s Z_n - z_s Y_n) dS, \quad \iint (z_s X_n - x_s Z_n) dS, \\ \iint (x_s Y_n - y_s X_n) dS, \end{aligned} \right\} \dots (1000)$$

гдѣ x_s, y_s, z_s суть координаты какой либо точки элемента, а X_n, Y_n, Z_n — проеэкціи напряженія, дѣйствующаго въ этой точкѣ на часть тѣла J_n .

§ 150. Измѣренія напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ данной поверхности. Давленія, натяженія и тангенціальныя напряженія.

Всякія силы, приложенныя сплошнымъ образомъ къ какой либо поверхности, рассчитываются такъ сказать на единицу поверхности, а именно, для каждой точки поверхности вычисляется не величина силы, но величина нѣкотораго отношенія силы къ площади.

Расчетъ производится такимъ же образомъ, какъ показано въ § 148 относительно опредѣленія величины и направленія напряженія F_n , дѣйствующаго въ какой либо точкѣ поверхности съ той стороны, куда возстановлена положительное направленіе нормали n , на часть тѣла J_n .

Изъ формулъ (996), (997) и (998) видно, что величина напряженія F_n имѣетъ измѣренія отношенія силы къ площади, такъ что:

$$\text{единица напряженія } F_n = \frac{\text{единицѣ силы}}{(\text{единиц. длины})^2} \dots (1001)$$

Чтобы составить себѣ понятіе о значеніи этой единицы, представимъ себѣ такой случай, что часть поверхности S имѣетъ видъ плоскости, что напряженія, дѣйствующія во всѣхъ точкахъ этой части поверхности, равны и параллельны между собою и что главный векторъ напряженій, приложенныхъ къ каждой единицѣ площади этой части поверхности, равенъ единицѣ силы; тогда величина напряженія, дѣйствующаго въ каждой точкѣ этой части поверхности, будетъ равна единицѣ напряженій.

§ 151. Силы, приложенныя къ элементамъ объема сплошнаго тѣла.

Силы, приложенныя ко всѣмъ атомамъ тѣла и дѣйствующія извнѣ его, а также силы тяготѣнія, дѣйствующія между атомами его, мы будемъ называть *силами, приложенными къ элементамъ объема тѣла* или *проще объемными силами*.

Эти силы, приложенныя къ атомамъ сплошнаго тѣла, вводятся въ расчетъ слѣдующимъ образомъ.

Возьмемъ какую либо точку A тѣла и мысленно выдѣлимъ малый объемъ ΔO его, заключающій точку A внутри себя или на своей поверхности. Составимъ величины проекцій на оси координатъ главнаго вектора силъ, приложенныхъ ко всѣмъ атомамъ этого объема и раздѣлимъ эти величины на массу Δm объема ΔO ; получатся отношенія:

$$\frac{\Sigma X}{\Delta m}, \quad \frac{\Sigma Y}{\Delta m}, \quad \frac{\Sigma Z}{\Delta m},$$

величины которыхъ могутъ зависѣть отъ величины и вида выдѣленнаго объема ΔO тѣла. Представимъ себѣ, что мы выдѣляемъ все меньшіе и меньшіе объемы ΔO , заключающіе въ себѣ точку A ; по мѣрѣ приближенія величины объема къ нулю, величины вышесказанныхъ отношеній приближаются къ нѣкоторымъ предѣламъ, которые мы означимъ такъ: X_A, Y_A, Z_A ; слѣдовательно:

$$\left. \begin{aligned} X_A &= \text{предѣлу} \left[\frac{\Sigma X}{\Delta m} \right]_{\Delta O = 0} \\ Y_A &= \text{предѣлу} \left[\frac{\Sigma Y}{\Delta m} \right]_{\Delta O = 0} \\ Z_A &= \text{предѣлу} \left[\frac{\Sigma Z}{\Delta m} \right]_{\Delta O = 0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1003)$$

Величину:

$$\mathfrak{F}_A = + \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} \dots\dots\dots (1004)$$

величиной объемной силы въ точку A . На-
имено косинусами:

$$(\mathfrak{F}_A, Y) = \frac{Y_A}{\mathfrak{F}_A}, \cos(\mathfrak{F}_A, Z) = \frac{Z_A}{\mathfrak{F}_A}, \dots (1005)$$

направленіемъ этой силы; тогда предѣлы
внѣ прожекцій этой силы на оси координатъ,
ю этихъ осей.

функціи координатъ точки A и притомъ
такъ какъ въ промежуткахъ между атомами
мы будемъ предполагать, что эти функціи
о объема занимаемаго тѣломъ, которое мы бу-
сплошнымъ; такое предположеніе аналогично
анному относительно силъ поверхностныхъ.

Прожекции X , Y , Z объемной силы, дѣй-
ствующей въ точкахъ сплошнаго тѣла, пред-
полагаются сплошными функціями координатъ
этихъ точекъ.

оложеніи объемныхъ силъ \mathfrak{F} въ безконечно-
разнятся между собою безконечно-мало, какъ
направленію.

ѣ измѣренія ускоренія, такъ какъ она рав-
къ массѣ.

$$\text{пчинѣ } \mathfrak{F} = \frac{\text{единиц. силы}}{\text{единиц. массы}} \dots \dots \dots (1006)$$

мо сказать, что величины и направленія \mathfrak{F}
еличины и направленія тѣхъ ускореній, кото-
свободнаго тѣла при дѣйствіи объемныхъ
твовало ни частичныхъ силъ, ни вѣншихъ

и направленія \mathfrak{F} были одинаковы во всѣхъ
иныя силы были бы приложены къ нему одно-
прожекцій силы, приложенной ко всему тѣлу,

равнялись бы произведеніямъ $\mathcal{E}M$, $\mathcal{U}M$, $\mathcal{Z}M$, гдѣ M есть масса тѣла.

Такіе случаи однороднаго распредѣленія объемныхъ силъ встрѣчаются сравнительно рѣдко, болѣею частью величины и направленія \mathcal{E} неодинаковы даже въ малыхъ частяхъ тѣла.

Однако, по предполагаемой нами сплошности объемныхъ силъ, въ бесконечно-близкихъ точкахъ тѣла величины и направленія \mathcal{E} разнятся между собою бесконечно-мало; слѣдовательно, чѣмъ менѣе размѣры какого либо весьма малаго элемента тѣла, тѣмъ менѣе разнятся между собою ускоренія \mathcal{E} различныхъ точекъ его и тѣмъ распредѣленіе приложенной къ нему объемной силы однороднѣе.

По этимъ причинамъ проекціи на оси координатъ объемной силы, приложенной къ бесконечно-малому объемному элементу dO , выражаются такъ:

$$\mathcal{E}sdO + \alpha_1, \mathcal{U}sdO + \alpha_2, \mathcal{Z}sdO + \alpha_3,$$

а проекціи на оси координатъ момента этой силы — такъ:

$$(y\mathcal{Z} - z\mathcal{U})sdO + \alpha_4, (z\mathcal{X} - x\mathcal{Z})sdO + \alpha_5,$$

$$(x\mathcal{U} - y\mathcal{X})sdO + \alpha_6,$$

гдѣ x , y , z суть координаты какой либо точки внутри или на поверхности элемента dO , σ — плотность матеріи въ той же точкѣ, \mathcal{X} , \mathcal{U} , \mathcal{Z} — проекціи на оси координатъ объемной силы въ той же точкѣ, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ — бесконечно-малыя величины четвертаго или высшаго порядка малости.

§ 152. Новый видъ уравненій (994).

На основаніи всего того, что сказано въ §§ 147 — 151, уравненій (994) можно дать слѣдующій видъ:

$$\iiint \left(\frac{d^2x}{dt^2} - x \right) \sigma dO = \iint X_n dS, \dots (994, a, bis)$$

т. е. на $\Delta x \Delta y \Delta z$; затѣмъ предположимъ, что $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ приближаются къ нулю и посмотримъ, во что обратятся составленные нами уравненія въ предѣлѣ, т. е. при обращеніи $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ въ нуль.

При составленіи уравненій мы уже будемъ имѣть въ виду, что потому сдѣлаемъ переходъ къ предѣлу; поэтому, составляя первое изъ уравненій (994, bis), поступимъ слѣдующимъ образомъ.

Первую часть уравненія (994, a, bis), примѣненного ко взятому объему, мы напомнимъ такъ:

$$\left[\left(\frac{d^2 x}{dt^2} - X \right) \sigma + \epsilon \right] \Delta x \Delta y \Delta z,$$

гдѣ x есть координата точки M , σ — плотность матеріи тѣла въ этой точкѣ, X — проекція на ось X^{oxy} объемной силы въ этой точкѣ, а ϵ — малая величина, которая, при приближеніи къ предѣлу, обращается въ бесконечно-малую величину.

Вторая часть уравненія должна быть суммою проекцій на ось X^{oxy} напряженій, приложенныхъ къ поверхности параллелоипеда и дѣйствующихъ съ внѣшней стороны этой поверхности.

Поверхность параллелоипеда состоитъ: 1) изъ грани $a c_1 d_1 b_1$ (см. черт. 124-й), наружная нормаль которой направлена параллельно положительной оси X^{oxy} , 2) изъ грани $a_1 c d b$, наружная нормаль которой направлена параллельно отрицательной оси X^{oxy} , 3) изъ грани $b a_1 d_1 c_1$ (наружная нормаль имѣетъ направленіе положительной оси Y^{oxy}), 4) изъ грани $d c b_1 a$ (наружная нормаль имѣетъ направленіе отрицательной оси Y^{oxy}), 5) изъ грани $c b_1 d_1 a_1$ (наружная нормаль имѣетъ направленіе положительной оси Z^{oxy}) и 6) изъ грани $d a c_1 b$ (наружная нормаль имѣетъ направленіе отрицательной оси Z^{oxy}).

Проведемъ черезъ точку M три плоскости, перпендикулярныя къ осямъ координатъ; означимъ черезъ X_x, Y_x, Z_x проекціи на оси координатъ напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ M со стороны той части тѣла, которая находится по правую сторону плоскости $B C B_1 C_1$ (черт. 124), на часть тѣла, находящуюся по лѣвую сторону ея; означимъ еще черезъ X_y, Y_y, Z_y проекціи напряженія, дѣйствующаго

становится бесконечно-малою величиною *второго* порядка, но *относительно не первой*.

Если въ выраженіи (1007) сдѣлаемъ $(x_1 - x)$ равнымъ минусъ половинѣ Δx и произведемъ интегрированіе въ тѣхъ же предѣлахъ, то получимъ проэкцію на ось X^{oxy} напряженій, приложенныхъ къ грани $a_1 c d b$ и дѣйствующихъ со стороны тѣхъ частей тѣла, которыя прилежатъ къ грани съ правой стороны ея, на части тѣла находящіяся по лѣвую ея сторону; намъ же нужно имѣть выраженіе суммы проэкцій на ось X^{oxy} противоположныхъ напряженій, дѣйствующихъ на тѣ части параллелоипеда, которыя прилегаютъ къ грани $a_1 c d b$ и, стало быть, находятся по правую сторону ея; это сумма проэкцій выразится такъ:

$$-\left(X_x - \frac{\partial X_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \epsilon_2\right) \Delta y \Delta z,$$

гдѣ ϵ_2 есть величина того же порядка малости, какъ и ϵ_1 .

Слѣдовательно, сумма проэкцій на ось X^{oxy} напряженій, приложенныхъ къ гранямъ $(a c, d_1 b_1)$ и $(a_1 c d b)$ параллелоипеда, выразится такъ:

$$\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\Delta x}\right) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Подобнымъ же образомъ составимъ суммы проэкцій на ось X^{oxy} напряженій, приложенныхъ къ остальнымъ четыремъ гранямъ параллелоипеда.

Составивъ уравненіе, раздѣливъ обѣ части его на $\Delta x \Delta y \Delta z$, переходя къ предѣламъ (т. е. полагая что $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ приближаются къ нулю) и имѣя въ виду, что тогда ϵ и прочіе добавочные члены обращаются въ бесконечно-малыя величины перваго порядка, мы получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе для точки M :

$$\sigma \frac{d^2 x}{d s^2} = X \sigma + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \dots \dots \dots (1008, a)$$

Подобнымъ же образомъ, изъ уравненій (994, b, bis) и (994,

$$\sigma \frac{u^2}{dt^2} = 3\sigma + \frac{\partial L_x}{\partial x} + \frac{\partial L_y}{\partial y} + \frac{\partial L_z}{\partial z} \dots \dots \dots (1008, c)$$

идею точкою *M* здѣсь подразумѣвается всякая такая точка
малого тѣла, которая можетъ быть центромъ безконечно-малого
элементарнаго параллелоипеда, вполне заполненнаго матеріею тѣла;
итакъ, для всякой точки тѣла, хотя бы даже находя-
щейся безконечно близко къ его наружной поверхности, должны
быть удовлетворены уравненія вида (1008, а, b, c), заключающія:
— проекции на оси координатъ ускоренія этой точки,
— проекции на тѣ же оси объемныхъ силъ въ этой точкѣ
и производныя (по координатамъ) отъ проекцій напряже-
ній, дѣйствующихъ въ этой точкѣ на площадки, перпен-
дикулярныя къ осямъ координатъ.

Оставимъ теперь остальные три уравненія (994, d, e, f) въ
элементарному параллелоипеду.

Первую часть уравненія 994, d) напомнимъ такъ:

$$\left[\left(y \left(\frac{d^2 x}{dt^2} - 3 \right) - z \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - 9 \right) \right) \sigma + x \right] \Delta x \Delta y \Delta z,$$

есть малая величина, которая, при приближеніи къ предѣлу,
идетъ въ безконечно-малую величину.

Въ вычисленіи моментовъ напряженій мы примемъ во вниманіе,
например:

$$x_1(Z_x)_1 - z_1(Y_x)_1 = (y_1 - y)(Z_x)_1 - (z_1 - z)(Y_x)_1 + \\ + y(Z_x)_1 - z(Y_x)_1.$$

Подставивъ вмѣсто $(Z_x)_1, (Y_x)_1, \dots$ выраженія вида (1007),
и взявъ по площадямъ граней и составивъ сумму подобныхъ мо-

ментовъ для всѣхъ шести граней параллелоипеда, получимъ вторую часть уравненія (994, d) подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\left[Z_y - Y_z + y \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right) - \right. \\ \left. - z \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right) + x_1 \right] \Delta x \Delta y \Delta z,$$

гдѣ x_1 есть величина, которая, при приближеніи къ предѣлу, становится безконечно-малою.

Раздѣливъ обѣ части составленнаго равенства на $\Delta x \Delta y \Delta z$, принявъ во вниманіе полученныя уже прежде равенства (1008, b), (1008, c) и перейдя къ предѣламъ, найдемъ, что равенство (994, d) получить слѣдующій видъ:

$$Z_y = Y_z \dots \dots \dots (1008, d)$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$X_z = Z_x, \dots \dots \dots (1008, e)$$

$$Y_x = X_y \dots \dots \dots (1008, f)$$

изъ равенствъ (994, e, f).

Надо принять во вниманіе, что направленія осей $X^{орз}$, $Y^{орз}$ и $Z^{орз}$ могутъ быть измѣнены относительно тѣла, такъ что за эти оси можно принять три какія либо взаимно ортогональныя направленія; имѣя въ виду это замѣчаніе, мы можемъ изъ предыдущихъ уравненій (1008, d, e, f) вывести слѣдующее заключеніе.

Напряженія F_n и F_k , дѣйствующія въ точкѣ M сплошнаго тѣла на двѣ взаимно-ортогональныя площадки, находятся между собою въ такой зависимости, что:

$$F_n \cos(F_n, k) = F_k \cos(F_k, n), \dots \dots \dots (1009)$$

гдѣ n и k означаютъ взаимно-ортогональныя направленія нормалей обѣихъ площадокъ.

Первая часть уравненія (994, a, bis), приѣнненнаго къ этому тетраэдру, можетъ быть написана такъ:

$$\left[\left(\frac{d^2 x}{ds^2} - \chi \right) \sigma + \alpha \right] \frac{\Delta x \Delta y \Delta s}{6},$$

гдѣ α есть величина, дѣлающаяся безконечно-малою при приближеніи длинъ Δx , Δy , Δs къ нулю.

Составляя вторую часть этого уравненія подобнымъ же образомъ, какъ показано въ предыдущемъ параграфѣ, получимъ слѣдующій результатъ:

$$(X_n + \alpha_1) \omega - (X_x + \alpha_2) \frac{\Delta y \Delta s}{2} - (X_y + \alpha_3) \frac{\Delta s \Delta x}{2} - \\ - (X_z + \alpha_4) \frac{\Delta x \Delta y}{2},$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ суть величины того же рода, какъ α .

Написавъ равенство, раздѣливъ обѣ части его на ω и предположивъ, что Δx , Δy , Δs приближаются къ нулю, получимъ слѣдующее равенство:

$$X_n = X_x \lambda + X_y \mu + X_z \nu \dots \dots \dots (1010, a)$$

Приѣннивъ къ тетраэдру подобнымъ же образомъ равенства (994, b, bis) и (994, c, bis), получимъ еще два равенства:

$$Y_n = Y_x \lambda + Y_y \mu + Y_z \nu, \dots \dots \dots (1010, b)$$

$$Z_n = Z_x \lambda + Z_y \mu + Z_z \nu \dots \dots \dots (1010, c)$$

Приѣннивъ къ тетраэдру равенства (994, d, e, f), получимъ такія равенства, которыя обращаются въ тождества на основаніи уравненій (1010).

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что если будемъ знать значенія шести величинъ:

$$X_x, Y_y, Z_z, Y_x, Z_x, X_y$$

для какой либо точки сплошнаго тѣла, то, при помощи формулъ (1010), будемъ имѣть возможность опредѣлить величину

§ 155. Сплошное тѣло, имѣющее видъ весьма тонкой нити или проволоки. Линейная плотность. Расчетъ силъ на единицу длины оси нити.

Подъ именемъ тонкой нити или проволоки подразумѣвается такое сплошное тѣло, наружная поверхность котораго можетъ быть представлена слѣдующимъ образомъ.

Вообразимъ себѣ отрѣзокъ кривой линіи какого бы то ни было вида; пусть A и B суть концы этого отрѣзка. Положеніе точки M , находящейся на этой кривой, будемъ выражать разстояніемъ s , считаемымъ отъ точки A вдоль по кривой линіи до точки M ; разстоянія, отсчитываемыя въ направленіи отъ A къ B , будемъ выражать положительными величинами.

Возьмемъ какую либо плоскую площадку неизмѣняемаго вида и положимъ, что эта площадка движется такъ, что нѣкоторая точка M ея всегда остается на вышеказанной кривой, нѣкоторая линія MM ея совпадаетъ съ главною нормалью кривой, а плоскость площадки совпадаетъ съ нормальною плоскостью кривой. Поверхность, образуемая слѣдомъ периметра этой площадки при движеніи точки M вдоль всей кривой, представляетъ *боковую поверхность правильной нити или проволоки, поперечное сѣченіе которой одинаково по всей длинѣ*; на концахъ нить или проволока ограничена плоскостями нормальными къ кривой.

Мы всегда будемъ предполагать, что *точкою M служитъ центръ инерціи площадки, очерчивающей боковую поверхность проволоки или нити*; направляющую кривую, образуемую центрами инерціи всѣхъ сѣченій нити или проволоки, мы будемъ называть *осью этой нити или проволоки*.

При томъ же видѣ оси проволоки и при томъ же видѣ образующей площадки, мы можемъ получить безчисленное множество другихъ формъ боковыхъ поверхностей; стоитъ только перемѣщать образующую площадку такимъ образомъ, чтобы линія MM не совпадала съ главными нормальми кривой, а составляла бы съ ними уголъ, измѣняющійся по тому или другому закону. Такія проволоки или нити мы условимся называть *неправильными проволоками съ поперечнымъ*

Составимъ главный векторъ всѣхъ объемныхъ силъ, приложенныхъ къ части нити, простирающейся отъ конца A до поперечнаго сѣченія въ точкѣ M , и всѣхъ внѣшнихъ напряженій, приложенныхъ къ боковой поверхности этой части нити; означимъ черезъ X , Y , Z проеэкціи этого главного вектора на оси координатъ.

X , Y , Z суть функціи отъ длины s , выражающей положеніе точки M на оси нити; кромѣ того, онѣ же суть функціи параметровъ той кривой линіи, которую образуетъ ось нити.

Производныя отъ этихъ функцій по s :

$$\frac{\partial X}{\partial s} = X_s, \quad \frac{\partial Y}{\partial s} = Y_s, \quad \frac{\partial Z}{\partial s} = Z_s, \dots \dots (1012)$$

мы будемъ называть *проеэкціями на оси координатъ силы, дѣйствующей въ точкѣ M оси нити*; величина этой силы выражается положительно-взятымъ корнемъ:

$$F_s = + \sqrt{X_s^2 + Y_s^2 + Z_s^2}, \dots \dots (1013)$$

а направленіе ея опредѣляется отношеніями:

$$\frac{X_s}{F_s} = \cos(F_s, X), \quad \frac{Y_s}{F_s} = \cos(F_s, Y), \quad \frac{Z_s}{F_s} = \cos(F_s, Z), \dots (1014)$$

выражающими величины косинусовъ угловъ, составляемыхъ этимъ направленіемъ съ осями координатъ.

X_s , Y_s , Z_s суть функціи отъ s и отъ параметровъ оси нити; величины ихъ имѣютъ измѣренія силы, дѣленной на длину.

Взявъ значенія X_s , Y_s , Z_s для какой либо точки M оси нити и помноживъ ихъ на ds , получимъ проеэкціи на оси координатъ главного вектора объемныхъ силъ, приложенныхъ къ элементу нити, заключающемуся между поперечными сѣченіями s и $s + ds$, и внѣшнихъ напряженій, приложенныхъ къ боковой поверхности этого элемента.

Такой способъ расчета силъ можетъ быть названъ расчетомъ на единицу длины оси нити.

со стороны тѣхъ частей нити, которыя ближе къ A , чѣмъ это сѣченіе и 2) сумма проэкцій напряженій, дѣйствующихъ сквозь второе поперечное сѣченіе со стороны тѣхъ частей нити, которыя дальше отъ A , чѣмъ это сѣченіе; первая сумма равна ($-X_s$), вторая же, вслѣдствіе сплошности функціи X_s , можетъ быть выражена такъ:

$$(X_s)_2 = X_s + \frac{\partial X_s}{\partial s} \Delta s + \frac{\partial^2 X_s}{\partial s^2} \frac{(\Delta s)^2}{1.2} + \dots$$

Составивъ уравненіе, раздѣливъ обѣ части равенства на Δs и предположивъ, что Δs уменьшается до нуля, причемъ, конечно, точка C приближается къ точкѣ M до совпаденія съ нею, получимъ слѣдующее уравненіе для точки M оси нити:

$$x \frac{d^2 x}{dt^2} = X_s + \frac{\partial X_s}{\partial s} \dots \dots \dots (1015, a)$$

Подобнымъ же образомъ изъ уравненій (994, b, c) получимъ два другія уравненія:

$$y \frac{d^2 y}{dt^2} = Y_s + \frac{\partial Y_s}{\partial s} \dots \dots \dots (1015, b)$$

$$z \frac{d^2 z}{dt^2} = Z_s + \frac{\partial Z_s}{\partial s} \dots \dots \dots (1015, c)$$

Точка M есть которая либо изъ точекъ оси нити; слѣдовательно, для всякой точки оси нити должны быть удовлетворены уравненія вида (1015), заключающія:

*проэкціи ускореній этой точки на оси координатъ,
проэкціи на тѣ же оси силы X_s для этой точки
и производныя по s проэкцій напряженій, приложенныхъ
къ поперечному сѣченію, проведенному черезъ ту же точку.*

§ 157. Примѣненіе уравненій (994, d, e, f) къ элементу вполне гибкой нити.

Составимъ уравненіе (944, d) для элемента длины Δs , но будемъ брать моменты не вокругъ начала координатъ, но вокругъ точки M , координаты которой означимъ черезъ x, y, z .

Такимъ образомъ окажется, что уравненіе (944, d) будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\frac{d\epsilon_x}{dt} - \delta_x = \left(\frac{\partial L_s}{\partial s} - Z_s \frac{\partial y}{\partial s} + Y_s \frac{\partial z}{\partial s} \right) \Delta s + \alpha_1, \dots (1016, a)$$

гдѣ α_1 есть величина, заключающая вторыя и высшія степени Δs .

Теперь мы ограничимъ общность нашихъ выводовъ и ограничимся примѣненіемъ составленныхъ нами уравненій къ вполне гибкимъ нитямъ съ свѣченіями безконечно-малыхъ размѣровъ.

1) Мы предположимъ, что размѣры поперечныхъ стѣнѣй нити столь ничтожны, что можно принять ихъ безконечно-малыми, и что объемныя силы и вѣщныя, дѣйствующія на боковую поверхность, напряженія приложены столь сплошнымъ образомъ, что предѣлы величинъ $\delta_x, \delta_y, \delta_z, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ и производныхъ $\epsilon'_x, \epsilon'_y, \epsilon'_z$ суть безконечно-малыя величины втораго или высшаго порядка малости.

2) Мы предположимъ нить вполне гибкою, такъ что ни въ какомъ изъ своихъ стѣнѣй она не представляетъ никакого сопротивленія самому крутому изгибу или даже сгибу оси ея подъ какимъ либо угломъ; для этого необходимо, чтобы моменты напряженій, приложенныхъ къ каждому поперечному стѣнѣю, вокругъ осевой точки этого стѣнѣя былъ равенъ нулю, т. е., чтобы L_s, M_s, N_s были равны нулю для всѣхъ точекъ оси нити.

Примѣнивъ предыдущее уравненіе (1016, a) къ элементу такой вполне гибкой нити, раздѣливъ обѣ части уравненія на Δs и предположивъ, что длина элемента приближается къ нулю, получимъ, въ предѣлѣ, уравненіе:

$$Z_s \frac{\partial y}{\partial s} = Y_s \frac{\partial z}{\partial s} \dots \dots \dots (1017, a)$$

Составивъ и примѣнивъ подобнымъ же образомъ два остальныхъ уравненія, получимъ:

$$X_s \frac{\partial z}{\partial s} = Z_s \frac{\partial x}{\partial s}, \quad Y_s \frac{\partial x}{\partial s} = X_s \frac{\partial y}{\partial s} \dots \dots \dots (1017, b, c)$$

ГЛАВА XIII.

О положеніяхъ равновѣсія системы матерьяльныхъ точекъ, твердыхъ тѣлъ и гибкихъ нитей.

§ 159. Замѣчанія относительно числа уравненій равновѣсія и числа связей.

Въ § 79-мъ на страницѣ 398-й объяснено было значеніе терминовъ: „положеніе равновѣсія системы матерьяльныхъ точекъ“, „уравненія равновѣсія силъ и реакцій связей“, „условія равновѣсія задаваемыхъ силъ“.

Число уравненій равновѣсія данной системы матерьяльныхъ точекъ, связанныхъ удерживающими связями, равняется числу координатъ всѣхъ точекъ (а именно $3n$, если n есть число точекъ системы).

Число связей (p), связывающихъ точки данной системы, можетъ быть менѣе, равно или болѣе числа $3n$.

А) Когда (p) менѣе ($3n$), то можно получить n ($n = 3n - p$) условий равновѣсія задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ данной системѣ.

Если задаваемые силы не удовлетворяютъ хотя одному изъ этихъ условий равновѣсія, то данная система не можетъ имѣть положеній равновѣсія при заданныхъ силахъ.

Если проеціи задаваемыхъ силъ на оси координатъ суть функціи координатъ точекъ системы, то система можетъ имѣть одно или нѣсколько положеній равновѣсія; координаты всѣхъ точекъ при каждомъ изъ этихъ положеній системы должны быть найдены чрезъ рѣшеніе $3n$ уравненій (а именно, n условий равновѣсія и p уравненій связей); сколько эта совокупность уравненій имѣетъ рѣшеній, столько данная система матерьяльныхъ точекъ имѣетъ положеній равновѣсія.

Если положенія системы будутъ выражены не въ декартовыхъ координатахъ, но помощью какихъ либо другихъ координатныхъ параметровъ, то число уравненій равновѣсія, выраженныхъ въ этихъ параметрахъ, будетъ равно числу параметровъ; а если число послѣднихъ будетъ равно

1

1

и между каждыми двумя изъ этихъ точекъ дѣйствуютъ взаимныя притяженія, пропорціональныя произведенію изъ массъ ихъ и изъ разстоянія между ними. Опредѣлить положеніе равновѣсія системы и реакціи связей.

Означимъ черезъ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ величины множителей, соответствующихъ связямъ; составимъ уравненія равновѣсія:

$$\begin{aligned} -\mu^2 m_1 M x_1 + \lambda_1 (y_2 - y_1) + \lambda_2 m_1 &= 0, \\ -\mu^2 m_1 M y_1 - \lambda_1 (x_2 - x_1) + \lambda_2 m_1 + \lambda_4 &= 0, \\ -\mu^2 m_2 M x_2 + \lambda_1 (y_2 - y_1) + \lambda_2 m_2 &= 0, \\ -\mu^2 m_2 M y_2 - \lambda_1 (x_2 - x_1) + \lambda_2 m_2 &= 0, \\ -\mu^2 m_3 M x_3 - \lambda_1 (y_2 - y_1) + \lambda_2 m_3 &= 0, \\ -\mu^2 m_3 M y_3 + \lambda_1 (x_2 - x_1) + \lambda_2 m_3 &= 0; \quad M = m_1 + m_2 + m_3; \end{aligned}$$

въ этихъ уравненіяхъ должно подставить $y_1 = 0$; кромѣ того, три изъ координатъ x_1, x_2, y_2, x_3, y_3 могутъ быть выражены функціями двухъ остальныхъ, на основаніи имѣющихся уравненій связей.

Условіи равновѣсія должно быть два ($6 - 4 = 2$); одно изъ нихъ получимъ, помноживъ третье изъ уравненій равновѣсія на m_2 , пятое — на m_3 , вычтя одно изъ другаго и принявъ во вниманіе уравненіе третьей связи; получится: $x_2 = x_3$.

Теперь можемъ уже выразить четыре координаты функціе пятой, а именно:

$$\begin{aligned} y_2 &= -y_3 \frac{m_2}{m_3}, \quad x_1 = -x_3 \frac{m_2 + m_3}{m_1}; \quad x_2 = x_3, \\ y_3 &= \frac{\alpha}{\alpha_2} \frac{m_1 m_2}{M(m_2 + m_3)}. \end{aligned}$$

Прежде, чѣмъ составить послѣднее условіе равновѣсія, сложимъ 4-е и 6-е уравненія равновѣсія; получимъ $\lambda_2 (m_2 + m_3) = 0$, откуда слѣдуетъ, что $\lambda_2 = 0$.

Поэтому 6-е уравненіе равновѣсія можно представить такъ:

$$\lambda_1 x_2 = \mu^2 m_3 m_1 y_2.$$

Исключивъ изъ нихъ λ_1 и λ_2 и выразивъ y_1 въ x_1 и y_2 въ x_2 , получимъ условія равновѣсія:

$$mgx_1 - 2p\mu^2 \frac{2p^2 + x_1(x_1 + x_2)}{(x_1 - x_2)(4p^2 + (x_1 + x_2)^2)} = 0,$$

$$mgx_2 + 2p\mu^2 \frac{2p^2 + x_2(x_1 + x_2)}{(x_1 - x_2)(4p^2 + (x_1 + x_2)^2)} = 0,$$

изъ которыхъ можно вывести слѣдующія два уравненія:

$$(x_1 + x_2) \left(mg - \frac{2p\mu^2}{4p^2 + (x_1 + x_2)^2} \right) = 0,$$

$$2mgx_1x_2 + 2p\mu^2 \frac{2p^2}{4p^2 + (x_1 + x_2)^2} = 0.$$

Изъ этихъ уравненій получимъ два рѣшенія:

$$1) \quad x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 = -x_2 = \mu \sqrt{\frac{p}{2mg}}, \quad y_1 = y_2,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{mg}{2p}.$$

$$2) \quad x_1 + x_2 = \sqrt{\frac{2p}{mg}} \sqrt{\mu^2 - 2ptg}, \quad x_1x_2 = -p^2,$$

$$\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{mg}{p}.$$

Примѣръ 124-й. Три тяжелыя матерьяльныя точки m_1, m_2, m_3 находятся въ плоскости XU на одной прямой линіи въ неизмѣнныхъ разстояніяхъ одна отъ другой:

$$(x_3 - x_1)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_3 - y_1) = 0,$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 - l_{13}^2 = 0,$$

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 - l_{23}^2 = 0;$$

кромя того, точка m_3 (находящаяся между m_1 и m_2 , см. черт. 127), связана съ началомъ координатъ O гибкою нерастяжимою нитью длины L :

$$L^2 - x_3^2 - y_3^2 \geq 0,$$

Исключивъ изъ 1-го и 2-го величину λ_2 , а изъ 3-го и 4-го величину λ_3 , при помощи уравненія первой связи, получимъ:

$$-\lambda_1 l_{22}^2 + \lambda_5 x_5 = m_1 g x_1, \quad \lambda_1 l_{12}^2 - \lambda_5 y_5 = m_2 g (x_2 - x_1).$$

Изъ этихъ четырехъ равенствъ получимъ слѣдующія выраженія для λ_5 и λ_6 :

$$\lambda_5 = g \left(m_1 + m_2 \frac{l_{22}}{l_{22}^2 - l_{12}^2} + m_2 \frac{l_{22}^2}{l_{22}^2 - l_{12}^2} \right),$$

$$\lambda_6 = g \frac{x_1 l_{12} (m_2 (l_{12} + l_{22}) + m_1 l_{12})}{l_{22}^2 - l_{12}^2},$$

а затѣмъ можемъ вывести слѣдующее выраженіе для λ_4 :

$$\lambda_4 = \frac{g}{2} \frac{m_2 (l_{12} + l_{22}) + m_1 l_{12}}{\sqrt{(l_{22}^2 - l_{12}^2) (l_{22}^2 - L^2)}}.$$

Для того, чтобы система могла быть въ покоѣ, необходимо, чтобы эти три множителя не были менѣ нуля, а это требуетъ, чтобы l_{22} было болѣе l_{12} и болѣе L .

Примѣры системъ съ излишнимъ числомъ связей будутъ приведены послѣ.

§ 160. Условія равновѣсія силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.

Разсмотримъ условія равновѣсія свободнаго твердаго тѣла.

Въ началѣ главы XI (стр. 536 — 537) было показано, что для такого тѣла $n = 6$, т. е., что число степеней свободы его равно шести; отсюда слѣдуетъ, что таково же число условій его равновѣсія.

Эти условія можно получить изъ шести уравненій (616, A) и (641) (стр. 537) движенія свободнаго твердаго тѣла, если принять во вниманіе, что ускоренія всѣхъ точекъ тѣла должны быть равны нулю, когда оно находится въ положеніи равновѣсія; тогда получатся равенства:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n = 0, \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{i=n} X_i = 0, \quad (1019, a)$$

противоположны, но и вмѣстѣ съ тѣмъ направлены по линіи, соединяющей точки ихъ приложенія; вслѣдствіе этого въ первыхъ частяхъ полученныхъ равенствъ останутся только суммы проэкцій моментовъ задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу, слѣдовательно, равенства эти будутъ ни что иное, какъ: (1019, d, e, f).

Наконецъ, условія равновѣсія (1019) могутъ быть получены еще изъ равенства (567, b) (стр. 399), выражающаго такъ называемое начало возможныхъ перемѣщеній; для этого надо въ равенствѣ (567, b) замѣнить варьяціи δx_i , δy_i , δz_i выраженіями, приведенными въ формулахъ (750) на стр. (539), а затѣмъ приравнять нулю коэффиціенты независимыхъ варьяцій; получимъ равенства (1019, a, b, c) и три равенства такого вида, какъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} ((y_i - y_0) Z_i - (z_i - z_0) Y_i) = 0,$$

или, иначе:

$$L_x - y_0 B_z + z_0 B_y = 0,$$

изъ которыхъ, на основаніи равенствъ (1019, a, b, c), слѣдуютъ равенства (1019, d, e, f).

Значеніе условій (1019) можно выразить слѣдующими словами:

Для того, чтобы силы, приложенныя къ свободному твердому тѣлу взаимно уравновѣшивались чрезъ его посредство, необходимо, чтобы ихъ главный векторъ и главный моментъ (вокругъ какой угодно точки) были равны нулю.

§ 161. Условіе, при которомъ совокупность силъ, приложенныхъ къ свободному твердому тѣлу, можетъ быть уравновѣшена одною силою.

Положимъ, что силы, приложенныя къ точкамъ свободнаго твердаго тѣла, не уравновѣшиваются между собою, т. е., что всѣ или нѣкоторые изъ шести величинъ:

$$B_x, B_y, B_z, L_x, L_y, L_z$$

не равны нулю; спрашивается, нельзя ли уравновѣсить эту совокупность силъ одною силою, приложенною къ нѣкоторой точкѣ того же тѣла?

Означимъ черезъ X, Y, Z проекціи искомой силы на оси координатъ и черезъ x, y, z координаты точки ея приложенія.

Чтобы данная совокупность силъ уравнилась этою силою, необходимо, чтобы были удовлетворены равенства:

$$\left. \begin{aligned} X + B_x &= 0, \quad Y + B_y = 0, \quad Z + B_z = 0, \\ L_x + yZ - zY &= 0, \quad L_y + zX - xZ = 0, \quad L_z + xY - yX = 0 \end{aligned} \right\} (1020)$$

Изъ нихъ можно составить слѣдующее равенство:

$$\begin{aligned} B_x L_x + B_y L_y + B_z L_z &= X(yZ - zY) + \\ &+ Y(xZ - zX) + Z(yX - xY), \end{aligned}$$

вторая часть котораго, очевидно, равна нулю; поэтому и первая часть его должна быть равна нулю, если данную совокупность силъ можно уравнивать одною силою.

Слѣдовательно, для того, чтобы данную совокупность силъ, приложенныхъ къ свободному твердому тѣлу, можно было уравнивать одною силою, необходимо, чтобы было удовлетворено условіе:

$$B_x L_x + B_y L_y + B_z L_z = 0, \dots\dots\dots (637)$$

т. е., чтобы главный моментъ и главный векторъ данной совокупности силъ были взаимно перпендикулярны и чтобы при томъ главный векторъ не былъ равенъ нулю.

Если условіе это удовлетворено данною совокупностью силъ, то какъ найти величину, направленіе и точку приложенія уравнивающей силы?

Величина и направленіе этой силы опредѣляются первыми тремя равенствами (1020); изъ нихъ слѣдуетъ, что искомая сила равна и прямопротивоположна главному вектору данной совокупности силъ.

Чтобы опредѣлить мѣсто приложенія уравнивающей силы, припомнимъ конецъ параграфа 94-го (стр. 454), гдѣ сказано, что если главный векторъ и главный моментъ данной совокупности силъ взаимно перпендикулярны, то главный моментъ этой совокупности вокругъ центра, находящагося на центральной оси, равенъ нулю; припомнимъ, кромѣ того, формулы (633) на стр. 451-й.

Пусть x_4, y_4, z_4 суть координаты какой либо точки центральной оси; такъ какъ главный моментъ совокупности силъ вокругъ этой точки равенъ нулю, то, применивъ формулы (633) къ этой точкѣ, получимъ:

$$0 = L_x + z_4 B_y - y_4 B_z; \quad 0 = L_y + x_4 B_z - z_4 B_x;$$

$$0 = L_z + y_4 B_x - x_4 B_y.$$

Изъ этихъ равенствъ и изъ равенствъ (1020) получимъ слѣдующія уравненія, служащія для опредѣленія величинъ координатъ точки приложенія уравнивающей силы:

$$\frac{x - x_4}{B_x} = \frac{y - y_4}{B_y} = \frac{z - z_4}{B_z};$$

такъ какъ это суть уравненія центральной оси, то мы можемъ сказать слѣдующее:

Если данная совокупность силъ, приложенныхъ къ свободному твердому тѣлу, удовлетворяетъ условію (637), причемъ главный векторъ ея не равенъ нулю, то ее можно уравновѣсить одною силою, приложенною къ одной изъ тѣхъ точекъ твердаго тѣла, которыя находятся на центральной оси совокупности силъ; направленіе уравнивающей силы должно быть противоположно направленію главнаго вектора (т. е. сила должна быть направлена вдоль по центральной оси), а величина ея должна быть равна величинѣ главнаго вектора.

Найти положеніе центральной оси данной совокупности силъ весьма легко; принявъ во вниманіе указанную на страницѣ 453-й аналогію между теорією скоростей точекъ неизмѣняемой среды и теорією главныхъ моментовъ совокупности силъ, мы можемъ руковод-

дой силы перенесена на какую угодно длину вдоль по направлению силы или по направлению противоположному; черезъ это видъ условій не измѣнится, но могутъ быть достигнуты нѣкоторыя упрощенія въ выводахъ условій и формулъ.

Воспользуемся этимъ приемомъ въ слѣдующемъ вопросѣ:

Примѣръ 125-й. Тяжелый однородный стержень AB длины $2l$ опирается однимъ концомъ A на линію OD (черт. 129), наклоненную подъ угломъ J_1 къ горизонту, другимъ концомъ B — на линію OE , наклоненную подъ угломъ $(180^\circ - J_2)$ къ горизонту; опредѣлить положеніе равновѣсія стержня.

Къ стержню приложены слѣдующія силы и реакціи: 1) силы тяжести, которыя могутъ быть замѣнены вѣсомъ стержня, приложеннымъ къ его центру инерціи, 2) реакція λ_1 линіи OD , дѣйствующая въ точкѣ A по направленію перпендикуляра AK , 3) реакція λ_2 линіи OE , дѣйствующая въ точкѣ B по направленію перпендикуляра BK ; точка K есть точка пересѣченія обоихъ перпендикуляровъ.

Когда стержень покоится, тогда можемъ мысленно перенести точки приложенія реакцій λ_1 и λ_2 въ точку K , предполагая, что эта точка неизмѣнно связана со стержнемъ AB .

Чтобы положеніе стержня было положеніемъ равновѣсія, необходимо, чтобы равнодѣйствующая KA реакцій $K\lambda_1$ и $K\lambda_2$, перенесенныхъ въ точку K , уравнивалась съ вѣсомъ CG стержня AB чрезъ посредство воображаемаго неизмѣняемаго стержня CK , скрѣпляющаго точки C и K .

Силы, приложенныя къ концамъ свободнаго неизмѣняемаго стержня, уравниваются только тогда, когда онѣ равны, прямопротивоположны и направлены вдоль по стержню или по его продолженіямъ.

Слѣдовательно, для равновѣсія стержня AB необходимо, чтобы точка K была на одной вертикальной линіи съ точкою C , какъ и представлено на чертежѣ 129-мъ.

Такъ какъ линія KC , при положеніи равновѣсія стержня AB , должна быть вертикальна, то уголъ AKC тогда долженъ быть равенъ J_1 , а уголъ $BKC = J_2$.

Означимъ черезъ x уголъ HBA , составляемый стержнемъ BA съ горизонтомъ; очевидно, что уголъ CBK выразится тогда такъ:

$\left(\frac{\pi}{2} - J_2 - x\right)$, а уголъ CAK — такъ: $\left(\frac{\pi}{2} - J_1 + x\right)$.

известнымъ формуламъ прямолинейной тригонометріи, приложенъ къ треугольникамъ AKC и BKC , составимъ равенства:

$$\frac{\overline{CK}}{\overline{CA}} = \frac{\cos(J_1 - x)}{\sin J_1}, \quad \frac{\overline{CK}}{\overline{CB}} = \frac{\cos(J_2 + x)}{\sin J_2};$$

акъ точка C находится на серединѣ длины стержня AB , то изъ равенствъ можемъ вывести слѣдующее:

$$\frac{\cos(J_1 - x)}{\sin J_1} = \frac{\cos(J_2 + x)}{\sin J_2},$$

него найдемъ:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} (\cotg J_2 - \cotg J_1) = \frac{\sin(J_1 - J_2)}{2 \sin J_1 \sin J_2}.$$

читаемъ нужнымъ замѣтить, что примѣненіе сказаннаго приема просамъ объ опредѣленіи условій равновѣсія покоящихся твердыхъ вполнѣ законно и не можетъ повести къ невѣрнымъ заключеніямъ; дальнѣйшія же примѣненія его должно дѣлать съ напущеніемъ осмотрительности, а иногда примѣнять его не слѣдуетъ.

Такъ, напримѣръ, примѣненіе этого приема при разсмотрѣніи и устойчивости равновѣсія можетъ привести къ совершенно инымъ результатамъ.

163. Пара силъ.

братимъ теперь вниманіе на такія совокупности силъ, главный изъ которыхъ равенъ нулю, а главный моментъ не равенъ нулю. Простейшая совокупность этого рода состоитъ изъ двухъ силъ и прямопротивоположныхъ, но направленныхъ не по линіи, соединяющей точки ихъ приложенія; такая совокупность двухъ силъ вѣтся *парою силъ*.

если главный векторъ совокупности силъ равенъ нулю, то главный моментъ ея (если онъ не равенъ нулю), обладаетъ тѣмъ важнымъ свойствомъ, что величина и направленіе его не зависятъ отъ выбора λ моментовъ; въ самомъ дѣлѣ, изъ формулъ (633) (стр. 451) есть, что если главный векторъ совокупности силъ равенъ нулю, то главный моментъ ея вокругъ какого угодно центра имѣетъ ту же

самую величину и то же самое направлѣніе, какъ и главный моментъ вокругъ начала координатъ.

Тѣмъ же качествомъ обладаетъ и главный моментъ пары силъ, называемый просто *моментомъ пары*.

Изъ этого слѣдуетъ, что если за центръ моментовъ возьмемъ точку приложенія одной изъ силъ пары, то величина и направлѣніе момента другой силы представятъ величину и направлѣніе момента пары.

Слѣдовательно, величина момента пары равняется произведенію FD , гдѣ D есть длина кратчайшаго разстоянія между силами, а F — величина каждой изъ силъ; моментъ пары направленъ перпендикулярно къ плоскости, проведенной черезъ обѣ силы.

Разстояніе D называется *плечомъ пары*, а плоскость — заключающая обѣ силы, *плоскостью пары*; если изъ какой либо точки кратчайшаго разстоянія D возстановить длину, изображающую моментъ пары, то, съ конца этой длины, обѣ силы пары будутъ казаться дѣйствующими слѣва на право (см. черт. 130).

§ 164. Совокупность силъ, эквивалентная парѣ силъ.

Если къ свободному твердому тѣлу приложена такая совокупность силъ, главный векторъ которой равенъ нулю, а главный моментъ не равенъ нулю, то совокупность эта, очевидно, можетъ быть уравновѣшена одною парю силъ, моментъ которой долженъ быть равенъ и противоположенъ главному моменту данной совокупности.

Здѣсь должно замѣтить, что, исключая величины момента уравновѣшивающей пары и направлѣнія момента ея, все остальное относящееся къ строенію пары, остается произвольнымъ; такъ что:

1) Плоскость пары можетъ быть выбрана по произволу, лишь бы она была перпендикулярна къ направлѣнію главнаго момента данной совокупности силъ.

2) Величины (равныхъ и противоположныхъ) силъ пары произвольны, но кратчайшее разстояніе между ними должно быть равно главному моменту совокупности силъ, дѣленному на величину одной силъ пары.

3) Въ избранной плоскости, направленія силъ пары могутъ быть произвольны.

4) Наконецъ, остается еще произвольнымъ выборъ точекъ приложенія силъ пары.

Слѣдовательно, данная совокупность силъ можетъ быть уравновѣшена различными парами силъ, разнообразными до безконечности, отъ того, что моменты ихъ одинаковы по величинѣ и по направленію; всѣ такія пары, моменты которыхъ одинаковы по величинѣ и по направленію, называются *эквивалентными между собою силами*.

Вообще, двѣ какія либо совокупности силъ называются эквивалентными между собою, если, будучи порознь приложены къ одному и тому же свободному твердому тѣлу, онѣ могутъ быть уравновѣшены тѣ же совокупностью силъ, приложенною къ нему же.

Всякая пара силъ, приложенная къ свободному твердому тѣлу, можетъ быть уравновѣшена парю, моментъ которой равенъ и противоположенъ моменту первой пары.

Пусть къ свободному твердому тѣлу приложена совокупность силъ, главный векторъ которой есть нуль; эта совокупность можетъ быть уравновѣшена нѣкоторою парю силъ (означимъ ее, для краткости, знакомъ A) или всякими другими парами, эквивалентными A .

Если къ тому же тѣлу будетъ приложена только пара A , то ее можно будетъ уравновѣсить нѣкоторою парю B , моментъ которой равенъ и противоположенъ моменту пары A .

Такъ какъ данная совокупность силъ и пара B порознь уравновѣшаются одною и тою же парю A , то онѣ, по вышесказанному, могутъ быть признаны эквивалентными между собою.

Поэтому, *всякую такую совокупность силъ, главный векторъ которой равенъ нулю, а главный моментъ не равенъ нулю, мы можемъ называть совокупностью силъ, эквивалентною парѣ силъ*.

§ 165. Совокупность силъ, не удовлетворяющая условію (637). Приведеніе совокупности силъ къ каноническому виду.

Если къ свободному твердому тѣлу приложена такая совокупность силъ, которая не удовлетворяетъ условію (637), то она не можетъ быть уравновѣшена одною отдѣльною силою, не можетъ быть уравновѣшена также и одною отдѣльною парою силъ, но ее можно уравновѣсить совокупностью силы съ парю силъ или совокупностью двухъ силъ непараллельныхъ и не пересѣкающихся.

Пусть \overline{OB} (черт. 131) есть главный векторъ данной совокупности силъ, \overline{OL}_0 — главный моментъ ея вокругъ начала координатъ, а величины

$$B_x, B_y, B_z, L_x, L_y, L_z$$

суть проэкціи главнаго вектора и этого главнаго момента на оси координатъ.

Чтобы уравновѣсить эту совокупность силъ, приложимъ къ тѣлу въ точкѣ O силу $\overline{OB'}$ (черт. 131), равную и противоположную главному вектору \overline{OB} и парю силъ, моментъ которой \overline{OL}_0' равенъ и противоположенъ главному моменту \overline{OL}_0 ; послѣ этого, условія равновѣсія твердаго тѣла, очевидно, удовлетворятся.

Сила $\overline{OB'}$ и пара силъ, имѣющая моментъ \overline{OL}_0' , могутъ быть замѣнены двумя силами. Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ черезъ O плоскость Π перпендикулярную къ \overline{OL}_0 и примемъ ее за плоскость пары; въ этой плоскости изъ точки O проведемъ какую либо длину \overline{OF} , которую примемъ за изображеніе одной изъ силъ F пары; затѣмъ восстановимъ перпендикуляръ OU къ \overline{OF} и къ \overline{OL}_0' въ такомъ направленіи, съ котораго \overline{OL}_0' видно по лѣвую, а \overline{OF} — по правую руку; на этомъ перпендикулярѣ, который будетъ заключаться въ плоскости пары силъ, отложимъ длину \overline{OM} , равную отношенію L_0 къ F ; изъ точки M проведемъ длину \overline{MF} , равную и противоположную длинѣ \overline{OF} , которая будетъ представлять другую силу пары; наконецъ построимъ равнодѣйствующую \overline{OF}_1 силъ \overline{OF} и $\overline{OB'}$, приложенныхъ къ точкѣ O . Послѣ этого окажется, что данная совокупность силъ уравновѣшена двумя силами: силою \overline{OF}_1 , приложенною къ тѣлу

въ точкѣ O и силою \overline{MF} , приложенною къ тѣлу въ точкѣ M . Направленія этихъ силъ не пересѣкаются, такъ какъ послѣдняя сила заключается въ плоскости Π и направленіе ея не встрѣчаетъ точку O , между тѣмъ какъ первая сила проходитъ черезъ эту точку; эти силы не параллельны, такъ какъ сила \overline{OF} , параллельно-противоположная силѣ \overline{MF} , встрѣчаетъ силу \overline{OF} въ точкѣ O .

Такимъ образомъ, всякую совокупность силъ, неудовлетворяющую условію (637), можно уравновѣсить силою, соединенною съ парю силъ, или двумя непараллельными и непересѣкающимися силами.

Уравновѣшивая данную совокупность силою и парю, можемъ приложить силу B' не къ точкѣ O , а къ какой угодно другой точкѣ тѣла, но тогда придется измѣнить величину и направленіе момента пары; если эту силу, равную и противоположную главному вектору данной совокупности, приложимъ къ точкѣ K (координаты которой суть x_k, y_k, z_k), то моментъ ея вокругъ точки O будетъ имѣть слѣдующія проеціи на оси координатъ:

$$(-y_k B_z + z_k B_y), (-z_k B_x + x_k B_z), (-x_k B_y + y_k B_x);$$

поэтому, проеціи момента новой пары, которая должна уравновѣсить данную совокупность силъ и силу $\overline{KB'}$, должны быть равны слѣдующимъ величинамъ:

$$\begin{aligned} &-(L_x + z_k B_y - y_k B_z), -(L_y + x_k B_z - z_k B_x), \\ &-(L_z + y_k B_x - x_k B_y), \end{aligned}$$

т. е. отрицательно взятымъ проеціямъ главнаго момента данной совокупности силъ вокругъ точки K (см. формулы (633) на страницѣ 451-й).

Слѣдовательно, приложенную къ свободному твердому тѣлу совокупность силъ, неудовлетворяющую условію (637), можно уравновѣсить силою и парю силъ; сила, равная и прямопротивоположная главному вектору совокупности, можетъ быть приложена къ любой точкѣ твердаго тѣла; моментъ же пары

долженъ быть равенъ и противоположенъ главному моменту совокупности вокругъ той точки тѣла, къ которой приложена сила.

Такимъ образомъ, выборъ точки приложенія силы вліяетъ на величину и направленіе момента пары; несмотря на это, проекція момента пары на направленіе силы имѣетъ одну и ту же величину для одной и той же совокупности силъ, совершенно независимо отъ выбора точки. K , а именно величина этой проекціи равна:

$$L_k \cos(L_k, B) = \frac{L_x B_x + L_y B_y + L_z B_z}{B} = L_0 \cos(L_0, B). \quad (636)$$

Отсюда слѣдуетъ, что пара силъ будетъ съ наименьшимъ моментомъ въ томъ случаѣ, когда сила будетъ приложена къ какой либо изъ точекъ тѣла, находящихся на центральной оси данной совокупности силъ, потому что тогда моментъ пары долженствуетъ быть направленъ вдоль по силѣ B' , такъ какъ главный моментъ вокругъ такой точки направленъ вдоль по главному вектору (см. стр. 453-ю).

Для опредѣленія положенія центральной оси данной совокупности силъ можно составить правило и написать формулы, руководствуясь указанною на стр. 453-й аналогіею между теоріею скоростей точекъ неизмѣняемой среды и теоріею моментовъ силы. Изъ правила, приведеннаго на страницѣ 136-й кинематической части, извлечемъ слѣдующее *правило для опредѣленія положенія центральной оси совокупности силъ, неудовлетворяющей условію (637):*

Изъ начала координатъ O (черт. 132) надо возстановить перпендикуляръ къ плоскости $BO L_0$ въ такомъ направленіи, съ котораго OB видно по лѣвую, а OL_0 по правую руку; на этомъ направленіи надо отложить длину $\overline{O\Pi}$, равную:

$$\overline{O\Pi} = \frac{L_0 \sin(L_0, B)}{B},$$

точка Π и будетъ одною изъ точекъ центральной оси данной совокупности силъ. Центральная ось параллельна главному вектору.

Главный момент совокупности силъ вокругъ которой либо изъ точекъ этой оси равенъ:

$$\overline{O\Pi} = L_0 \cos(\angle_0, B)$$

и направленъ вдоль по центральной оси.

Изъ формулъ (151) стр. 135-й кинематической части получимъ выраженія координатъ точки Π центральной оси совокупности силъ, если замѣнимъ: точку $Ю$ — началомъ координатъ O , угловую скорость Ω — главнымъ векторомъ B и скорость точки $Ю$ — главнымъ моментомъ L_0 ; получимъ:

$$\left. \begin{aligned} x_u &= \frac{L_z B_y - L_y B_z}{B^2}, \\ y_u &= \frac{L_x B_z - L_z B_x}{B^2}, \\ z_u &= \frac{L_y B_x - L_x B_y}{B^2}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1021)$$

Уравненія центральной оси совокупности силъ аналогичны уравненіямъ (150) стр. 135-й кинематической части, а именно они таковы:

$$\frac{x - x_u}{B_x} = \frac{y - y_u}{B_y} = \frac{z - z_u}{B_z} \dots\dots\dots (1022)$$

Если подставимъ въ формулы (633) стр. 451-й, вмѣсто x_k, y_k, z_k , координаты точки Π или какой либо другой точки центральной оси, то, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій, получимъ слѣдующія выраженія проецій главного момента совокупности силъ вокругъ этой точки:

$$\begin{aligned} (L_u)_x &= \frac{B_x}{B} L_0 \cos(\angle_0, B), \quad (L_u)_y = \frac{B_y}{B} L_0 \cos(\angle_0, B), \\ (L_u)_z &= \frac{B_z}{B} L_0 \cos(\angle_0, B) \dots\dots\dots (1023) \end{aligned}$$

Эти формулы выражаютъ, что моментъ L_u направленъ по центральной оси и равенъ проеціи момента L_0 на направленіе главного вектора.

Приложенная къ твердому тѣлу совокупность силъ, состоящая изъ силы и пары силъ, дѣйствующей въ плоскости перпендикулярной къ силѣ, называется *совокупностью каноническаго вида* или *каноническою совокупностью силъ*; Болъ (Ball *) называетъ такую совокупность силъ англійскимъ словомъ „wrench“, непереводимымъ на русскій языкъ; слово *wrench* означаетъ тѣ усилія, которыя мы прилагаемъ, завинчивая винтъ посредствомъ отвертки; тогда мы нажимаемъ отвертку на шляпку винта по его оси и вмѣстѣ съ тѣмъ прилагаемъ пару силъ вращающую винтъ вокругъ его оси.

Одну силу, приложенную къ твердому тѣлу, можно разсматривать какъ такую каноническую совокупность силъ, у которой пара силъ имѣетъ моментъ нуль.

Одну пару силъ, приложенную къ твердому тѣлу, можно разсматривать какъ такую каноническую совокупность силъ, у которой сила равна нулю.

Въ § 161-мъ было показано, что совокупность силъ, удовлетворяющая условію (637), эквивалента одной силѣ; въ § 164-мъ говорилось о совокупности силъ, эквивалентной парѣ силъ; наконецъ теперь мы видимъ, что совокупность силъ, неудовлетворяющая условію (637), эквивалентна канонической совокупности силъ, у которой ни сила, ни пара силъ не равны нулю; поэтому мы можемъ теперь высказать слѣдующее положеніе:

*Каждая совокупность силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, можетъ быть приведена къ каноническому виду**).*

§ 166. Совокупность параллельныхъ силъ.

Совокупность параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, приводится къ одной силѣ, или къ одной парѣ силъ.

Означимъ черезъ λ , μ , ν косинусы угловъ, составляемыхъ направлениемъ одной изъ этихъ силъ (силы F_1) съ осями координатъ;

*) Robert Ball. The theory of screws: a study in the dynamics of a rigid body. 1876.

**) Poinso. Sur la composition des moments et la composition des aires. Journal de l'Ecole Polytechnique. T. VI, Cahier 13. (1806).

ерезь $F_2, F_3, \dots, F_i, \dots, F_n$ означимъ положительно-взятые величины тѣхъ силъ, направленія которыхъ параллельны направленію или F_1 , и отрицательно-взятые величины тѣхъ силъ, направленія которыхъ противоположны направленію силы F_1 .

Проекціи на оси координатъ главнаго вектора этой совокупности главнаго момента ея вокругъ начала координатъ таковы:

$$\begin{aligned} B_x &= \lambda \sum F_i, \quad B_y = \mu \sum F_i, \quad B_z = \nu \sum F_i, \\ M_x &= \nu \sum F_i y_i - \mu \sum F_i z_i, \quad M_y = \lambda \sum F_i z_i - \nu \sum F_i x_i, \\ M_z &= \mu \sum F_i x_i - \lambda \sum F_i y_i. \end{aligned}$$

Изъ этихъ выраженій видно, что главный векторъ равенъ $\sum F_i$, а главный моментъ перпендикуляренъ къ направленію силъ.

Слѣдовательно, если главный векторъ параллельныхъ силъ не равенъ нулю, то совокупность этихъ силъ эквивалентна одной силѣ, равной и параллельной главному вектору и приложенной къ одной изъ точекъ центральной оси. Одну изъ точекъ этой оси, а именно точку C , мы найдемъ по правилу, указанному въ § 161-мъ, или по формуламъ (1021); но мы обратимъ сначала вниманіе на другую точку этой оси, координаты которой суть:

$$x_c = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}, \quad y_c = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}, \quad z_c = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i} \dots \dots (1024)$$

Эта точка C дѣйствительно находится на центральной оси, такъ какъ главный моментъ вокругъ нея есть нуль, въ чемъ нетрудно убѣдиться, составивъ выраженія проекцій этого момента по формуламъ 633) стр. 451-й.

Координаты точки C (по формуламъ (1021)) будутъ таковы:

$$\begin{aligned} x_c &= x_c - \lambda r_c \cos(r_c, F_1), \quad y_c = y_c - \mu r_c \cos(r_c, F_1), \\ z_c &= z_c - \nu r_c \cos(r_c, F_1), \quad r_c \cos(r_c, F_1) = \lambda x_c + \mu y_c + \nu z_c. \end{aligned}$$

Слѣдуетъ здѣсь замѣтить, что координаты точки C не зависятъ отъ косинусовъ λ , μ , ν , такъ что если всѣ силы совокупности, не измѣняя своихъ величинъ и точекъ приложенія, и оставаясь параллельными между собою, измѣнять свое направленіе, то положеніе точки C неизмѣнится.

Кромѣ того, видъ вторыхъ частей выраженій (1024) сходенъ съ видомъ выраженій ((620) стр. 426) координатъ центра инерціи системы матеріальныхъ точекъ.

Точка C называется *центромъ данной совокупности параллельныхъ силъ*.

Примѣнивъ формулы (1024) къ двумъ параллельнымъ силамъ одинаковаго направленія или противоположныхъ направленій, найдемъ извѣстныя въ элементарной механикѣ правила для такъ называемаго сложенія или разложенія двухъ параллельныхъ силъ.

Если главный векторъ данной совокупности параллельныхъ силъ равенъ нулю, т. е. если $\sum F_i = 0$, то совокупность эквивалентна парѣ силъ.

§ 167. Теорема Шаля.

Представимъ себѣ, что совокупность силъ, неудовлетворяющая условію (637), приведена къ каноническому виду; пусть \overline{CB} (черт. 133) есть величина и направленіе главнаго вектора, а \overline{CL} — величина главнаго момента.

Проведемъ какую бы то ни было прямую линію N_1N , не пересѣкающую ось CB и не параллельную ей; данную совокупность можно привести къ двумъ силамъ, одна изъ которыхъ будетъ направлена вдоль по N_1N .

Пусть Π_1C есть кратчайшее разстояніе между линіею N_1N и центральною осью $\Pi_1\Pi$. Чтобы привести совокупность къ двумъ силамъ, одна изъ которыхъ направлена по CN , надо разложить главный векторъ $\overline{\Pi_1B_1} = \overline{CB}$ на двѣ параллельныя ему силы $\overline{CP_1}$ и $\overline{DQ_1}$, гдѣ D есть точка, находящаяся на продолженіи линіи $C\Pi$; затѣмъ, надо составить такую пару силъ \overline{CF} и $\overline{DF'}$ въ плоскости перпендикулярной къ центральной оси, моментъ которой былъ бы равенъ $\Pi_1L_1 = \Pi L$; силы $\overline{CP_1}$ и \overline{CF} должны быть таковы, чтобы равнодѣйствующая ихъ \overline{CP} была направлена вдоль по линіи N_1CN .

Означимъ черезъ c и d длины $\overline{P_1C}$ и $\overline{P_1D}$, черезъ P_1 , Q_1 — величины силъ $\overline{CP_1}$ и $\overline{DQ_1}$, черезъ F — величины равныхъ между собою силъ \overline{CF} и \overline{DF} , черезъ P и Q — величины силъ \overline{CP} и \overline{DQ} , гдѣ послѣдняя есть равнодѣйствующая силъ Q_1 и \overline{DF} ; наконецъ черезъ α и β означимъ величины угловъ P_1CP и Q_1DQ .

Такъ какъ сила $\overline{P_1B}$ разложена на двѣ силы P_1 и Q_1 и такъ какъ моментъ построенной пары силъ равенъ L , то должны быть удовлетворены слѣдующія равенства:

$$P_1 = \frac{d}{c+d} B, \quad Q_1 = \frac{c}{c+d} B, \quad F = \frac{L}{c+d};$$

имѣетъ съ тѣмъ отношеніе F къ P_1 должно быть равно тангенсу угла α , т. е.:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{L}{Bd}.$$

Изъ этого равенства мы опредѣлимъ величину разстоянія d , а, слѣдовательно, положеніе точки D ; направление силы Q опредѣлится угломъ β , тангенсъ котораго равенъ:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{L}{Bc};$$

зная величину d , опредѣлимъ величины P_1 и Q_1 по предыдущимъ формуламъ, а затѣмъ нетрудно опредѣлить величины силъ P и Q .

(Примечаніе. Если уголъ α будетъ отрицательный, то и d будетъ отрицательное; въ этомъ случаѣ положеніе точки D и силъ P и Q будетъ такое, какъ на чертежѣ 134).

Длина c и уголъ α могутъ быть произвольны, поэтому величины, направления и положенія силъ P и Q разнообразны до безконечности. Несмотря на это разнообразіе, объемъ тетраэдра, у котораго два противоположныхъ ребра суть силы P и Q , эквивалентная данной совокупности силъ, имѣетъ величину, независимую отъ длины d и величины угла α .

Въ самомъ дѣлѣ, объемъ V тетраэдра $DCPQ$ (см. черт. 133) равенъ одной шестой части объема параллелепипеда, имѣющаго своими ребрами длины \overline{DC} , \overline{DQ} , \overline{CP} , т. е.:

$$V = \frac{1}{6} (c+d) PQ \sin (\alpha + \beta) = \frac{c+d}{6} (P_1 + Q_1) F = \frac{1}{6} BL.$$

Эта теорема найдена Шалемъ.

§ 168. Совокупность силъ, приведенную къ двумъ силамъ, привести къ каноническому виду. Равновѣсіе трехъ силъ, приложенныхъ къ свободному твердому тѣлу.

Если совокупность силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, приведена къ двумъ силамъ P и Q , то положеніе центральной оси можетъ быть найдено слѣдующимъ образомъ.

Проведемъ кратчайшее разстояніе CD (черт. 135) между тѣми линіями, по которымъ дѣйствуютъ силы P и Q . Такъ какъ точка приложенія каждой силы, приложенной къ твердому тѣлу, можетъ быть перенесена вдоль по той линіи, по которой сила дѣйствуетъ, то примемъ C за точку приложенія силы P , а D — за точку приложенія силы Q . Построимъ въ точкѣ C главный векторъ силъ P и Q ; затѣмъ выберемъ на линіи CD , или на продолженіи ея, такую точку, чтобы главный моментъ силъ P и Q вокругъ нея былъ направленъ параллельно главному вектору, т. е., чтобы главный моментъ силъ P и Q вокругъ оси Y , проведенной черезъ эту точку перпендикулярно къ линіи DC и къ направленію главнаго вектора, былъ бы равенъ нулю. Эта точка находится между точками C и D въ томъ случаѣ, когда проэкціи силъ P и Q на направленіе параллельное главному вектору направлены въ одну сторону, какъ на чертежѣ 135; тогда точка Π дѣлитъ разстояніе DC на части $\overline{C\Pi}$ и $\overline{D\Pi}$ обратнопропорціональными величинамъ проэкцій P_1 и Q_1 силъ P и Q на направленіе главнаго вектора. Если же проэкціи P_1 и Q_1 имѣютъ противоположныя направленія, то точка Π находится внѣ разстоянія DC на сторонѣ большей изъ проэкцій P_1 и Q_1 , причемъ все же:

$$P_1 \cdot \overline{C\Pi} = Q_1 \cdot \overline{D\Pi}.$$

Величина момента пары равняется произведенію изъ длины DC на величину проэкціи силы P или силы Q на плоскость перпендикулярную къ главному вектору; величины этихъ проэкцій обѣихъ силъ одинаковы, но направленія ихъ прямопротивоположны. Въ случаѣ, представленномъ на чертежѣ 135-мъ, моментъ пары направленъ по главному вектору; но могутъ быть случаи, въ которыхъ моментъ пары

ивоположенъ главному вектору, таковы; наприѣръ, случаи изображенные на чертежахъ 136 и 137.

Обратимъ вниманіе на случаи равновѣсія трехъ силъ, приложенныхъ свободному твердому тѣлу; означимъ черезъ P , Q , R величины и направленія этихъ силъ.

Въ этихъ случаяхъ двѣ силы, напр. P и Q , представляютъ собою систему силъ, уравниваемую третьею силою R . Силы P и Q могутъ быть направлены по линіямъ пересѣкающимся или непересѣкающимся.

Въ первомъ случаѣ можно перенести точки приложенія силъ Q въ точку пересѣченія и построить ихъ равнодѣйствующую; равнодѣйствующей силѣ R должна быть равна, прямопротивоположна и направлена по одной съ нею линіи. Въ тѣхъ случаяхъ, когда силы P и Q направлены по линіямъ не пересѣкающимся, можно взять ось CB по правилу, приведенному въ настоящемъ параграфѣ. Такъ какъ совокупность силъ P и Q должна уравниваться силою R , то моментъ пары долженъ быть нуль, а для этого необходимо, чтобы силы P и Q были между собою параллельны или идеально-противоположны. Сила R должна быть равна и прямо противоположна главному вектору силъ P и Q и должна быть направлена по линіи, проходящей черезъ точку C .

Слѣдовательно, если три силы, приложенныя къ свободному тѣлу, взаимно уравниваются, то линіи, по которымъ эти силы дѣйствуютъ, непременно заключаются въ одной плоскости.

§ 169. Положенія равновѣсія несвободнаго твердаго тѣла. Примѣры.

Если твердое тѣло несвободно, то шесть равенствъ, выражающихъ условія равновѣсія силъ и реакцій приложенныхъ къ тѣлу, можно разсматривать какъ уравненія равновѣсія этого тѣла.

Выраженія проецій (на оси координатъ) векторовъ и моментовъ этихъ связей, которымъ подчинено тѣло, должны быть соотнесены по формуламъ, приведеннымъ въ §§ 129 и 130.

Пусть p есть число связей, которымъ подчинено твердое тѣло; въ его уравненіяхъ равновѣсія будетъ заключаться p множителей λ .

Когда p менѣе шести, тогда, исключивъ изъ уравненій равновѣсія тѣла всѣ p множителей λ , получимъ $(6 - p)$ *условій равновѣсія несвободнаго твердаго тѣла*. Если проеэкціи силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, выражены функціями координатъ тѣла, то изъ условій равновѣсія и изъ уравненій связей опредѣлимъ положенія равновѣсія тѣла. Для каждаго положенія равновѣсія можно опредѣлить значенія множителей λ изъ p уравненій равновѣсія.

Когда p равно шести, условій равновѣсія нѣтъ; положеніе тѣла вполне опредѣляется изъ шести уравненій связей. Всѣ шесть множителей λ вполне опредѣляются изъ шести уравненій равновѣсія.

Когда p болѣе шести, тогда уравненія равновѣсія даютъ неопредѣленныя значенія для множителей λ , а, слѣдовательно, и для реакцій связей.

Приводимъ нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ 126-й. Условія равновѣсія твердаго тѣла, одна изъ точекъ котораго закрѣплена неподвижно.

Очевидно, такое тѣло можетъ находиться въ положеніи равновѣсія только при условіи, чтобы совокупность приложенныхъ къ нему задаваемыхъ силъ приводилась къ одной силѣ, направленной черезъ точку опоры; поэтому, если принять эту точку за начало координатъ, условія равновѣсія тѣла выразятся такъ:

$$L_x = 0, L_y = 0, L_z = 0;$$

проеэкціи же на оси координатъ реакціи опоры выразятся отрицательно взятыми проеэкціями главнаго вектора задаваемыхъ силъ:

$$\lambda_1 = R \cos(R, X) = -B_x, \lambda_2 = R \cos(R, Y) = -B_y,$$

$$\lambda_3 = R \cos(R, Z) = -B_z.$$

Примѣръ 127-й. Условія равновѣсія твердаго тѣла, имѣющаго неподвижную постоянную ось, вокругъ которой оно можетъ вращаться и вдоль которой оно можетъ скользить.

ометь находится въ положеніи равновѣ-
сїи главный векторъ совокупности за-
дѣкулярнъ къ неподвижной оси и чтобы
гъ неа былъ равенъ нулю; выведемъ эти
вѣсія.

изей, стѣсняющихъ свободу тѣла, полу-
чатъ двухъ точекъ тѣла остаются на не-
точка суть: точка HO ($\xi = 0$, $\eta = 0$,
 $\eta = 0$, $\zeta = l$) (см. стр. 674); возьмемъ
и выразимъ, что абсолютныя коорди-
наты нулю:

$$x_m + lv_x = 0, \quad y_m + lv_y = 0,$$

ей.

авновѣсія, возьмемъ за центръ моментовъ
ций моментовъ реакцій связей составимъ
§14, принимая во вниманіе, что $v_x = 1$.
, λ_1 множителей первой, второй, третьей
гъ слѣдующія уравненія равновѣсія твер-

$$B_y + \lambda_2 + \lambda_4 = 0, \quad B_z = 0,$$

$$(M_m)_y + l\lambda_3 = 0, \quad (M_m)_z = 0.$$

тихъ уравненій, неаключающія множи-
ловія равновѣсія.

K на ось Z^{000} направлены перпендику-
ль черезъ D_m и D_K величины и направ-
ціи ихъ на оси X^{000} и Y^{000} выразятся такъ:

$$B_x = \frac{(M_m)_y}{l},$$

$$B_y = \frac{(M_m)_x}{l},$$

$$\frac{(M_m)_y}{l}, \quad D_K \cos(D_K, Y) = -\lambda_4 = -\frac{(M_m)_x}{l}.$$

Примѣръ 128-й. Если тѣло можетъ только вращаться вокругъ неподвижной оси, но не можетъ скользить вдоль нея, то къ предыдущимъ четыремъ связямъ присоединяется пятая: $z_0 = 0$ и уравненіе равновѣсія будетъ только одно, выражающее, что моментъ задаваемыхъ силъ вокругъ неподвижной оси долженъ быть равенъ нулю.

Примѣръ 129-й. Условія равновѣсія твердаго тѣла, опирающагося одною точкою на данную неподвижную поверхность:

$$f(x, y, z) = 0.$$

Въ § 130-мъ было найдено, что если твердое тѣло опирается на поверхность въ одной только точкѣ, то реакція связи есть сила, приложенная къ той точкѣ тѣла, которою оно опирается на поверхность. Эта сила направлена по нормали къ поверхности $f = 0$, восстановленной въ точкѣ прикосновенія ея съ тѣломъ, т. е. въ точкѣ опоры послѣдняго.

Составимъ уравненія равновѣсія тѣла, принимая за центръ моментовъ точку опоры тѣла; означимъ координаты ея такъ: x_0, y_0, z_0 .

$$B_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_0} = 0, B_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_0} = 0, B_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_0} = 0, \dots (1025)$$

$$(J_0)_x = 0, (J_0)_y = 0, (J_0)_z = 0 \dots \dots \dots (1026)$$

Условій равновѣсія—пять; три изъ нихъ суть равенства (1026), выражающія, что главный моментъ задаваемыхъ силъ вокругъ точки опоры долженъ быть равенъ нулю; два другія условія равновѣсія получаются по исключеніи λ изъ первыхъ трехъ уравненій равновѣсія (1025); они таковы:

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} \frac{1}{B_x} = \frac{\partial f}{\partial y_0} \frac{1}{B_y} = \frac{\partial f}{\partial z_0} \frac{1}{B_z} \dots \dots \dots (1027)$$

и выражаютъ, что главный векторъ задаваемыхъ силъ долженъ быть направленъ по нормали къ поверхности.

Уравненія (1025) сходны съ уравненіями (423) (стр. 261) равновѣсія матеріальной точки на гладкой поверхности.

Примѣръ 131-й. Условія равновѣсія твердаго тѣла, опирающагося тремя точками на плоскость; во всѣхъ трехъ — по одну сторону плоскости.

Въ этомъ случаѣ реакціи суть три параллельныя между собою (и перпендикулярныя къ плоскости) силы, направленныя въ одну сторону; поэтому совокупность задаваемыхъ силъ должна привести къ одной силѣ, перпендикулярной къ плоскости и направленной черезъ центръ этихъ трехъ параллельныхъ реакцій. Означимъ черезъ P величину этой силы, расположимъ оси X^{oxy} и Y^{oxy} въ рассматриваемой плоскости, на которую опирается тѣло и означимъ черезъ $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ координаты опорныхъ точекъ, а черезъ α и β — координаты центра трехъ параллельныхъ реакцій, чрезъ который, по вышесказанному, должно проходить направленіе силы P .

Такъ какъ всѣ три реакціи направлены въ одну сторону, то точка (α, β) можетъ находиться либо внутри, либо на периметрѣ треугольника, образуемаго точками (x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3) ; слѣдовательно, направленіе силы P не должно пересѣкать плоскости внѣ площади этого треугольника.

Если величина силы P и координаты α и β извѣстны, то величины реакцій въ опорныхъ точкахъ опредѣляются изъ слѣдующихъ трехъ равенствъ:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = P\alpha, \quad \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = P\beta,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = P;$$

эти уравненія дадутъ вполне опредѣленные значенія для величинъ λ .

Обратимъ еще вниманіе на тѣ случаи, въ которыхъ твердое тѣло находится въ положеніи равновѣсія, опираясь на плоскость четырьмя или большимъ числомъ точекъ.

Возьмемъ эту плоскость за плоскость XU и составимъ уравненія равновѣсія твердаго тѣла; они будутъ таковы:

$$B_x = 0, \quad B_y = 0, \quad L_z = 0,$$

$$B_z + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0,$$

$$+\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_n y_n = 0,$$

$$-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \dots - \lambda_n x_n = 0.$$

авенства, не заключающія реакцій λ , представляют тѣла; они выражаютъ, что совокупность задаваемыхъ силъ приводится къ одной силѣ, перпендикулярной къ плоскости. Пусть P есть проекція этой силы на отрицательную ось Z ; слѣда этой силы на плоскости XU ; $\dots \lambda_n$ суть реакціи по положительной оси Z , то уравненія получаютъ слѣдующій видъ:

$$\left. \begin{aligned} +\lambda_n &= P, \\ -\lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_n y_n &= P\beta, \\ -\lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n &= P\alpha. \end{aligned} \right\} \dots \dots (1028)$$

3, мы не будемъ въ состояніи получить изъ этихъ уравненій значеній для величинъ $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$, такъ какъ число уравненій меньше числа неизвестныхъ.

Неопредѣленность можетъ быть устранена, если примемъ въ расчетъ деформации нажимаемаго тѣла или плоскости; для рѣшенія слѣдующаго вопроса.

1. На твердой горизонтальной плоскости стоитъ столъ, на которомъ лежитъ доска, опирающаяся на n вертикальныхъ ножекъ; эти ножки предполагаются упругими и имѣютъ равныя длины въ ненапряженномъ состояніи. Предполагается, что доска вѣсъ P , такъ что, если бы на нее не было ничего другого, она бы была горизонтальна и всѣ ножки имѣли бы равныя длины.

На доску положены грузы, центръ давленій которыхъ имѣетъ на плоскости координаты α и β ; сумма вѣсовъ грузовъ P . Подъ давленіемъ этихъ грузовъ, ножки укоротятся, причемъ доска изогнется и наклонится къ горизонту, но мы будемъ считать доску вполнѣ твердой и не искривляется при наложеніи груза, только наклоняется къ горизонту, причемъ ножки, не касаясь плоскости, остаются вертикальными. Требуется узнать рас-

предѣленіе давленій на ножки стола, предполагая, что известны модули упругости и площади поперечныхъ сѣченій всѣхъ ножекъ.

Пусть $z = 0$ есть уравненіе плоскости доски до наложенія на нее грузовъ и $z = ax + by + c$ *) — уравненіе ея плоскости при обремененіи стола грузами; коэффициенты a , b и c намъ еще не известны. Означимъ черезъ E_i модуль упругости i -той ножки, черезъ ω_i — площадь ея поперечнаго сѣченія, черезъ λ_i — величину вертикальнаго давленія, сжимающаго эту ножку, черезъ x_i и y_i — координаты слѣда ножки на горизонтальной плоскости.

Величина сжатія этой ножки выразится величиною ординаты $z_i = ax_i + by_i + c$; а величина давленія λ_i , производящаго такое сжатіе, опредѣлится по известной формулѣ для упругихъ растяженій и сжатій стержней:

$$\lambda_i = \frac{E_i \omega_i}{l} (ax_i + by_i + c).$$

Подставимъ эти выраженія для λ_i въ равенства (1028), получимъ:

$$a \sum q_i x_i + b \sum q_i y_i + c \sum q_i = P,$$

$$a \sum q_i x_i y_i + b \sum q_i y_i^2 + c \sum q_i y_i = P\beta,$$

$$a \sum q_i x_i^2 + b \sum q_i x_i y_i + c \sum q_i x_i = P\alpha; \quad q_i = \frac{E_i \omega_i}{l}.$$

Эти три уравненія, служащія для опредѣленія коэффициентовъ a , b , c , получаютъ замѣтное упрощеніе, если за начало координатъ возьмемъ центръ инерціи системы материальныхъ точекъ, совпадающихъ со слѣдами ножекъ на горизонтальной плоскости и имѣющихъ массы пропорціональныя величинамъ q_1, q_2, \dots, q_n ; кромѣ того, за оси координатъ X^{00} и Y^{00} примемъ главныя оси инерціи этой системы воображаемыхъ точекъ; тогда получимъ:

$$a = \frac{P\alpha}{\sum q_i x_i^2}, \quad b = \frac{P\beta}{\sum q_i y_i^2}, \quad c = \frac{P}{\sum q_i}.$$

Подставивъ эти величины въ выраженія для $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, получимъ вполнѣ опредѣленные значенія для величинъ λ ; но при этомъ можетъ

*) Положительная ось Z^{00} направлена внизъ.

симыхъ координатныхъ параметровъ (см. формулы (564) на стр. 382); подставивъ эти выраженія въ равенство (567, *b*) и приравнявъ въ немъ нулю коэффициенты варьаций; получимъ условія равновѣсія.

Примѣръ 133-й. Бифиларъ. Тяжелый однородный стержень длины $2c$ и вѣса P подвѣшенъ за концы D и E (черт. 140) на двухъ нерастяжимыхъ нитяхъ AD и BE равной длины l ; верхніе концы этихъ нитей прикрѣплены къ точкамъ A и B , находящимся на одномъ горизонтѣ въ разстояніи $2a$ одна отъ другой. Если къ стержню не приложено никакихъ силъ, за исключеніемъ силы тяжести, то онъ можетъ быть въ покоѣ въ горизонтальномъ положеніи, причѣмъ нити натянуты, середина C находится на вертикальной линіи подѣ точкою O (серединою длины AB) и самъ стержень параллеленъ линіи AB .

Если къ стержню, кромѣ его вѣса, приложена пара силъ, дѣйствующая въ горизонтальной плоскости и имѣющая моментъ L , то стержень будетъ имѣть иное положеніе равновѣсія, причѣмъ точка C будетъ имѣть нѣкоторое положеніе C_1 на вертикальной линіи OC , а стержень будетъ составлять нѣкоторый уголъ φ съ прежнею вертикальною плоскостью или съ линіею C_1K , параллельною линіи OA . Опредѣлить величину этого угла φ .

Составимъ по формулѣ (763) стр. 544-й и 589-й выраженіе работы, совершаемой задаваемыми силами при ничтожно-маломъ возможномъ перемѣщеніи стержня ED ; такъ какъ здѣсь главный векторъ задаваемыхъ силъ равенъ силѣ тяжести стержня и направленъ по оси $Z^{орт}$ (внизъ), а главный моментъ ихъ вокругъ C равенъ L и направленъ вверхъ, то выраженіе (763) будетъ здѣсь имѣть слѣдующій видъ:

$$P\epsilon_c \cos(\epsilon_c, Z) - L\theta \cos(\theta, Z),$$

гдѣ ϵ_c есть возможное перемѣщеніе центра инерціи стержня, а θ — возможное угловое перемѣщеніе стержня; знакъ минусъ поставленъ передъ вторымъ членомъ потому, что моментъ L направленъ вверхъ, противоположно положительной оси $Z^{орт}$.

Оси оординат расположимъ такъ: OX по линіи наибольшаго на-
клона внизъ (черт. 141), ось OY — горизонтально, ось OZ — перпен-
дикулярно къ наклонной плоскости, вверхъ.

Шаръ долженъ постоянно оставаться на наклонной плоскости, по-
тому $z_c = R$; прочія координаты шара, именно: x_c, y_c, ϕ, θ и α мо-
гутъ быть какія угодно.

Положеніе точки m на поверхности сферы выразимъ въ сфериче-
скихъ координатахъ ϕ и ψ , принимая за полярную ось — направленіе,
проведенное изъ C параллельно положительной оси $Z^{орт}$, а за плоскость
перваго меридіана — плоскость параллельную плоскости ZX .

Составимъ теперь выраженіе работы вѣса шара при ничтожно-ма-
ломъ возможномъ перемѣщеніи его; оно будетъ:

$$Mg \delta x_c \sin J; \dots \dots \dots (1029)$$

дальѣ, составимъ выраженіе работы, совершаемой приложенными къ
точкѣ m силами на протяженіи ничтожно-малаго возможнаго перемѣ-
щенія этой точки; оно будетъ:

$$mg (\delta x \sin J - \delta z \cos J) - \mu^2 m (x \delta x + y \delta y + z \delta z), \dots (1030)$$

гдѣ x, y, z суть координаты точки m , которыя могутъ быть выражены
въ независимыхъ координатныхъ параметрахъ x_c, y_c, ϕ, ψ слѣдующимъ
образомъ:

$$x = x_c + R \sin \phi \cos \psi, \quad y = y_c + R \sin \phi \sin \psi,$$

$$z = R + R \cos \phi.$$

Изъ послѣднихъ выраженій слѣдуетъ:

$$\begin{aligned} r^2 = x^2 + y^2 + z^2 &= x_c^2 + y_c^2 + 2R^2 + 2R^2 \cos \phi + \\ &+ 2R \sin \phi (x_c \cos \psi + y_c \sin \psi). \end{aligned}$$

Теперь надо взять сумму выраженій (1029) и (1030), приравнять
ее нулю и выразить варьаци $\delta x, \delta y, \delta z$ посредствомъ независимыхъ
варьаций $\delta x_c, \delta y_c, \delta \phi, \delta \psi$; а именно:

$$\begin{aligned} \delta x \sin J - \delta z \cos J &= \delta x_c \sin J - R \sin \phi \sin \psi \sin J \delta \psi \\ &+ R (\cos \phi \cos \psi \sin J + \sin \phi \cos J) \delta \phi \end{aligned}$$

Въ этихъ случаяхъ, если всѣ связи удерживающія, то положенія равновѣсія системы суть тѣ положенія, при которыхъ полная возможная варьяція перваго порядка отъ потенціала равна нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этихъ случаяхъ равенство (567, b) получаетъ слѣдующій видъ:

$$\sum \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0,$$

то есть:

$$\delta U = 0, \dots\dots\dots (1031)$$

гдѣ U есть потенціалъ задаваемыхъ силъ.

Если выразимъ декартовы координаты системы функциями независимыхъ координатныхъ параметровъ, вслѣдствіе чего U тоже выразится функциею этихъ параметровъ q_1, q_2, \dots, q_n , и примемъ во вниманіе, что варьяціи $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ произвольны, то изъ равенства (1031) получимъ слѣдующія условія равновѣсія системы:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \dots\dots\dots \frac{\partial U}{\partial q_n} = 0 \dots\dots (1032)$$

Если нѣкоторыя изъ связей принадлежатъ къ неудерживающимъ, то положенія равновѣсія системы суть тѣ положенія, при выходѣ изъ которыхъ $\delta U = 0$ для всѣхъ возможныхъ варьяцій, не ослабляющихъ ни одной изъ неудерживающихъ связей, и $\delta U < 0$ для такихъ возможныхъ варьяцій, при которыхъ одна или нѣсколько неудерживающихъ связей ослабѣваютъ.

Пусть x_1, x_2, \dots, x_n есть одна изъ совокупностей значеній величинъ координатныхъ параметровъ q_1, q_2, \dots, q_n , обращающая полную варьяцію δU въ нуль; пусть U_e есть значеніе, получаемое функциею U при этихъ величинахъ координатныхъ параметровъ.

Составимъ выраженіе полной варьяціи втораго порядка отъ U , т. е.:

$$\delta^2 U = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial^2 U}{\partial q_k^2} (\delta q_k)^2 + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_j} \delta q_k \delta q_j$$

и подставимъ въ него
сто q_1, q_2, \dots, q_n ; в
нихъ возможныхъ вар
ицательный, то это бѣ

Примѣчаніе 1-е.
слѣдующей суммы и чл

$$\delta^2 U = Q_1 \epsilon_1^2 + Q_2 \epsilon_2^2 + Q_3 \epsilon_3^2 + \dots + Q_n \epsilon_n^2, \dots (1033)$$

гдѣ:

$$Q_1 = U_{11}, \quad \epsilon_1 = \delta q_1 + \frac{U_{12}}{U_{11}} \delta q_2 + \dots + \frac{U_{1n}}{U_{11}} \delta q_n,$$

$$Q_2 = U_{22} - \frac{U_{12}^2}{U_{11}}, \quad \epsilon_2 = \delta q_2 + B_{22} \delta q_2 + \dots + B_{2n} \delta q_n,$$

$$B_{22} = \frac{1}{Q_2} \left(U_{22} - \frac{U_{12} U_{12}}{U_{11}} \right), \dots$$

$$Q_3 = U_{33} - \frac{U_{13}^2}{U_{11}} - \frac{B_{23}^2}{Q_2}, \quad \epsilon_3 = \delta q_3 + C_{34} \delta q_4 + \dots + C_{3n} \delta q_n,$$

.....

$$Q_n = U_{nn} - \frac{U_{1n}^2}{U_{11}} - \frac{B_{2n}^2}{Q_2} - \frac{C_{3n}^2}{Q_3} - \dots, \quad \epsilon_n = \delta q_n,$$

U_{11}, U_{12}, \dots означаютъ здѣсь частныя производныя втораго
порядка отъ U по координатнымъ параметрамъ.

Для того, чтобы U_e было максимумомъ, надо, чтобы всѣ величины
 Q_1, Q_2, \dots, Q_n были отрицательныя.

Примѣчаніе 2-е. Если при $q_1 = x_1, q_2 = x_2, \dots, q_n = x_n$ ве
личина U_e есть максимумъ сплошной функціи U , то, при $q_1 = x_1 + \alpha_1$,
 $q_2 = x_2 + \alpha_2, \dots, q_n = x_n + \alpha_n$, гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ суть бесконе
чно-малыя величины перваго порядка, значеніе функціи U будетъ ме
нше величины U_e на бесконечно-малую величину втораго порядка.

Обратно, тѣ значенія координатныхъ параметровъ, при кото
рыхъ U менше U_e на бесконечно-малую величину втораго порядка,

разнятся отъ величинъ x_1, x_2, \dots, x_n бесконечно-малыми величинами перваго порядка; это слѣдуетъ изъ того, что величины $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$, заключающіяся въ выраженіи (1033), суть линейныя однородныя функціи приращеній $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$.

Можно доказать, что тѣ положенія системы, при которыхъ U имѣетъ максимумъ, суть *положенія устойчиваго равновѣсія*. Предварительно слѣдуетъ сказать, какииъ образомъ судять объ устойчивости или неустойчивости положеній равновѣсія.

Сужденіе объ этомъ составляется по характеру движенія, получаемаго системою послѣ незначительнаго отклоненія ея изъ положенія равновѣсія и послѣ сообщенія ничтожныхъ скоростей ея точкамъ; если, при всякихъ ничтожно-малыхъ отклоненіяхъ и скоростяхъ, движеніе получаетъ характеръ ничтожно-малыхъ колебаній около положенія равновѣсія, то послѣднее — устойчиво. Если же, даже не при всѣхъ, а только при нѣкоторыхъ начальныхъ ничтожно-малыхъ отклоненіяхъ или скоростяхъ, система все болѣе и болѣе отклоняется отъ положенія равновѣсія, то послѣднее — неустойчиво.

Согласно съ этимъ, для изслѣдованія устойчивости положенія $q_1 = x_1, q_2 = x_2, \dots, q_n = x_n$, надо дать точкамъ системы какія либо бесконечно-малыя начальные отклоненія и сообщить имъ бесконечно-малыя начальные скорости; если убѣдимся, что, при полученномъ вслѣдствіе этого движеніи, отклоненія системы отъ положенія равновѣсія не превзойдутъ нѣкоторыхъ бесконечно-малыхъ предѣловъ, то должны будемъ заключить, что положеніе равновѣсія — устойчиво.

Пусть T_0 есть начальная живая сила, U_0 — начальная величина функціи U ; T_0 и $(U_e - U_0)$ суть бесконечно-малыя положительныя величины втораго порядка, такъ что сумма ихъ, которую мы означимъ черезъ β_2 , есть тоже бесконечно-малая величина втораго порядка малости; отсюда:

$$U_0 - T_0 = U_e - \beta_2.$$

Движенія системы должны удовлетворять закону живой силы:

$$T = U - U_0 + T_0,$$

Примѣръ 137-й. Стержень ACA_1A_2B вѣса P (центр тяжести его — въ точкѣ C) опирается концомъ A на горизонтальную плоскость, а боковой поверхностью на неподвижный горизонтальный болтъ A_2 , перпендикулярный къ длинѣ стержня; другимъ такимъ же болтомъ A_1 стержень придерживается сверху (см. черт. 144). Определить давленія D , D_1 и D_2 стержня на плоскость, на болтъ A_1 и на болтъ A_2 .

Означимъ черезъ Λ , λ_1 и λ_2 реакціи плоскости, болта A_1 и болта A_2 ; составимъ три уравненія равновѣсія силъ и реакцій, приложенныхъ къ стержню, причемъ за центръ моментовъ примемъ точку A :

$$\Lambda \sin \alpha = P \sin \alpha, \quad \Lambda \cos \alpha - P \cos \alpha + \lambda_2 - \lambda_1 = 0,$$

$$\overline{AC} P \cos \alpha + \lambda_1 \overline{AA_1} - \lambda_2 \overline{AA_2} = 0.$$

Отсюда:

$$D = \Lambda = P, \quad D_1 = D_2 = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\overline{AC}}{\overline{A_1A_2}} P \cos \alpha.$$

Примѣръ 138-й. Стержень AB (черт. 145), неимѣющій вѣса, опирается концомъ A въ неподвижную точку опоры и поддерживается въ горизонтальномъ положеніи концомъ D другого стержня, опирающагося концомъ C въ неподвижную точку. Точки A и C находятся на одной вертикальной линіи и конецъ D стержня CD опирается въ опредѣленную точку стержня AB и не можетъ скользить вдоль по длинѣ послѣдняго. Къ концу B стержня AB привѣшенъ грузъ Q ; определить величины и направленія давленій: стержня BA на точку A , стержня DC на точку C и того же стержня на точку D стержня AB .

Вмѣсто давленій мы опредѣлимъ величины и направленія равныхъ и противоположныхъ имъ реакцій. Пусть λ_1 означаетъ величину и направленіе реакціи точки опоры конца A , λ_2 — реакцію точки опоры конца C , Λ — величину и направленіе реакціи конца D стержня CD ; со стороны стержня AB на конецъ D стержня CD дѣйствуетъ реакція равная и противоположная реакціи Λ .

Составивъ уравненія равновѣсія стержня CD , мы найдемъ, что λ_2 направлено по CD , Λ — по продолженію CD и что $\Lambda = \lambda_2$.

Составимъ уравненія равновѣсія стержня AB :

$$\Lambda \cos \alpha + \lambda_1 \cos(\lambda_1, X) = 0, \quad \Lambda \sin \alpha = Q + \lambda_1 \sin(\lambda_1, Y),$$

$$Q \cdot \overline{AB} = \Lambda \overline{AD} \sin \alpha.$$

уда:

$$\Lambda = Q \frac{\overline{AB}}{AD \sin \alpha};$$

$$\lambda_1 \sin ($$

мѣръ 139-й. Найти по-
 1 (вѣсъ P , длина $2l$),
 щегося концомъ A въ
 та O въ разстояніи b ;
 ть l есть длина нити,
 θ уголъ XOB .
 вціалъ силъ, дѣйстви

$$T = -P(l \sin \theta - b$$

равныя выраженія пере

$$\delta U = \left[\frac{b(P+Q)}{\cos^2 \theta} \right]$$

$$\delta^2 U = \left[\frac{2b(P+Q)}{\cos^2 \theta} \right]$$

уда оказывается, что положеніе равновѣсія будетъ при углѣ θ ,
 въ котораго равенъ:

$$\cos \theta = \left(\frac{b(P+Q)}{l(P+2Q)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

этомъ углѣ:

$$\delta^2 U = 3l(P+2Q)(\delta \theta)^2 \sin \theta;$$

$U > 0$; следовательно, положеніе неустойчивое.

мѣръ 140-й. Тяжелый стержень AB (длина a , вѣсъ P , разсто-
 ра инерціи C отъ конца B равно c) опирается концомъ A на
 ую плоскость DE (черт. 147), составляющую уголъ J съ гори-
 ; въ другому концу B этого стержня прикрѣпленъ конецъ глѣ-
 астяжимой нити длины l , перекинутой черезъ весьма малый ве-
 шій блокъ O и поддерживающей грузъ Q ; разстояніе OK по-
 ить блока равно h . Найти положеніе равновѣсія и узнать, устой-
 оно, или нѣтъ.

Означимъ черезъ b длину OB , черезъ θ — уголъ KAB , черезъ φ — уголъ, составляемый направлениемъ BO съ направлениемъ DE ; примемъ точку O за начало координатъ и направимъ ось Y^{oxy} вертикально внизъ.

Составимъ выраженіе потенціала U :

$$U = Q(l - b) + P(b \sin(J + \varphi) + c \sin(J + \theta)).$$

Здѣсь входятъ три переменныя величины b , φ , θ , между которыми существуетъ слѣдующая зависимость:

$$h = b \sin \varphi + a \sin \theta,$$

такъ какъ сумма проэкцій длинъ OB и BA на направленіе OK равна h . Отсюда слѣдуетъ, что между варьяціями δb , $\delta \varphi$ и $\delta \theta$ существуетъ такая зависимость:

$$b \delta \varphi \cos \varphi + \delta b \sin \varphi + a \delta \theta \cos \theta = 0 \dots \dots (1034)$$

Составимъ выраженіе δU и исключимъ изъ него $\delta \varphi$ при помощи равенства (1034); получимъ:

$$\begin{aligned} \delta U \cos \varphi &= (P \sin J - Q \cos \varphi) \delta b + \\ &+ P(c \cos \varphi \cos(J + \theta) - a \cos \theta \cos(J + \varphi)) \delta \theta \dots (1035) \end{aligned}$$

Приравнявъ δU нулю и имѣя въ виду, что b и θ суть переменныя независимыя, получимъ слѣдующее рѣшеніе:

$$\cos \varphi = \frac{P}{Q} \sin J, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{a}{c} \operatorname{tg} \varphi - \left(\frac{a}{c} - 1 \right) \operatorname{cotg} J \dots (1036)$$

Для полученія выраженія $\delta^2 U$ возьмемъ варьяцію отъ равенства (1035), причемъ примемъ во вниманіе, что при положеніи равновѣсія $\delta U = 0$. Вторую часть составленнаго выраженія можно преобразовать при помощи равенствъ (1036), такъ что получимъ:

$$\delta^2 U \cos \varphi = P \sin J \left(\frac{\delta b \sin \varphi + \delta \theta a \cos \theta}{\cos \varphi} \delta \varphi - c \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} (\delta \theta)^2 \right);$$

исключивъ отсюда δb при помощи равенства (1034), получимъ:

$$\delta^2 U = -Q \left(b (\delta \varphi)^2 + c \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} (\delta \theta)^2 \right).$$

Изъ этого выраженія видно, что найденное положеніе устойчиво.

из 141-й. Въ системѣ предыдущаго примѣра предположимъ, что силы тренія между концомъ A стержня и плоскостью въ тотъ случай, когда послѣдняя горизонтальна. Опредѣлимъ иныя положенія равновѣсія стержня въ плоскости XU (черт. полагая, что h больше a и что P больше Q .

изъ черезъ λ реакцію плоскости DE , приложенную къ концу стержня, приложенная къ тому же концу, направлена параллельно или отрицательной оси X^{osz} и равна λk , гдѣ k есть коэффициентъ, заключающійся между нулемъ и наибольшимъ числомъ k , тренія при состояніи покоя.

Силу тренія на ось X^{osz} мы выразимъ такъ: $(\pm \lambda k) =$ гдѣ верхній знакъ относится къ тому случаю, когда сила тренія положительной оси X^{osz} , а нижній — къ тому, когда параллельна отрицательной оси X^{osz} .

изъ уравненія равновѣсія силъ и реакцій приложенныхъ къ моменты — вокругъ конца A).

$$Q \cos \varphi \pm \lambda \operatorname{tg} \varepsilon = 0, \quad P - Q \sin \varphi - \lambda = 0,$$

$$P(a - c) \cos \theta = Qa \sin (\varphi - \theta).$$

изъ λ изъ первыхъ двухъ уравненій, получимъ условіе равновѣсія, которое утолъ φ :

$$Q \cos (\varphi \pm \varepsilon) = \mp P \sin \varepsilon;$$

изъ третьяго уравненія получимъ:

$$a \operatorname{tg} \theta = c \operatorname{tg} \varphi \pm (a - c) \cot \varepsilon.$$

ε можетъ имѣть всякія значенія отъ нуля до угла тренія ε_1 (275), поэтому система можетъ имѣть безчисленное множество положеній равновѣсія.

отринмъ эти положенія; начнемъ съ того положенія, при которомъ сила тренія равна нулю, т. е. $\varepsilon = 0$; тогда $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}$, т. е. стержень и нить BO вертикальны (черт. 149, положеніе B_1). Если дадимъ углу ε какое либо значеніе меньшее ε_1 , т. е. угла, синусъ котораго равенъ отношенію Q къ P , то можемъ два положенія равновѣсія, при которыхъ коэффициентъ силъ

трения равен тангенсу выбранного угла; в одном из этих положений сила трения параллельна отрицательной оси X^{oz} и угол φ меньше прямого, а в другом — сила трения параллельна положительной оси X^{oz} и угол φ больше прямого. Для первого положения (A_1B_1 на черт. 149) углы φ и θ выражаются так:

$$Q \cos(\varphi - \epsilon) = P \sin \epsilon, \quad a \operatorname{tg} \theta = c \operatorname{tg} \varphi - (a - c) \cotg \epsilon,$$

для второго положения (A_2B_2 на черт. 149) — так:

$$Q \cos(\varphi + \epsilon) = -P \sin \epsilon, \quad a \operatorname{tg} \theta = c \operatorname{tg} \varphi + (a - c) \cotg \epsilon.$$

Пределами этих двух рядов положений служат те положения при которых $\epsilon = \epsilon_1$, если $\sin \epsilon_1$ меньше отношения Q к P ; если $\sin \epsilon$ больше этого отношения, то пределами положений равновесия служат положения соответствующие тому углу ϵ , синус которого равен $(Q:P)$.

Пример 142-й. Тяжелый стержень AB опирается концом A в неподвижную точку, а концом B на наклонную вертикальную стѣну. Определить положения равновесия стержня (черт. 150).

Опустим из точки A перпендикуляр на плоскость стѣны; основание этого перпендикуляра примем за начало координат, направление OA — за положительную ось Y^{oz} ; за ось X^{oz} возьмем горизонтальное направление в плоскости стѣны.

Обозначим через α величину постоянного угла OAB и через ϵ угол, составляемый направлением OB с осью X^{oz} ; пусть a есть длина стержня, c — расстояние центра инерции его от конца B .

Условие равновесия получим, составив уравнение моментов во круг вертикальной оси, проведенной через точку A :

$$\lambda a \cos \theta \sin \alpha = \lambda a \operatorname{tg} \epsilon \cos \alpha \sin \theta.$$

Положений равновесия бесчисленное множество, так как ϵ может иметь всякое значение, заключающееся в пределах $(-\epsilon_1)$ и $(+\epsilon_1)$.

Пример 143-й. Нерастяжимая нить длины l , прикрепленная одним концом к неподвижной точке O , а другим — к концу B тяжелой однородного стержня длины $2a$ и веса P ; этот стержень другим концом A (черт. 151) упирается в вертикальную шероховатую плоскость, заключающую в себя точку O .

Определить все возможные положения равновесия стержня.

ку O возьмемъ за начало координатъ, плоскость — за плоскость Z направимъ вертикально внизъ.

овемъ: черезъ Λ — реакцію нити, направленную вдоль по ней, λ — реакцію плоскости, черезъ $x = \text{tg } \epsilon$ величину коэффициента черезъ γ — уголъ, составляемый направлениемъ силы тренія съ z (считая этотъ уголъ отъ оси Z^{000} въ сторону оси Y^{000}).

жде всего должно замѣтить, что въ положеніи равновѣсія нити тяжести вокругъ линіи OA долженъ быть нуль; изъ этого, что линія OA должна быть вертикальна, т. е. точка A должна быть на оси Z^{000} .

атимъ черезъ φ и θ углы ZOB и ZAB и черезъ ψ уголъ, со- ний плоскостью BOA съ плоскостью XZ . Между углами φ и θ яніемъ $\overline{OA} = s$ существуетъ зависимость:

$$l \sin \varphi = 2a \sin \theta, \quad s = l \cos \varphi - 2a \cos \theta.$$

авимъ уравненія равновѣсія стержня:

$$\Lambda = \Lambda \sin \varphi \cos \psi, \quad \lambda x \sin \gamma = \Lambda \sin \varphi \sin \psi,$$

$$P + \lambda x \cos \gamma = \Lambda \cos \varphi,$$

$$Pa \sin \theta \sin \psi - \lambda x s \sin \gamma = 0,$$

$$\lambda s - Pa \sin \theta \cos \psi = 0.$$

этихъ уравненій получимъ:

$$x \sin \gamma = \text{tg } \psi, \quad x \cos \gamma = \pm \sqrt{\text{tg}^2 \epsilon - \text{tg}^2 \psi},$$

$$\Lambda = \frac{Pl}{2s}, \quad \lambda = \frac{Pl}{2\epsilon} \sin \varphi \cos \psi;$$

хній знакъ соответствуетъ тѣмъ случаямъ, когда направле- нія составляетъ острый уголъ съ осью Z^{000} .

лючивъ изъ уравненій величины λ , Λ , γ и s , а также и уголъ имъ слѣдующее уравненіе:

$$(16a^2 - 4l^2 - l^2(\text{tg}^2 \epsilon \cos^2 \psi - \sin^2 \psi)) \text{tg}^2 \varphi + \\ + 2l^2 \text{tg } \varphi \sqrt{\text{tg}^2 \epsilon \cos^2 \psi - \sin^2 \psi} + 16a^2 - l^2 = 0,$$

изъ котораго найдемъ, вообще говоря, по четыре положенія равновѣсія для каждаго ϵ и для каждаго ψ не большаго ϵ .

Примѣръ 144-й. Опредѣлить положеніе равновѣсія тяжелаго гладкаго стержня AB (черт. 152-й) (длина a , разстояніе \overline{AC} равно c , вѣсъ — P), упирающагося концомъ A въ поверхность гладкой полусферы (радіусъ R) и опирающагося на край ея D .

Примѣнимъ здѣсь примѣръ рѣшенія, приведенный въ § 162 на примѣръ 125-мъ.

При положеніи равновѣсія направленіе AO реакціи сферы и направленіе DN реакціи края D должны пересѣчься въ точкѣ N , находящейся на одной вертикальной линіи съ центромъ инерціи C стержня; направленіе DN проходитъ черезъ центръ сферы O , направленіе DN перпендикулярно къ длинѣ стержня.

Означимъ черезъ θ уголъ, составляемый стержнемъ съ горизонтомъ; такъ какъ CN вертикально, то нетрудно удостовѣриться, что уголъ CNB равенъ θ , а уголъ CNA равенъ $\frac{\pi}{2} - 2\theta$; даѣе:

$$\overline{AD} = 2R \cos \theta, \quad c = \overline{AN} \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}, \quad AN = \frac{\overline{AD}}{\cos \theta} = 2R;$$

отсюда:

$$c \cos \theta = 4R \cos^2 \theta - 2R,$$

$$\cos \theta = \frac{c}{8R} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{8R}\right)^2 + \frac{1}{2}}.$$

Примѣръ 145-й. Тяжелый стержень находится въ вертикальной плоскости, опираясь концомъ A на горизонтальную, а концомъ B на вертикальную плоскость; обѣ послѣднія плоскости шероховаты. Опредѣлить положенія равновѣсія стержня (черт. 153-й).

Къ концу A стержня приложена реакція λ_1 горизонтальной плоскости и сила тренія $\lambda_1 x = \lambda_1 \operatorname{tg} \epsilon$, гдѣ ϵ означаетъ уголъ, составляемый направленіемъ равнодѣйствующей R_1 этихъ двухъ силъ съ направленіемъ реакціи λ_1 ; къ концу B приложена равнодѣйствующая R_2 изъ реакцій λ_2 вертикальной плоскости и силы тренія $\lambda_2 x' = \lambda_2 \operatorname{tg} \epsilon'$, гдѣ ϵ' означаетъ уголъ, составляемый направленіемъ R_2 съ направленіемъ λ_2 ; условимся считать уголъ ϵ положительнымъ, если направленіе R_1 составляетъ острый уголъ съ отрицательною осью $X^{\text{овъ}}$, а уголъ ϵ' будемъ считать положительнымъ въ тѣхъ случаяхъ, когда направленіе R_2 составляетъ острый уголъ съ положительною осью $Y^{\text{овъ}}$.

Реакціи поверхности, приложенныя къ вершинамъ треугольника, направлены по радіусамъ сферы; слѣдовательно, когда треугольникъ находится въ положеніи равновѣсія, тогда центръ тяжести его C (черт. 154) долженъ находиться на одной вертикальной линіи съ центромъ сферы. Кроме того, можемъ еще замѣтить слѣдующее: такъ какъ двѣ стороны треугольника имѣютъ равныя длины, то, при положеніи равновѣсія, третья сторона AA' должна быть горизонтальна.

Представимъ себѣ кругъ ADA_1B , описанный черезъ вершины треугольника и проведемъ діаметръ этого круга черезъ точку B . Означимъ черезъ θ уголъ, составляемый плоскостью этого круга съ горизонтомъ.

Обратимъ вниманіе на прямоугольный треугольникъ COE , гдѣ E центръ круга ADA_1B . Уголъ COE очевидно равенъ θ , сторона OE равна корню изъ $R^2 - b^2$, гдѣ b есть радіусъ вышесказаннаго круга, сторона CE равна $(\overline{CB} - \overline{EB})$; притомъ:

$$\overline{EB} = b = \frac{a^2}{2h}, \text{ (см. черт. 155); } \quad \overline{CB} = \frac{2}{3}h;$$

поэтому:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{4h^2 - 3a^2}{3\sqrt{4h^2R^2 - a^4}}.$$

Примѣръ 147-й. Равнобедренный прямоугольный однородный тяжелый треугольникъ ABB_1 (черт. 156) опирается на два болта K и K_1 , находящіеся на одномъ уровнѣ; высота треугольника h , разстояніе KK_1 равно $2n$. Определить положенія равновѣсія треугольника, когда онъ въ вертикальной плоскости.

Середину O разстоянія KK_1 примемъ за начало координатъ, ось Uoz направимъ вертикально внизъ; черезъ θ означимъ уголъ, составляемый направлениемъ AC съ вертикальною линіею.

Потенціалъ силы тяжести въ этомъ случаѣ равенъ Py_c ; ординату центра инерціи C надо выразить функціею угла θ .

Разность ординатъ точекъ A и C равна $\frac{2}{3}h \cos \theta$; ордината точки A равна \overline{OA} , умноженной на синусъ угла DOA ; такъ какъ треугольникъ $КАК_1$ — прямоугольный, то \overline{OA} равна \overline{OK} , т. е. n , и уголъ DOA вдвое болѣе угла DKA , т. е. $(\frac{\pi}{4} - \theta)$; поэтому:

$$U = P (n \cos 2\theta - \frac{2}{3}h \cos \theta),$$

$$P\left(\frac{2}{3}h \sin \theta - 2n \sin 2\theta\right) \delta\theta,$$

$$P\left(\frac{2}{3}h \cos \theta - 4n \cos 2\theta\right) (\delta\theta)^2.$$

ний видно, что если h меньше $6n$, то треугольник
равновѣсія:

$\theta = 0$, такъ какъ при немъ

$$' = -4n P\left(1 - \frac{h}{6n}\right) (\delta\theta)^2,$$

$\theta = +\theta_1$, $\theta = -\theta_1$, гдѣ $6n \cos \theta_1 = h$, такъ
великъ:

$$' = 4n P\left(1 - \frac{h^2}{36n^2}\right) (\delta\theta)^2.$$

h , то возможно только первое положеніе равнове-
сустойчиво.

На два болта K и K_1 , расположенные какъ ука-
зываетъ примѣръ, опирается тяжелый однородный дискъ
, остающійся постоянно въ вертикальной плоско-
сти полуосей эллипса a и b . Опредѣлить положе-
ознать ихъ устойчивость.

иска можетъ быть выраженъ такъ:

$$U = -P \cdot \overline{CO} \sin \varphi,$$

авляемый направленіемъ \overline{CO} съ горизонтальнымъ
и. черт. 157).

φ выразимъ въ длинѣ α полудіаметра CE па-
рала K_1 ; означимъ черезъ β длину полудіаметра CF ,
рда; какъ извѣстно, по свойствамъ эллипса:

$$1 + \frac{n^2}{a^2} = 1, \quad \pi ab = \pi \alpha \beta \sin \varphi.$$

$$\sqrt{1 - n^2}, \quad \delta U = -P \frac{ab(1 - 2n^2)}{n \sqrt{1 - n^2}} \delta u,$$

неніе ($n: \alpha$).

Означимъ черезъ θ уголъ $\angle CX_1$, гдѣ CX_1 есть наибольшій полу-
діаметръ a ; такъ какъ:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2},$$

то:

$$u \delta u = n^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \sin \theta \cos \theta \delta \theta,$$

$$u \delta^2 u + (\delta u)^2 = n^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \cos 2\theta (\delta \theta)^2.$$

Приравнявъ δU нулю, получимъ три положенія равновѣсія; пер-
вое: $\theta = 0$, второе: $\theta = \frac{\pi}{2}$, третье: $2u^2 = 1$. Рассмотримъ устойчи-
вость этихъ положеній.

$$1) \theta = 0, \quad a = a,$$

$$\delta^2 U \cdot \sqrt{1 - u_1^2} = -P \frac{ab}{n} (1 - 2u_1^2) \delta^2 u,$$

$$\delta^2 u = an \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) (\delta \theta)^2,$$

гдѣ $u_1 a = n$; если n меньше a , дѣленнаго на квадратный корень изъ
двухъ, то это положеніе устойчиво.

$$2) \theta = \frac{\pi}{2}, \quad a = b,$$

$$\delta^2 U \cdot \sqrt{1 - u_2^2} = -P \frac{ab}{n} (1 - 2u_2^2) \delta^2 u,$$

$$\delta^2 u = -bn \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) (\delta \theta)^2,$$

гдѣ $u_2 b = n$; если n больше b , дѣленнаго на квадратный корень изъ двухъ,
то это положеніе устойчиво.

$$3) 2u_3^2 = 1, \quad a = n\sqrt{2},$$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}};$$

Когда три нижние шара соприкасаются между собою, тогда синусъ угла φ и z имѣютъ слѣдующія значенія:

$$l\sqrt{3} \sin \varphi_1 = 2r = (R + r) \sqrt{3} \sin \psi_1,$$

$$z_1 = l \cos \varphi_1 - (R + r) \cos \psi_1.$$

Меньше этой величины φ_1 уголъ φ быть не можетъ; z можетъ быть меньше z_1 , но для этого нужно, чтобы шаръ C отдѣлился отъ нижнихъ шаровъ.

При z большемъ z_1 , разстоянія u болѣе $2r$, притомъ углы φ и ψ и разстояніе z могутъ быть выражены функціями отъ u слѣдующимъ образомъ:

$$l\sqrt{3} \sin \varphi = (R + r) \sqrt{3} \sin \psi = u,$$

$$z = l \cos \varphi - (R + r) \cos \psi.$$

Потенціалъ силъ тяжести выразится такъ:

$$U = 3pl \cos \varphi + Pz.$$

Для u большихъ $2r$ первая и вторая варіяція отъ U могутъ быть выражены такъ:

$$\delta U = \left[\frac{P}{\sqrt{3}(R+r)^2 - u^2} - \frac{3p+P}{\sqrt{3}^2 - u^2} \right] \frac{u \delta u}{\sqrt{3}}, \dots \dots (1038)$$

$$\delta^2 U = \left[\frac{P(R+r)^2}{(3(R+r)^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(3p+P)R^2}{(3^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \sqrt{3} (\delta u)^2.$$

Для u равнаго $2r$ и для положительныхъ δz , варіяція δU выражается тою же формулою (1038), но вмѣсто u надо подставить $2r$ и притомъ должно имѣть въ виду, что $\delta u > 0$; составится слѣдующее выраженіе:

$$\delta_1 U = \left[\frac{P}{\sqrt{3}(R+r)^2 - 4r^2} - \frac{3p+P}{\sqrt{3}^2 - 4r^2} \right] \frac{2r \delta u}{\sqrt{3}}; \delta u > 0.$$

Въ томъ же положеніи, для отрицательныхъ δz , варіяція δU будетъ слѣдующая:

$$\delta_2 U = P \delta z; \delta z < 0.$$

Положеніе $s = z_1$ будетъ положеніемъ равновѣсія, если $\delta_1 U$ будетъ отрицательною, подобно $\delta_2 U$; для этого необходимо, чтобы было:

$$(3p + P) > Pf(2r), \dots \dots \dots (1039)$$

гдѣ $f(u)$ есть обозначеніе слѣдующей функціи отъ u :

$$f(u) = \sqrt{\frac{3u^2 - u^3}{3(R+r)^2 - u^2}}.$$

Относительно этой функціи слѣдуетъ замѣтить, что она возрастаетъ съ увеличеніемъ u , потому что l болѣе $(R+r)$; поэтому, для $u > 2r$:

$$f(u) > f(2r) > f(0);$$

при $u = \sqrt{3}(R+r)$ функція f обращается въ ∞ .

Если условіе (1039) удовлетворено, т. е., если вѣсъ P верхняго шара менѣе $3p:(f(2r) - 1)$, то существуетъ еще одно положеніе равновѣсія при такомъ u_0 , которое удовлетворяетъ равенству:

$$(3p + P) = Pf(u_0),$$

потому что при этомъ u выраженіе (1038) обращается въ нуль; однако, это положеніе неустойчивое, какъ въ этомъ нетрудно убѣдиться.

Примѣръ 151-й. Положенія равновѣсія тяжелой твердой оболочки, имѣющей видъ сферическаго сегмента и тяжелаго стержня, упирающагося однимъ концомъ A во внутреннюю поверхность ея; сегментъ лежитъ на горизонтальной плоскости. Принять въ расчетъ треніе конца A о поверхность оболочки и боковой поверхности стержня о край D см. черт. 160).

Для того, чтобы стержень ADB находился въ положеніи равновѣсія подъ вліяніемъ приложенныхъ къ нему силъ R_1 и R_2 и вѣса, необходимо, чтобы точка N пересѣченія направлений силъ R_1 и R_2 приключалась на одной вертикальной линіи съ центромъ инерціи C_s стержня.

Для того, чтобы вся система находилась въ равновѣсіи подъ вліяніемъ вѣса ея и реакціи плоскости въ точкѣ опоры H , необходимо, чтобы общій центръ C_0 инерціи оболочки и стержня находился на вертикальной линіи OH .

Выразивъ эти два условія формулами, получимъ условія равновѣсія системы.

Пусть OC_1M есть ось симметрии сегмента, C_1 — его центр инерции, β — угол MOD и φ — угол, составляемый осью симметрии OC_1M с вертикальной линією OH при положеніи равновѣсія системы.

Пусть a есть разстояніе центра инерции C_2 стержня отъ конца A , E — середина длины AD , θ — уголъ, составляемый направлениемъ OE с вертикальной линією OH (это-же есть уголъ наклоненія стержня къ горизонту), ϵ и ϵ' — углы, составляемые направлениемъ силъ R_1 и R_2 с нормальми AO и Dn ; P_1 и P_2 вѣса сегмента и стержня.

Выразимъ, что точки N и C_2 находятся на одной вертикальной линіи: для этого, написавъ слѣдующія равенства:

$$\frac{\overline{AC_2}}{\overline{AN}} = \frac{\sin(ANC_2)}{\sin(NC_2A)}; \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{AN}} = \frac{\sin(AND)}{\sin(NDA)},$$

выразимъ заключающіеся здѣсь углы въ углахъ β , φ , θ , ϵ , ϵ' , принимая въ расчетъ, что NC_2 вертикально:

$$NC_2A = \frac{\pi}{2} + \theta, \quad NDA = \frac{\pi}{2} - \epsilon', \quad EOD = \beta - \varphi - \theta,$$

$$ANC_2 = \beta + \epsilon - \varphi - 2\theta, \quad AND = \beta + \epsilon + \epsilon' - \varphi - \theta.$$

Затѣмъ исключимъ изъ этихъ двухъ равенствъ AN и выразимъ AD такимъ образомъ:

$$AD = 2R \sin(\beta - \varphi - \theta),$$

тогда получимъ условіе равновѣсія стержня:

$$\begin{aligned} a \cos \theta \sin(\beta + \epsilon + \epsilon' - \varphi - \theta) = \\ = 2R \cos \epsilon' \sin(\beta - \varphi - \theta) \sin(\beta + \epsilon - \varphi - 2\theta). \end{aligned}$$

Далѣе, чтобы выразить, что точка C_0 находится на вертикальной линіи OH , напишемъ слѣдующее равенство:

$$P_1 \cdot \overline{OC_1} \sin \varphi = P_2 (a \cos \theta - R \sin(\beta - \varphi - 2\theta));$$

это будетъ второе условіе равновѣсія.

Примѣръ 153-й. Однородный тяжелый стержень (длина $2a$, вѣсъ P) помѣщенъ въ горизонтальномъ положеніи внутри шероховатой сферы радиуса R ; опредѣлить самое высокое горизонтальное положеніе его, принимая въ расчетъ треніе между сферою и концами стержня.

Возьмемъ самое нижнее горизонтальное положеніе равновѣсія стержня (черт. 162); въ этомъ положеніи стержень AB опирается своими концами на сферу въ точкахъ ея большаго вертикальнаго круга. Силы R и R' , приложенныя къ концамъ стержня и образующіяся изъ реакцій поверхности и тренія, должны заключаться въ плоскости этого круга и направленія ихъ должны пересѣчься въ какой либо точкѣ N вертикальной линіи, проходящей черезъ центръ инерціи C стержня (а слѣдовательно и черезъ центръ сферы), такъ что направленія этихъ силъ должны быть одинаково наклонены къ вертикальной линіи. Это условіе все таки не можетъ вполне опредѣлить направленій силъ R и R' , потому что уголъ, составляемый ими съ нормальми AO и BO , можетъ имѣть произвольное положительное или отрицательное значеніе, не большее ϵ_1 , угла тренія. На чертежѣ 162 изображены слѣды конусовъ тренія (см. стр. 276) точекъ A и B ; силы R и R' могутъ имѣть всякія направленія, заключающіяся внутри угловъ N_1AN_2 и N_1BN_2 .

Представимъ себѣ, что стержень переведенъ въ сосѣднее горизонтальное положеніе, въ которомъ плоскость AOB уже не вертикальна; проведемъ черезъ AB вертикальную плоскость Π (черт. 163). Если взятое положеніе стержня есть положеніе равновѣсія, то силы R и R' должны заключаться въ плоскости Π и направленія ихъ должны пересѣчься на вертикальной линіи, проходящей черезъ центръ инерціи; но направленія этихъ силъ должны заключаться либо внутри, либо на поверхности конусовъ тренія; слѣдовательно, внутри угловъ N_2AN_1 и N_2BN_1 (черт. 163), образуемыхъ пересѣченіемъ плоскости Π съ конусами тренія, заключаются всѣ тѣ направленія, которыя могутъ имѣть силы R и R' , уравнивающіяся съ силою тяжести стержня въ разсматриваемомъ положеніи его.

Переводя стержень въ дальнѣйшія горизонтальныя положенія равновѣсія, подымая его все выше и выше, мы будемъ замѣчать, что величины угловъ N_1AN_2 , N_1BN_2 уменьшаются все болѣе и болѣе, пока наконецъ не достигнемъ до такого горизонтальнаго положенія, при которомъ вертикальная плоскость Π будетъ касательною плоскостью къ конусамъ тренія; это и будетъ самымъ высшимъ горизонтальнымъ положеніемъ стержня.

При этомъ положеніи равновѣсія стержня, направленія силъ R и

Для опредѣленія положеній точекъ системы мы будемъ имѣть не болѣе $(2n - 2)$ равенствъ, а именно $(n - 1)$ уравненій связей и не болѣе $(n - 1)$ условій равновѣсія, такъ какъ два условія равновѣсія (1040) не заключаютъ координатъ; число же координатъ равно $2n$, поэтому двѣ координаты могутъ быть произвольны. По характеру связей очевидно, что за произвольныя координаты можно взять обѣ координаты одной изъ точекъ системы.

Примемъ за произвольныя — координаты точки M_1 . Положенія остальныхъ точекъ можемъ опредѣлять или вычисленіемъ, или при помощи слѣдующаго построенія.

Къ точкѣ M_1 (черт. 165, а) приложена данная сила F_1 и реакція λ_{12} первой связи; такъ какъ эти двѣ силы должны взаимно уравновѣшиваться, то реакція λ_{12} должна быть равна и противоположна F_1 , а потому неизмѣняемая связь l_{12} должна быть направлена вдоль по F_1 или противоположно F_1 ; если это есть стержень, то можетъ быть либо то, либо другое, если же это есть нерастяжимая нить, то она должна расположиться отъ точки M_1 по направленію противоположному F_1 , потому что реакціи нити должны быть направлены внутрь втянутой нити (см. стр. 345).

Отложивъ по направленію неизмѣняемой связи длину l_{12} , получимъ положеніе точки M_2 .

Къ точкѣ M_2 приложены: реакція λ_{12}' связи l_{12} , равная и противоположная реакціи λ_{12} , а, слѣдовательно, равная и одинаково направленная съ силою F_1 , далѣе сила F_2 и наконецъ реакція λ_{23} связи l_{23} ; такъ какъ эти три силы должны взаимно уравновѣшиваться, то величину и направленіе реакціи λ_{23} получимъ, построивъ геометрическую сумму длинъ F_1 и F_2 (см. черт. 165, б). Если связь l_{23} есть нерастяжимая нить, то она должна расположиться отъ точки M_2 по направленію λ_{23} (т. е. параллельно \overline{bO}), если же это есть стержень, то онъ можетъ имѣть и противоположное направленіе. Отложивъ по направленію неизмѣняемой связи длину l_{23} , получимъ положеніе точки M_3 .

Продолжаемъ такимъ же образомъ далѣе; направленіе $M_2 M_3$ параллельно или противоположно-параллельно направленію \overline{cO} гео-

и M_4 — натяженія λ_{12}' и λ_{45} ; взглянувъ на многоугольникъ силъ (черт. 165, b), прямо увидимъ, что величины и направленія этихъ силъ и натяженій образуютъ замѣнутый многоугольникъ $OabcdO$; то же самое относится и ко всякой части многоугольника плечъ, находящагося въ положеніи равновѣсія.

Кромѣ того, слѣдуетъ замѣтить, что равенъ нулю также и главный моментъ силъ, приложенныхъ къ вершинамъ, и натяженій, приложенныхъ къ оконечностямъ какой либо части многоугольника плечъ, находящагося въ положеніи равновѣсія; это видно изъ того, что главный моментъ одной силы и двухъ натяженій, приложенныхъ къ каждой вершинѣ, равенъ нулю и изъ того, что моменты натяженій каждого плеча многоугольника равны и прямопротивоположны.

По этому можемъ сказать слѣдующее:

Силы, приложенныя къ вершинамъ какой либо части многоугольника плечъ, находящагося въ положеніи равновѣсія, и натяженія, приложенныя къ оконечностямъ этой части, взаимноуравновѣшиваются черезъ посредство плечъ этой части такъ, что главный векторъ и главный моментъ ихъ равны нулю; слѣдовательно, равновѣсіе этой части многоугольника плечъ не измѣнилось бы, если бы она вдругъ отвердѣла и обратилась бы въ неизмѣняемую систему. То же самое относится ко всякой части многоугольника плечъ. (1041)

При рѣшеніи вопроса о равновѣсіи веревочнаго многоугольника мы задались предположеніемъ, что направленія всѣхъ силъ F_1, F_2, \dots, F_n параллельны одной плоскости или заключаются въ одной плоскости; но такое ограниченіе не необходимо: силы F_1, F_2, \dots, F_n могутъ имѣть какія угодно направленія и какія угодно величины, лишь бы главный векторъ ихъ былъ равенъ нулю; во всякомъ случаѣ вышеизложенное построеніе рѣшаетъ вопросъ и совершается по тому же правилу, не смотря на то, что многоугольникъ силъ и многоугольникъ плечъ могутъ оказаться не плоскими фигурами. Положеніе (1041) тоже справедливо и въ примѣненіи къ неплоскимъ многоугольникамъ плечъ.

Сдѣланное ограниченіе не препятствуетъ намъ разсматривать и тѣ случаи, въ которыхъ распредѣленіе силъ претерпѣваетъ разрывъ сплошности по величинѣ или по направленію, какъ въ точкахъ A и B на чертежѣ 167-мъ; тогда надо только раздѣлить гибкую линію на части, не заключающія такихъ мѣстъ разрыва и разсматривать каждую часть отдѣльно.

Мѣсто какой либо точки M на нити выражается такимъ же образомъ, какъ и мѣсто точки на траекторіи (см. стр. 14-ю кинематической части), а именно разстояніемъ s , считаемымъ по длинѣ нити отъ одной изъ точекъ S_0 ея; одно изъ направленій по кривой считается положительнымъ, въ этомъ направленіи s увеличивается.

Силы, приложенныя къ точкамъ нити *разсчитываются на единицу длины нити*, т. е. слѣдующимъ образомъ. Положимъ, что мы хотимъ разсчитать подобнымъ образомъ силы, приложенныя къ нити въ точкѣ M (черт. 166) и въ сосѣдствѣ съ нею; беремъ весьма малую часть μ, μ_1 нити, заключающую въ себѣ точку M , составляемъ суммы ΣX , ΣY , ΣZ проеэкцій на оси координатъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ части μ, μ_1 нити и дѣлимъ эти суммы на длину Δs части μ, μ_1 , получимъ отношенія:

$$\frac{\Sigma X}{\Delta s}, \frac{\Sigma Y}{\Delta s}, \frac{\Sigma Z}{\Delta s}, \dots \dots \dots (1042)$$

затѣмъ будемъ брать все меньшія и меньшія длины $\mu', \mu''_1, \mu''_2, \dots$, заключающія въ себѣ точку M , составляя для нихъ такія отношенія, какъ (1042); по мѣрѣ того, какъ мы будемъ приближать длину выдѣляемой части къ нулю, величины составляемыхъ для нея отношеній (1042) будутъ приближаться къ нѣкоторымъ предѣламъ X_s , Y_s , Z_s , которые и называются проеэкціями на оси координатъ *силъ, дѣйствующей въ точкѣ M оси нити и разсчитанной на единицу длины*.

Изъ этого слѣдуетъ, что проеэкціи на оси координатъ совокупности силъ, приложенныхъ къ ничтожно-малому элементу Δs , заключающему въ себѣ точку M , будутъ равны:

$$(X_s + \varepsilon_1) \Delta s, (Y_s + \varepsilon_2) \Delta s, (Z_s + \varepsilon_3) \Delta s,$$

въ M — натяженіе λ , изображаемое радіусомъ векторомъ OM (черт. 168) параллельнымъ и противоположнымъ касательной MT въ этой точкѣ M , въ M_1 — натяженіе λ_1 , изображаемое длиною $\Lambda_1 O$, параллельною касательной $M_1 T_1$ въ точкѣ M_1 . На основаніи положенія (1041), примененнаго къ элементу MM_1 , можемъ написать слѣдующее равенство:

$$-\lambda \frac{dx}{ds} + \lambda_1 \left(\frac{dx}{ds} \right)_1 + (X_s + \varepsilon_s) \Delta s = 0;$$

раздѣливъ это равенство на Δs и переходя къ предѣлу, т. е. приближая точку M_1 къ точкѣ M , получимъ первое изъ трехъ слѣдующихъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \left(\lambda \frac{dx}{ds} \right)}{ds} + X_s &= 0, \\ \frac{d \left(\lambda \frac{dy}{ds} \right)}{ds} + Y_s &= 0, \\ \frac{d \left(\lambda \frac{dz}{ds} \right)}{ds} + Z_s &= 0; \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1043)$$

подобнымъ же образомъ получимъ и два остальныхъ уравненія.

Точка M есть которая либо изъ точекъ нити; слѣдовательно, для всякой точки оси нити, находящейся въ положеніи равновѣсія, должны быть удовлетворены уравненія вида (1043).

Что касается концовъ нити, то натяженія въ нихъ должны быть равны силамъ, приложеннымъ къ этимъ концамъ, а если концы закрѣплены, то направленія и величины натяженій нити на концахъ должны быть равны реакціямъ точекъ привѣса нити.

§ 174. Общіе законы относительно натяженія и кривизны въ точкахъ гибкой нерастяжимой нити, находящейся въ равновѣсіи. Связь между вопросами о равновѣсіи гибкой нити и вопросами о движеніи матерьяльной точки.

Если даны силы X, Y, Z какъ функціи отъ x, y, z , то дифференціальныя уравненія (1043) должны служить для опредѣленія вида

1) Натяжение λ есть такая функция отъ s , что производная отъ нея по s равняется отрицательно-взятой величинѣ проеэкціи силы \mathfrak{F} на направленіе касательной, проведенной въ сторону возрастающихъ s ; (1044).

2) Во всякой точкѣ нити плоскость кривизны заключаетъ въ себѣ направленіе силы \mathfrak{F} ; (1046).

3) Во всякой точкѣ нити главная нормаль составляетъ тупой уголъ съ направлениемъ \mathfrak{F} и величина кривизны равняется проеэкціи силы \mathfrak{F} на направленіе главной нормали, дѣленной на величину натяженія; (1045).

Если силы \mathfrak{F} имѣютъ потенциалъ, т. е. если:

$$\mathfrak{X}_s = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \mathfrak{Y}_s = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \mathfrak{Z}_s = \frac{\partial u}{\partial s},$$

то проеэкція \mathfrak{F} на направленіе касательной выразится такъ:

$$\mathfrak{F} \cos(\mathfrak{F}, T) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{ds}{ds} = \frac{du}{ds},$$

а потому тогда уравненіе (1044) дастъ слѣдующій интеграль:

$$\lambda + u = C = \lambda_0 + u_0, \dots \dots \dots (1047)$$

здѣсь λ_0 означаетъ величину натяженія въ точкѣ A , гдѣ $s = 0$, а u_0 — значеніе потенциала въ этой точкѣ.

Предположивъ, что силы \mathfrak{F} имѣютъ потенциалъ, помножимъ дифференціальныя уравненія (1043) на λ ; принявъ во вниманіе полученное выраженіе (1047) для λ , можно будетъ представить эти уравненія такъ:

$$\lambda \frac{d\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right)}{ds} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \lambda \frac{d\left(\lambda \frac{dy}{ds}\right)}{ds} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \lambda \frac{d\left(\lambda \frac{ds}{ds}\right)}{ds} = \frac{\partial Q}{\partial s},$$

гдѣ:

$$Q = \frac{1}{2} (C - u)^2 \dots \dots \dots (1048)$$

торію, описувану свободною матеріальною точкою при дѣйствіи сили, имѣющей потенціалъ .

$$U = \frac{1}{2} \frac{v^2}{m^2} (\lambda_0 + u_0 - u)^2,$$

если масса точки равна единицѣ, если начальное положеніе движущейся точки находится въ какой либо точкѣ A кривой, если направление начальной скорости совпадаетъ съ направлениемъ касательной въ точкѣ A и если величина начальной скорости равна (λ_0 в:м), иди λ_0 есть величина натяженія въ точкѣ A ; u_0 есть величина потенціала въ той же точкѣ.

Въ слѣдующемъ параграфѣ приведены примѣры.

§ 175. Примѣры вопросовъ относительно положеній равновѣсія свободной гибкой нерастяжимой нити.

Составимъ дифференціальныя уравненія равновѣсія свободной тяжелой нити.

Предположимъ, что за начало координатъ взята начальная точка нити, что положительная ось $Y^{орт}$ направлена вертикально внизъ, оси $X^{орт}$ и $Z^{орт}$ горизонтальны, и что вертикальная плоскость XU проведена черезъ касательную линію къ начальной точкѣ кривой; такъ какъ проэкціи силъ тяжести на ось $Z^{орт}$ равны нулю, то третье изъ уравненій (1043) будетъ имѣть видъ:

$$\frac{d\left(\lambda \frac{dz}{ds}\right)}{ds} = 0;$$

очевидно, оно имѣетъ интегралъ: $\lambda \frac{dz}{ds} = C$, но такъ какъ въ началѣ координатъ касательная къ кривой перпендикулярна къ оси $Z^{орт}$, то и на всемъ протяженіи кривой $\frac{dz}{ds}$ равно нулю, а, слѣдовательно, вся кривая заключается въ плоскости XU .

Проекція силъ тяжести на ось $X^{орт}$ равна нулю, а проекція на ось $Y^{орт}$ вѣса элемента ds равна $gxdx$, гдѣ x есть линейная плотность нити въ одной изъ точекъ элемента; поэтому: $X=0$, $Y=gx$,

Интегрируя уравненія (1049), получимъ:

$$\lambda \frac{dy}{ds} = C_3 - gxy \dots (1052), \quad \lambda \frac{dx}{ds} = C_1 \dots \dots \dots (1050)$$

Затѣмъ составимъ уравненіе (1044); въ настоящемъ случаѣ оно будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\frac{d\lambda}{ds} = - gx \frac{dy}{ds};$$

его интеграль:

$$\lambda = C_3 - gxy \dots \dots \dots (1053)$$

Изъ этого интеграла и изъ интеграла (1050) можно исключить λ , получимъ дифференціальное уравненіе перваго порядка:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{C_3 - gxy}{C_1}.$$

Сдѣлаемъ въ немъ подстановку:

$$\frac{C_3 - gxy}{C_1} = \eta, \quad \frac{gx}{C_1} = \frac{1}{k}, \quad \frac{x}{k} = \xi_1, \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{d\eta}{d\xi_1};$$

тогда изъ него получимъ:

$$\frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}} = - d\xi_1.$$

Произведемъ интегрированіе; получимъ

$$\log (\eta + \sqrt{\eta^2 - 1}) = C_4 - \xi_1 = \xi;$$

или

$$\eta + \sqrt{\eta^2 - 1} = e^\xi; \dots \dots \dots (1054)$$

а отсюда

$$\frac{1}{\eta + \sqrt{\eta^2 - 1}} = e^{-\xi},$$

или

$$\eta - \sqrt{\eta^2 - 1} = e^{-\xi} \dots \dots \dots (1055)$$

но

$$y' = \frac{d\eta}{d\xi} = \sqrt{\eta^2 - 1},$$

а изъ (1054) и (1055) найдемъ:

$$\sqrt{\eta^2 - 1} = \frac{1}{2}(e^{\xi} + e^{-\xi}),$$

поэтому получимъ:

$$s = -\frac{k}{2}(e^{\xi} - e^{-\xi}) = \frac{k}{2}(e^{\frac{x_1}{k}} - e^{-\frac{x_1}{k}}) \dots (1056)$$

Натяженіе выразится слѣдующею формулою:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{y_1}{k} \dots \dots \dots (1053, \text{bis})$$

И такъ, *тяжелая однородная гибкая нерастяжимая нить, находясь въ положеніи равновѣсія, принимаетъ видъ упругой линіи; натяженіе имѣетъ наименьшую величину въ самой нижней точкѣ кривой, а въ прочихъ точкахъ имѣетъ значенія, выражаемая формулою (1053 bis).*

Примѣръ 155-й. При какомъ законѣ распредѣленія массы нити вдоль по ея длинѣ, свободная тяжелая нить, находясь въ положеніи равновѣсія, будетъ имѣть видъ параболы: $x^2 = 2py$? Положительная ось Y^{000} направлена вертикально вверхъ.

Отвѣтъ. По формулѣ (1051) найдемъ:

$$x ds = \frac{C_1}{g\rho} dx,$$

т. е. массы всѣхъ элементовъ нити должны быть пропорціональны проеціямъ ихъ длинъ на горизонтальную ось.

Примѣръ 156-й. Предполагается, что распредѣленіе массы нити такое, при которомъ отношеніе линейной плотности къ величинѣ натяженія имѣетъ одну и ту же величину μ по всему протяженію нити; каковъ видъ нити и законъ распредѣленія натяженій? Положительная ось Y^{000} вертикально вверхъ.

Прежде всего можем получить интегралы:

$$\lambda \frac{ds}{ds} = C_1, \quad \lambda = C_2 - \frac{\omega^2 \rho^2}{2}, \quad \rho^2 = x^2 + y^2;$$

затѣмъ изъ первыхъ двухъ уравненій можно исключить ω^2 , вслѣдствіе чего получится дифференціальное уравненіе, которое можно интегрировать; интегралъ будетъ:

$$\lambda \left(x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \right) = C_3 = \lambda \rho^2 \frac{d\phi}{ds}.$$

Изъ перваго и изъ третьяго интеграла слѣдуетъ:

$$\rho^2 \frac{d\phi}{ds} = \frac{C_3}{C_1}; \dots\dots\dots (105'$$

поэтому первый интегралъ можно представить подъ слѣдующимъ видомъ

$$\frac{1}{C_1^2} \left(C_2 - \frac{\omega^2 \rho^2}{2} \right)^2 = 1 + \left(\frac{d\rho}{ds} \right)^2 + \frac{C_3^2}{C_1^2 \rho^2}.$$

Интегрируя это дифференціальное уравненіе, получимъ одно изъ уравненій кривой линіи въ видѣ зависимости между ρ и s ; вырази s въ функціи отъ ρ или обратно ρ въ функціи отъ s , можно будетъ исключить одну изъ этихъ двухъ переменныхъ изъ уравненія (105' интегрируя это уравненіе, получимъ другое уравненіе кривой.

Въ частномъ случаѣ эта кривая можетъ быть винтовою линіею если C_3 равно нулю, то кривая будетъ плоскою.

Примѣръ 158-й. Однородная нить, заключающаяся въ плоское ХУ, подвержена дѣйствию силъ, имѣющихъ потенціалъ:

$$U = -\mu\phi,$$

причемъ $\lambda_0 = \mu\phi_0$.

Опредѣлить видъ кривой, законъ натяженія и рассмотреть соответственный вопросъ движенія матеріальной точки.

Сила \mathfrak{F} здѣсь притягательная къ началу координатъ, такъ какъ:

$$\mathfrak{X} = -\mu \frac{x}{\rho}, \quad \mathfrak{Y} = -\mu \frac{y}{\rho}.$$

Интегралъ (1047) въ настоящемъ случаѣ будетъ:

$$\lambda = \mu\phi;$$

сила — отталкивающая отъ начала координатъ, дифференціальное уравненіе кривой:

$$\frac{1}{\rho^4} \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 = \frac{n^2}{a^2} + \frac{2\mu}{a^2} \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^2}$$

и уравненіе кривой въ конечномъ видѣ:

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\theta + \gamma)}; \quad p = \frac{a^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{n^2 a^2}{\mu^2}}.$$

Матеріальная точка, движущаяся подъ вліяніемъ силы, имѣю потенціалъ:

$$U = \frac{e^2}{m} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{n^2}{2} \right),$$

описываетъ такую же траекторію, если масса ея равна единицѣ и 1 томъ

$$v_0 = \frac{e}{m} \lambda_0, \quad \rho_0 v_0 \sin(v_0, \rho_0) = a \frac{e}{m}.$$

§ 176. Положеніе равновѣсія гибкой нерастяжимой нити, помѣщенной на данной поверхности. Геодезическіе линіи.

Если гибкая нерастяжимая нить помѣщена на какой либо вогнутой поверхности, то въ числѣ приложенныхъ къ ней силъ дѣйствуютъ нормальныя реакціи поверхности, которыя также будемъ разсчитывать на единицу длины нити, подобно ϵ §; а именно, величину главнаго вектора реакцій поверхности, приложенныхъ къ элементу ds , выразимъ такъ:

$$\Lambda ds \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2},$$

а проеціи его на оси координатъ выразимъ произведеніями:

$$\Lambda \frac{\partial f}{\partial x} ds, \quad \Lambda \frac{\partial f}{\partial y} ds, \quad \Lambda \frac{\partial f}{\partial z} ds,$$

гдѣ f означаетъ функцію отъ x, y, z , представляющую первую часть уравненія $f(x, y, z) = 0$ поверхности, а Λ есть неизвѣстная на функція отъ z .

вержена только реакціямъ этой поверхности; тогда интеграль уравненія (1044) будетъ $\lambda = \lambda_0$ (т. е. натяженіе нити одинаково по всей длинѣ нити), а повтому уравненія (1058) получать слѣдующій видъ:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{\Lambda}{\lambda_0} \frac{df}{dx}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{\Lambda}{\lambda_0} \frac{df}{dy}, \quad \frac{d^2s}{ds^2} = -\frac{\Lambda}{\lambda_0} \frac{df}{ds},$$

тождественный съ видомъ уравненій (320) страницы 199-й; слѣдовательно, нить располагается по геодезической кривой.

Если силы \mathfrak{F} имѣютъ потенциалъ U , то натяженіе нити будетъ выражаться разностью $(C - U)$, гдѣ C — постоянная; сравнивъ дифференціальныя уравненія (1058), помноженные на λ , съ дифференціальными уравненіями движенія матеріальной точки, имѣющей массу равную единицѣ, остающейся на поверхности (1059) и подверженной дѣйствию силъ, имѣющихъ потенциалъ

$$U = \frac{m}{2} \frac{1}{\lambda} (C - U)^2,$$

можемъ заключить, что траекторія этой точки тождественна съ кривою линіею, образуемою нитью въ положеніи равновѣсія, если начальное положеніе движущейся точки совпадаетъ съ начальною точкою нити, если начальная скорость v_0 имѣетъ направленіе касательной къ нити и если $v_0 m = \lambda_0 g$. Между Λ и реакціею \mathfrak{N} поверхности, приложенною къ движущейся точкѣ, оказывается слѣдующая зависимость:

$$\Lambda = \frac{m}{g^2} \frac{\mathfrak{N}}{(C - U) \Delta f}.$$

Примѣръ 160-й. Положеніе равновѣсія тяжелой однородной нити на гладкой сферической поверхности.

Здѣсь:

$$U = gxz = gxR \cos \varphi,$$

если положительная ось Z^{000} направлена вертикально внизъ.

Составивъ два первыя дифференціальныя уравненія (1058) для рассматриваемаго теперь случая и исключивъ изъ нихъ Λ , получимъ уравненіе (1057, bis), имѣющее интеграль:

$$\lambda \left(x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \right) = \alpha, \quad \lambda R^2 \sin^2 \varphi \frac{d\varphi}{ds} = \alpha; \dots (1061)$$

такой линіи съ производящими, равенъ α , а радіусъ круга основанія равенъ R , пусть θ означаетъ, по прежнему, одну изъ цилиндрическихъ координатъ; какъ извѣстно, кривизна нормального сѣченія поверхности цилиндра и длина дуги винтовой линіи выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin^2 \alpha}{R}, \quad s = \frac{R\theta}{\sin \alpha},$$

поэтому законъ натяженія будетъ такой:

$$\lambda = \lambda_0 e^{-k\theta \sin \alpha},$$

т. е. натяженіе убываетъ, вслѣдствіе тренія, въ геометрической прогрессіи.

Положимъ, что $k = 0,25$, что $\alpha = 30^\circ$ и что нить обернута четыре раза вокругъ цилиндра; тогда отношеніе между натяженіями на концахъ нити достигаетъ величины:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = e^\pi = 23,14;$$

если же нить будетъ обернута 12 разъ, то отношеніе натяженій достигнетъ величины:

$$e^{8\pi} = 12396.$$

ГЛАВА XIV.

Объ ударѣ системы точекъ и твердыхъ тѣлъ о связи.

§ 177. Ударъ системы свободныхъ матерьяльныхъ точекъ о связь.

Положимъ, что система матерьяльныхъ точекъ, подверженныхъ дѣйствію какихъ либо силъ, связана неударяющею связью:

$$v(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t) \geq 0; \dots (1062)$$

предполагаются постоянными во все время удара, а импульсами мгновенных сил за время удара пренебрегают; поэтому, измѣненія скоростей материальныхъ точекъ во время удара выразятся слѣдующимъ образомъ (здѣсь написаны только равенства, относящіеся къ точкѣ i -той):

$$\begin{aligned} m_i \frac{dx_i}{dt} - m_i x_{0i}' &= \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x_i} j, \\ m_i \frac{dy_i}{dt} - m_i y_{0i}' &= \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y_i} j, \quad j = \int_{t_0}^t \lambda dt, \\ m_i \frac{dz_i}{dt} - m_i z_{0i}' &= \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z_i} j, \end{aligned}$$

гдѣ t есть какой либо моментъ времени, заключающійся въ промежуткѣ между t_0 и $(t_0 + \infty)$; въ частныя производныя отъ \mathfrak{B} должны быть подставлены: вмѣсто t — моментъ t_0 и вмѣсто координатъ точекъ — тѣ значенія ихъ, которыя онѣ имѣютъ въ этотъ моментъ; величины x_{0i}' , y_{0i}' , z_{0i}' суть проекціи скорости v_{0i} на оси координатъ.

Изъ этихъ уравненій можно составить слѣдующее равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i (P_i \mathfrak{B}) \cos(P_i \mathfrak{B}, v_i) = \sum_{i=1}^{i=n} v_{0i} (P_i \mathfrak{B}) \cos(P_i \mathfrak{B}, v_{0i}) + j \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} (P_i \mathfrak{B})^2,$$

изъ котораго видно, что сумма

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i P_i \cos(P_i, v_i) \dots \dots \dots (1066)$$

непрерывно возрастаетъ во время удара, такъ какъ непрерывно возрастаетъ интеграль j , который въ этомъ равенствѣ помноженъ на положительную величину:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} P_i^2.$$

$$\left. \begin{aligned} m_i \alpha_i &= m_i x_{0i}' + J \frac{\partial v}{\partial x_i} \\ m_i \beta_i &= m_i y_{0i}' + J \frac{\partial v}{\partial y_i} \\ m_i \gamma_i &= m_i z_{0i}' + J \frac{\partial v}{\partial z_i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1070, 1)$$

По этимъ формуламъ разсчитывается измѣненіе скоростей материальныхъ точекъ за время перваго акта удара; что касается до момента τ , раздѣляющаго оба акта, то онъ можетъ быть опредѣленъ слѣдующими словами: *это есть тотъ моментъ удара, въ который скорости точекъ удовлетворяютъ равенству (1067).*

Чтобы вычислить измѣненіе скоростей за время втораго акта удара, надо знать величину интеграла:

$$I = \int_{\tau}^t \lambda dt$$

за время этого акта.

Основываясь на аналогіи между процессомъ удара системы точекъ о связь и процессомъ удара одной точки о поверхность, дѣлаютъ слѣдующее предположеніе:

Предполагается, что отношеніе $(I : J)$ есть отвѣщенная дробь ϵ , величина которой не зависитъ ни отъ положеній точекъ системы, ни отъ скоростей ихъ, а только отъ упругихъ свойствъ частей механизма, замѣняющаго связь.

Дробь ϵ называется *коэффициентомъ возстановленія связи*.

Если величина коэффициента возстановленія связи извѣстна, то проэкціи x_i' , y_i' , z_i' на оси координатъ скоростей точекъ въ моментъ окончанія удара могутъ быть вычислены по слѣдующимъ формуламъ:

$$\left. \begin{aligned} m_i x_i' &= m_i x_{0i}' + J \frac{\partial v}{\partial x_i} (1 + \epsilon) \\ m_i y_i' &= m_i y_{0i}' + J \frac{\partial v}{\partial y_i} (1 + \epsilon) \\ m_i z_i' &= m_i z_{0i}' + J \frac{\partial v}{\partial z_i} (1 + \epsilon) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1071, 1)$$

$$y_1' = y_{01}', \quad z_1' = z_{01}', \quad y_2' = y_{02}', \quad z_2' = z_{02}'.$$

Слѣдовательно, проэкции скоростей точек на плоскость перпендикулярную къ линіи, соединяющей положенія точек, не измѣняются вслѣдствіе удара; измѣняются только проэкции скоростей на эту линію.

Полученныя формулы обыкновенно примѣняются къ вычисленію результата соударенія двухъ шаровъ; положивъ $\epsilon = 0$, получимъ формулы для неупругихъ шаровъ, а при $\epsilon = 1$ — для вполне упругихъ.

Примѣръ 163-й. Двѣ тяжелыя матеріальныя точки (массы m_1 и m_2) связаны одна съ другою нерастяжимою гибкою нитью длины l ; въ моментъ $t = 0$ обѣ онѣ находились въ началѣ координатъ и первая получила начальную скорость α по горизонтальной оси X^{oxy} , вторая же не получила никакой начальной скорости.

Опредѣлить движеніе этихъ точекъ и изслѣдовать весь рядъ послѣдовательныхъ соудареній, совершающихся черезъ нить, предполагая, что коэффициентъ возобновленія ϵ нити извѣстенъ.

Въ этомъ случаѣ уравненіе связи, находящейся въ состояніи напряженія, можетъ быть представлено такъ:

$$l^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 = 0,$$

слѣдовательно:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = -2(x_1 - x_2); \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 2(x_1 - x_2);$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = -2(y_1 - y_2); \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} = 2(y_1 - y_2), \quad P_1 = P_2 = 2l.$$

Съ самаго начала движеніе точекъ будетъ совершаться по закону:

$$x_1 = \alpha t, \quad y_1 = \frac{gt^2}{2}, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = \frac{gt^2}{2},$$

такъ что кратчайшее разстояніе между ними будетъ параллельно горизонту во все время этой части движенія и въ моментъ начала перваго соударенія; этотъ моментъ t_1 опредѣлится изъ равенства:

$$l - (x_1 - x_2) = 0, \quad \text{т. е.} \quad l - \alpha t_1 = 0.$$

и скорости точек послѣ втораго соударенія будутъ:

$$X_{12}' = X_{11}' - \frac{m_2}{m_1 + m_2} (X_{11}' - X_{21}') (1 + \epsilon) = \alpha \frac{m_1 + m_2 \epsilon^2}{m_1 + m_2},$$

$$X_{22}' = X_{21}' + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (X_{11}' - X_{21}') (1 + \epsilon) = \alpha \frac{m_1 (1 - \epsilon^2)}{m_1 + m_2},$$

$$X_{12}' - X_{22}' = - (X_{11}' - X_{21}') \epsilon = \alpha \epsilon^2.$$

Продолжая такимъ же образомъ далѣе, найдемъ, что промежутокъ времени между моментами ударовъ $(2n - 1)$ -аго и $2n$ -аго имѣетъ величину $(2l : \alpha \epsilon^{2n-1})$, а потому:

$$t_{2n} = \frac{l}{\alpha} + \frac{2l}{\alpha} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon^2} + \dots + \frac{1}{\epsilon^{2n-1}} \right).$$

Скорости точекъ послѣ этого момента будутъ:

$$\begin{aligned} (X_1')_{2n} &= \alpha - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \alpha (1 + \epsilon) (1 - \epsilon + \epsilon^2 - \dots - \epsilon^{2n-1}) = \\ &= \alpha \frac{m_1 + m_2 \epsilon^{2n}}{m_1 + m_2}, \end{aligned}$$

$$(X_2')_{2n} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \alpha (1 + \epsilon) (1 - \epsilon + \epsilon^2 - \dots - \epsilon^{2n-1}) = \alpha m_1 \frac{1 - \epsilon^{2n}}{m_1 + m_2},$$

а координаты точекъ въ моментъ t_{2n+1} будутъ:

$$(x_1)_{2n+1} = l + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{2l}{\epsilon^{2n}} \frac{1 - \epsilon^{2n}}{1 - \epsilon} = (x_2)_{2n+1} + l.$$

Если $\epsilon = 0$, то послѣ перваго удара обѣ точки будутъ продолжать движеніе по параболамъ параллельнымъ той, которую описываетъ ихъ центръ инерціи; дальнѣйшихъ ударовъ не будетъ, потому что разстояніе между точками будетъ оставаться постояннымъ.

Если $\epsilon = 1$, скорости точекъ послѣ 2-го, 4-го, и вообще послѣ всякаго четнаго удара будутъ:

$$(X_1')_{2n} = \alpha, \quad (X_2')_{2n} = 0,$$

а послѣ всякаго нечетнаго удара:

$$(X_1')_{2n+1} = \alpha \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \quad (X_2')_{2n+1} = \frac{2\alpha m_1}{m_1 + m_2}.$$

(посл точки въ моменты нечетныхъ ударовъ:

$$(x_1)_{2n-1} = l + \frac{4l m_1 (n-1)}{m_1 + m_2}, \quad (x_2)_{2n-1} = \frac{4l m_1 (n-1)}{m_1 + m_2},$$

оменты четныхъ ударовъ:

$$(x_1)_{2n} = -l + \frac{4l m_1 n}{m_1 + m_2}, \quad (x_2)_{2n} = \frac{4l m_1 n}{m_1 + m_2}.$$

чертежъ 173-мъ представлено движение въ случаѣ $m_2 = 3m_1$.
нмѣръ 164-й. Три матеріальныя точки m_1, m_2, m_3 , неподверженны
мъ силамъ, находятся въ слѣдующемъ состояніи на плоскости XY:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = a, \quad x_3 = 0$$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 4a - \epsilon a;$$

литъ, какъ будутъ онѣ двигаться послѣ соударенія, которое про-
гъ при встрѣтѣ точекъ связи:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) - a^2 \geq 0.$$

ажется, что соудареніе произойдетъ въ моментъ $t_0 = \frac{3a}{\alpha}$; въ
моментъ координата y_3 равна a .

нмѣющимся формуламъ найдемъ, что

$$J = \frac{m_1 m_2 m_3}{2m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)} \frac{\alpha}{a} = \frac{m_1 m_2 m_3}{\mu} \frac{\alpha}{a}$$

скорости точекъ послѣ удара будутъ таковы:

$$x_1' = -\frac{m_2 m_3}{\mu} \alpha (1 + \epsilon), \quad y_1' = -\frac{m_2 m_3}{\mu} \alpha (1 + \epsilon)$$

$$x_2' = \frac{m_2 m_1}{\mu} \alpha (1 + \epsilon), \quad y_2' = 0, \quad x_3' = 0,$$

$$y_3' = -\alpha + \frac{m_1 m_2}{\mu} \alpha (1 + \epsilon).$$

§ 178. Ударъ системы матеріальныхъ точекъ, связанныхъ удерживающими связями, о связь неудерживающую.

Когда матеріальныя точки системы связаны нѣсколькими удерживающими связями:

$$s_1 = 0, s_2 = 0, \dots s_p = 0,$$

то, при вычисленіи удара, происходящаго при встрѣчѣ точками не-удерживающей связи (1062), предполагается, что скорости точекъ удовлетворяютъ равенствамъ (493, 1, 2, ... p) (стр. 351) не только до и послѣ удара, но и во все время удара.

Чтобы получить уравненія, выражающія измѣненія скоростей точекъ въ теченіи удара, составимъ дифференціальныя уравненія движенія точекъ, подверженныхъ задаваемымъ силамъ и реакціямъ связей $s_1, s_2, \dots s_p$, s и произведемъ надъ ними интегрированіе по времени въ предѣлахъ отъ t_0 до t (гдѣ t_0 есть моментъ начала удара); получимъ слѣдующія равенства:

$$\left. \begin{aligned} m_i \frac{dx_i}{dt} &= m_i x'_{0i} + \mu_1 \frac{\partial s_1}{\partial x_i} + \mu_2 \frac{\partial s_2}{\partial x_i} + \dots + \mu_p \frac{\partial s_p}{\partial x_i} + j \frac{\partial s}{\partial x_i}, \\ m_i \frac{dy_i}{dt} &= m_i y'_{0i} + \mu_1 \frac{\partial s_1}{\partial y_i} + \mu_2 \frac{\partial s_2}{\partial y_i} + \dots + \mu_p \frac{\partial s_p}{\partial y_i} + j \frac{\partial s}{\partial y_i}, \\ m_i \frac{dz_i}{dt} &= m_i z'_{0i} + \mu_1 \frac{\partial s_1}{\partial z_i} + \mu_2 \frac{\partial s_2}{\partial z_i} + \dots + \mu_p \frac{\partial s_p}{\partial z_i} + j \frac{\partial s}{\partial z_i}, \end{aligned} \right\} \quad (1074, 1)$$

гдѣ:

$$\mu_1 = \int_{t_0}^t \lambda_1 dt, \quad \mu_2 = \int_{t_0}^t \lambda_2 dt, \dots \mu_p = \int_{t_0}^t \lambda_p dt, \quad j = \int_{t_0}^t \lambda dt.$$

Можно доказать, что и въ этихъ случаяхъ разность:

$$\frac{ds}{dt} - \left(\frac{ds}{dt} \right)_0 \dots \dots \dots (1075)$$

непрерывно возрастаетъ съ возрастаніемъ интеграла j .

изводныхъ отъ z, z_1, z_2, \dots, z_p постоянны въ теченіи всего времени удара; поэтому, очевидно, интегрируя въ вышесказанныхъ предѣлахъ уравненія (1082), получимъ равенства (1080).

Слѣдовательно, при расчетѣ удара системы матеріальныхъ точекъ, связанныхъ удерживающими связями, о связь неудерживающую, можно поступить слѣдующимъ образомъ:

Надо составить тѣ $(3n - p)$ дифференціальныя уравненія движенія системы, которыя не содержатъ множителей $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, свойственныхъ удерживающимъ связямъ; въ этихъ уравненіяхъ надо замѣнить разности:

$$m_i x_i'' - X_i, \quad m_i y_i'' - Y_i, \quad m_i z_i'' - Z_i$$

разностями:

$$m_i (x_i' - x_{0i}'), \quad m_i (y_i' - y_{0i}'), \quad m_i (z_i' - z_{0i}'),$$

а множитель λ , свойственный неудерживающей связи z , — величиною $J(1 + \epsilon)$, тогда получимъ $3n - p$ уравненій, которыя, вмѣстѣ съ равенствами (1081), послужатъ для опредѣленія скоростей точекъ послѣ удара; величина интеграла J выразится формулою (1078), которую можно получить изъ уравненій, относящихся къ первому акту удара.

Если декартовы координаты точекъ выразимъ помощью n независимыхъ координатныхъ параметровъ q_1, q_2, \dots, q_n , такъ что неудерживающая связь выразится условіемъ:

$$z((q_1, q_2, \dots, q_n, t)) \geq 0,$$

то составимъ Лагранжевы дифференціальныя уравненія:

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q_k} + Q_k + \lambda \frac{\partial z}{\partial q_k} \dots \dots \dots (541, k)$$

и во вторыхъ части этихъ уравненій подставимъ значенія координатныхъ параметровъ и скоростей $q_{01}', q_{02}', \dots, q_{0n}'$ въ моментъ встрѣчи системы со связью z , а вмѣсто t подставимъ t_0 ; затѣмъ произведемъ надъ

скорости точек по окончаніи удара изъ равенствъ (1083, k) или изъ равенствъ:

$$q_k' = q_{0k}' + J(1 + \epsilon) \sum_{\epsilon=1}^{\epsilon=n} h_{k\epsilon} \frac{\partial v}{\partial q_\epsilon} \dots \dots (1087, k)$$

Примѣчаніе. Если система точекъ, связанныхъ удерживающими связями v_1, v_2, \dots, v_p была сначала въ покоѣ и въ нѣкоторый моментъ получила совокупность мгновенныхъ толчковъ, то скорости q_1', q_2', \dots, q_n' , приобретенныя вслѣдствіе этихъ мгновенныхъ силъ, опредѣляются изъ слѣдующихъ выраженій.

Произведемъ надъ Лагранжевыми уравненіями (531) стр. 367 интегрированія по t въ предѣлахъ отъ нуля до Δ , т. е. за время дѣйствія мгновенныхъ силъ; получимъ:

$$p_1 = Q_1, p_2 = Q_2, \dots \dots p_n = Q_n, \dots \dots (1088)$$

гдѣ

$$Q_k = \int_0^\Delta Q_k dt = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \int_0^\Delta X_i dt + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \int_0^\Delta Y_i dt + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \int_0^\Delta Z_i dt \right);$$

а скорости выразятся такъ:

$$q_k' = \beta_k + h_{1k} Q_1 + h_{2k} Q_2 + \dots + h_{nk} Q_n \dots (1089 k)$$

Отсюда слѣдуетъ, что для того, чтобы сообщить покоящейся системѣ точекъ совокупность скоростей q_1', q_2', \dots, q_n' , необходимо приложить къ ней такую совокупность мгновенныхъ силъ, чтобы составляющія по координатнымъ параметрамъ импульсы всей совокупности были равны p_1, p_2, \dots, p_n . По этой причинѣ величины p_1, p_2, \dots, p_n могутъ быть названы *импульсами*, если величины q_1', q_2', \dots, q_n' можно называть скоростями.

Примѣръ 165-й. Четыре матеріальныя точки M_1, M_2, M_3, M_4 связаны между собою нематеріальными стержнями $M_1 M_2, M_2 M_3, M_3 M_4, M_4 M_1$ одинаковой длины l ; массы всѣхъ четырехъ точекъ одинаковы и равны m . Весь ромбъ заключается въ плоскости XU , въ которой движется поступательно, параллельно положительной оси U^{0xz} , причемъ точки M_1 и M_3 движутся вдоль по отрицательной части этой оси (черт. 174-й); это движеніе продолжается до встрѣчи точки M_1 съ осью X^{0xz} ; опредѣлить результатъ удара точки M_1 о преграду:

TO

BE

ALL

BY

IN

ONE

PHI

TO

BY

x_1

y_2

ONE

=

ITON

$\frac{T}{t_0}$

IN

$-\frac{p_1}{2n}$

ONE

— (

=

ACTN

$\gamma \rightarrow$

, CH

$$y'_c = V - \frac{V(1+\epsilon)}{1+2\sin^2\varphi_0}, \quad (\varphi') = \frac{2V(1+\epsilon)\sin\varphi_0}{l(1+2\sin^2\varphi_0)}.$$

Примѣръ 166-й. Ромбъ $M_1M_2M_3M_4$ состоитъ изъ четырехъ равныхъ материальныхъ стержней, связанныхъ шарнирами въ вершинахъ ромба; стержни однородны, длина каждаго изъ нихъ l , масса m , моментъ инерціи стержня вокругъ середины его пусть будетъ mk^2 . Видъ ромба и движеніе его въ моментъ встрѣчи оси X^{oxy} съ точкою M_1 таковы же, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ; опредѣлить результатъ удара.

Координаты центровъ инерціи стержней и угловыя скорости ихъ выразятся такъ:

$$\begin{array}{cccc} M_1M_2 & M_2M_3 & M_3M_4 & M_4M_1 \\ \frac{1}{2}l\sin\varphi, & \frac{1}{2}l\sin\varphi, & -\frac{1}{2}l\sin\varphi, & -\frac{1}{2}l\sin\varphi, \\ y_c + \frac{1}{2}l\cos\varphi, & y_c - \frac{1}{2}l\cos\varphi, & y_c - \frac{1}{2}l\cos\varphi, & y_c + \frac{1}{2}l\cos\varphi, \\ \varphi', & -\varphi', & \varphi' & -\varphi'; \end{array}$$

поэтому живая сила системы, импульсы p_1, p_2 и прочія величины будутъ таковы:

$$T = \frac{m}{2} (4(y'_c)^2 + (l^2 + 4k^2)(\varphi')^2)$$

$$p_1 = 4my'_c, \quad p_2 = (l^2 + 4k^2)m\varphi',$$

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \left[\frac{p_1^2}{4m} + \frac{p_2^2}{(l^2 + 4k^2)m} \right],$$

$$J = \frac{4m(l^2 + 4k^2)V}{l^2 + 4k^2 + 4l^2\sin^2\varphi_0},$$

$$y'_c = V - \frac{V(1+\epsilon)(l^2 + 4k^2)}{l^2 + 4k^2 + 4l^2\sin^2\varphi_0}, \quad (\varphi') = \frac{4V(1+\epsilon)l\sin\varphi_0}{l^2 + 4k^2 + 4l^2\sin^2\varphi_0}.$$

Примѣръ 167-й. Тотъ же самый ромбъ находится въ покоѣ на горизонтальной плоскости и къ точкѣ K стороны M_1M_2 (черт. 175-й) приложенъ импульсъ P , перпендикулярный къ направленію этой стороны. Отъ такого толчка ромбъ получитъ движеніе, сопровождаемое, вообще говоря, измѣненіемъ угла φ , но при нѣкоторой величинѣ раз-

суть проекции на оси координат импульсовъ этихъ силъ, а

$$a_1, a_2, \dots a_n,$$

$$b_1, b_2, \dots b_n,$$

$$c_1, c_2, \dots c_n.$$

координаты точекъ ихъ приложенія.

Для опредѣленія результата дѣйствія этихъ импульсовъ, надо взять интегралы по t (въ предѣлахъ отъ t_0 до $t_0 + \Delta$) отъ шести дифференціальныхъ уравненій (616, A) (751) стр. 539-й; получимъ:

$$M(x'_c - x_{oc}) = \sum_{i=1}^{i=n} X_i, \quad M(y'_c - y_{oc}) = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i,$$

$$M(z'_c - z_{oc}) = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i \dots \dots \dots (1090)$$

$$\begin{aligned} A_c(P - P_0) - F_c(Q - Q_0) - E_c(R - R_0) = \\ = \sum_{i=1}^{i=n} [(b_i - y_c) Z_i - (c_i - z_c) Y_i], \dots (1091, a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_c(Q - Q_0) - D_c(R - R_0) - F_c(P - P_0) = \\ = \sum_{i=1}^{i=n} [(c_i - z_c) X_i - (a_i - x_c) Z_i], \dots (1091, b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_c(R - R_0) - E_c(P - P_0) - D_c(Q - Q_0) = \\ = \sum_{i=1}^{i=n} [(a_i - x_c) Y_i - (b_i - y_c) X_i], \dots (1091, c) \end{aligned}$$

гдѣ $A_c, B_c, C_c, D_c, E_c, F_c$ суть моменты и произведенія инерціи твердаго тѣла вокругъ осей, параллельныхъ осямъ координатъ, проведенныхъ черезъ центръ инерціи тѣла; P, Q, R суть проекціи на

$$A_c x^2 + B_c y^2 + C_c z^2 = m\delta^4,$$

такое:

$$A_c x_0 x + B_c y_0 y + C_c z_0 z = m\delta^4;$$

для того, чтобы эта плоскость была перпендикулярна къ направлению ξ , надо чтобы координаты (x_0, y_0, z_0) точки прикосновенія ея къ эллипсоиду удовлетворяли равенствамъ:

$$\frac{A_c x_0}{Q_x} = \frac{B_c y_0}{Q_y} = \frac{C_c z_0}{Q_z},$$

а эти равенства, на основаніи формулъ (1092), обратятся въ слѣдующія:

$$\frac{x_0}{P - P_0} = \frac{y_0}{Q - Q_0} = \frac{z_0}{R - R_0},$$

которые выражаютъ, что геометрическая разность между угловою скоростью тѣла въ моментъ $(t_0 + \tau)$ и угловою скоростью въ моментъ t_0 направлена вдоль по радіусу вектору эллипсоида, соединяющему центръ его съ точкою прикосновенія.

Каждую совокупность импульсовъ мгновенныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, можно, подобно совокупности конечныхъ силъ (см. стр. 765), привести къ каноническому виду, замѣнивъ ее импульсомъ, направленнымъ вдоль по центральной оси совокупности и парю импульсовъ, дѣйствующею въ плоскости перпендикулярной къ центральной оси; такую каноническую совокупность мгновенныхъ силъ Болъ (Ball) называетъ *impulsive wrench*.

Всякое возможное бесконечно-малое перемѣщеніе твердаго тѣла можно разсматривать какъ бесконечно-малое винтовое движеніе вокругъ нѣкоторой центральной оси, т. е., какъ соединеніе бесконечно малаго поступательнаго движенія - параллельно этой оси съ бесконечно-малымъ угловымъ вращеніемъ вокругъ нея; Болъ называетъ элементарное перемѣщеніе твердаго тѣла словомъ *twist*, означающимъ именно процессъ винтоваго движенія. Совокупность скоростей, которыми обладаютъ точки твердаго тѣла, можетъ быть разсматриваема какъ совокупность скоростей винтоваго движенія тѣла вокругъ центральной оси скоростей; Болъ называетъ совокупность скоростей точекъ твердаго тѣла *twist velocity*.

Каждый *twist* или каждая *twist velocity* характеризуется и исполнѣ выражается шестью величинами; пять изъ числа этихъ шести величинъ

гдѣ M — масса тѣла, a, b, c — координаты точки приложенія мгновенной силы, $\alpha_c, \beta_c, \gamma_c$ — проеэкціи на главные оси инерціи тѣла скорости центра инерціи, p, q, r — проеэкціи на тѣ же оси угловой скорости.

Проеэкціи на оси координатъ скорости какой либо точки твердаго тѣла могутъ быть выражены помощію извѣстныхъ формулъ въ координатахъ этихъ точекъ и въ величинахъ $\alpha_c, \beta_c, \gamma_c, p, q, r$; составимъ выраженія проеэкціи $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ скорости той точки, къ которой приложена мгновенная сила и замѣнимъ $\alpha_c, \beta_c, \gamma_c, p, q, r$ величинами, получаемыми изъ формулъ (1093, 1094); получимъ:

$$\alpha_0 = X \left(\frac{1}{M} + \frac{c^2}{B} + \frac{b^2}{C} \right) - Y \frac{ab}{C} - Z \frac{ac}{B},$$

$$\beta_0 = Y \left(\frac{1}{M} + \frac{a^2}{C} + \frac{c^2}{B} \right) - Z \frac{bc}{B} - X \frac{ba}{C},$$

$$\gamma_0 = Z \left(\frac{1}{M} + \frac{b^2}{B} + \frac{a^2}{C} \right) - X \frac{ca}{B} - Y \frac{cb}{B}.$$

Вторыя части этихъ равенствъ суть частныя производныя по X, Y, Z отъ однородной функціи второй степени:

$$2T = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{M} + \frac{(bz - cy)^2}{B} + \frac{(cx - az)^2}{B} + \frac{(ay - bx)^2}{C}, \dots \dots \dots (1095)$$

выражающей удвоенную величину живой силы тѣла:

$$2T = M(\alpha_c^2 + \beta_c^2 + \gamma_c^2) + 2p^2 + 2q^2 + 2r^2.$$

Представимъ себѣ эллипсоидъ, выражаемый уравненіемъ (1095); черезъ точку X, Y, Z этого эллипсоида проведемъ касательную плоскость, на которую опустимъ перпендикуляръ D изъ центра эллипсоида; продолжимъ этотъ перпендикуляръ и отложимъ на немъ длину, равную $(2T:D)$, пусть x_1, y_1, z_1 суть координаты конца этой длины; эти координаты выразятся такъ:

$$x_1 = \frac{2T}{D} \cos(D, X) = \frac{\partial(2T)}{\partial X} = \alpha_0, \quad y_1 = \beta_0, \quad z_1 = \gamma_0;$$

мгновенной силы; проекции α_c , β_c скорости центра инерции тѣла выражаются такъ:

$$\alpha_c = -y_c R, \quad \beta_c = x_c R.$$

Опредѣлимъ условія, при которыхъ точки опоры оси вращения тѣла не испытываютъ удара при дѣйствіи мгновенной силы, т. е. условія, при которыхъ μ_1 , μ_2 , μ_3 , μ_4 и μ_5 равны нулю.

Изъ уравненія (1096, с) слѣдуетъ, что μ_3 будетъ равно нулю если $3 = 0$, т. е., если импульсъ будетъ перпендикуляренъ къ оси $Z^{орт}$.

Если $3 = 0$, то изъ уравненія (1096, е) окажется, что μ_4 будетъ равно нулю при томъ условіи, чтобы D_0 было равно нулю.

Изъ уравненія же (1096, а) тогда окажется, что μ_1 будетъ равно нулю при условіи, чтобы y_c было равно нулю, т. е., центръ инерціи тѣла долженъ заключаться въ плоскости XZ , или, иначе говоря, импульсъ долженъ быть перпендикуляренъ не только къ оси $Z^{орт}$, но и къ плоскости, проведенной черезъ эту ось и черезъ центръ инерціи тѣла.

Для того, чтобы μ_5 и μ_2 были равны нулю, надо, чтобы были удовлетворены слѣдующія равенства:

$$Mx_c R = \mathfrak{Y}, \quad c\mathfrak{Y} = E_0 R,$$

т. е.

$$\mathfrak{Y} \left(Mx_c \frac{a}{c_0} - 1 \right) = 0, \quad \mathfrak{Y} \left(c - E_0 \frac{a}{c_0} \right) = 0.$$

Первое изъ этихъ равенствъ опредѣляетъ координату a точки приложенія мгновенной силы; изъ него слѣдуетъ:

$$a = \frac{c_0}{Mx_c} = x_c + \frac{c_c}{Mx_c},$$

т. е. мгновенная сила должна быть приложена къ одной изъ точекъ оси качаній (см. стр. 681) тѣла вокругъ оси $Z^{орт}$.

Второе изъ предыдущихъ равенствъ опредѣляетъ координату c ; изъ него и изъ только что полученнаго выраженія для a слѣдуетъ:

§ 181. О соудареніи двухъ твердыхъ тѣлъ.

Два какія либо твердыя тѣла имѣли какое бы то ни было движеніе и въ нѣкоторый моментъ столкнулись; требуется опредѣлить результатъ ихъ соударенія, принимая въ расчетъ треніе между ними, развивающееся во время процесса удара; предполагается, что между тѣлами только одна точка прикосновенія.

Общую касательную плоскость обоимъ тѣламъ возьмемъ за плоскость XU , а точку прикосновенія — за начало координатъ; проекціи скоростей центровъ инерціи тѣлъ, угловыя скорости и координаты центровъ инерціи обозначимъ слѣдующими буквами и знаками: x_1, y_1, z_1 — координаты центра инерціи перваго тѣла, x_2, y_2, z_2 — втораго тѣла; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ — проекціи на оси координатъ скорости центра инерціи перваго тѣла въ моментъ начала удара, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ — втораго тѣла; x'_1, y'_1, z'_1 — проекціи скорости центра инерціи перваго тѣла въ какой либо моментъ удара, x'_2, y'_2, z'_2 — втораго тѣла; $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{R}_1$ — проекціи угловой скорости перваго тѣла въ моментъ начала удара, P_1, Q_1, R_1 — въ какой либо другой моментъ удара; $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{R}_2, P_2, Q_2, R_2$ — соотвѣтственныя величины для втораго тѣла; $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ — моменты и произведенія инерціи перваго тѣла вокругъ осей, проведенныхъ черезъ его центръ инерціи параллельно осямъ координатъ, $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2$ — моменты и произведенія инерціи втораго тѣла вокругъ осей, параллельныхъ осямъ координатъ, проведенныхъ черезъ его центръ инерціи; M_1 и M_2 — массы тѣлъ.

Между тѣлами, въ точкѣ ихъ прикосновенія, дѣйствуютъ: по нормали — реакціи, а въ касательной плоскости — силы тренія. Положимъ, что положительная ось $Z^{орт}$ совпадаетъ съ тою частью общей нормали, которая направлена внутрь перваго тѣла и означимъ черезъ λ величину реакціи, дѣйствующей въ какой либо моментъ t со стороны втораго тѣла на первое; эта реакція направлена по положительной оси $Z^{орт}$, реакція же, дѣйствующая со стороны перваго тѣла на второе, направлена по отрицательной оси $Z^{орт}$, но имѣетъ также величину λ . Означимъ черезъ F_x, F_y проекціи на оси $X^{орт}$ и

$(P_1 - \mathfrak{P}_1)$, $(Q_1 - \mathfrak{Q}_1)$, $(R_1 - \mathfrak{R}_1)$, получимъ слѣдующія выраженія этихъ разностей:

$$K_1(P_1 - \mathfrak{P}_1) = \begin{vmatrix} z_1 \mathfrak{Y} - y_1 \mathfrak{Z}, & -F_1, & -E_1 \\ x_1 \mathfrak{Z} - z_1 \mathfrak{X}, & B_1, & -D_1 \\ y_1 \mathfrak{X} - x_1 \mathfrak{Y}, & -D_1, & C_1 \end{vmatrix},$$

$$K_1(Q_1 - \mathfrak{Q}_1) = \begin{vmatrix} A_1, & z_1 \mathfrak{Y} - y_1 \mathfrak{Z}, & -E_1 \\ -F_1, & x_1 \mathfrak{Z} - z_1 \mathfrak{X}, & -D_1 \\ -E_1, & y_1 \mathfrak{X} - x_1 \mathfrak{Y}, & C_1 \end{vmatrix},$$

$$K_1(R_1 - \mathfrak{R}_1) = \begin{vmatrix} A_1, & -F_1, & z_1 \mathfrak{Y} - y_1 \mathfrak{Z} \\ -F_1, & B_1, & x_1 \mathfrak{Z} - z_1 \mathfrak{X} \\ -E_1, & -D_1, & y_1 \mathfrak{X} - x_1 \mathfrak{Y} \end{vmatrix},$$

$$K_1 = A_1 B_1 C_1 - A_1 D_1^2 - B_1 E_1^2 - C_1 F_1^2 - 2 D_1 E_1 F_1.$$

Если въ этихъ выраженіяхъ замѣнить значки $(_1)$ — значками $(_2)$, то будемъ имѣть выраженія для разностей:

$$\mathfrak{P}_2 - P_2, \quad \mathfrak{Q}_2 - Q_2, \quad \mathfrak{R}_2 - R_2,$$

тѣ самыя, которыя получимъ черезъ рѣшеніе уравненій группы (1101) относительно тѣхъ же разностей.

Означимъ черезъ $x'(O_1)$, $y'(O_1)$, $z'(O_1)$ проэкціи на оси координатъ скорости точки прикосновенія перваго тѣла, а черезъ $x'(O_2)$, $y'(O_2)$, $z'(O_2)$ — проэкціи скорости точки прикосновенія втораго тѣла. Ударъ между тѣлами происходитъ только въ томъ случаѣ, если, въ моментъ t_0 прикосновенія тѣлъ, проэкціи на ось $Z^{\text{общ}}$ скоростей соприкасающихся точекъ удовлетворяютъ неравенству:

$$z'_0(O_1) - z'_0(O_2) < 0.$$

гдѣ a, b, c, h, e, f суть нѣкоторыя функціи второй степени отъ $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, которыя можно опредѣлить нижеслѣдующимъ образомъ.

Составимъ выраженіе разности:

$$S = V(X \cos \varphi + Y \sin \varphi) + UZ - V_0(X \cos \varphi_0 + Y \sin \varphi_0) - U_0 Z; \dots (1105, 1)$$

по формуламъ (1102 — 1104) она выразится шестичленомъ:

$$S = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2hYZ + 2eZX + 2fXY, \dots (1105, 2)$$

а по тѣмъ формуламъ, которыя предшествовали формуламъ (1102 — 1104), она выразится такъ:

$$S = \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) (X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{H_1}{K_1} + \frac{H_2}{K_2}, \dots (1105, 3)$$

гдѣ

$$\begin{aligned} \frac{H_1}{K_1} = & (z_1 Y - y_1 Z) (P_1 - \mathfrak{P}_1) + (x_1 Z - z_1 X) (Q_1 - \mathfrak{Q}_1) + \\ & + (y_1 X - x_1 Y) (R_1 - \mathfrak{R}_1); \dots (1106) \end{aligned}$$

$$H_1 = - \begin{vmatrix} A_1, & -F_1, & -E_1, & z_1 Y - y_1 Z \\ -F_1, & B_1, & -D_1, & x_1 Z - z_1 X \\ -E_1, & -D_1, & C_1, & y_1 X - x_1 Y \\ z_1 Y - y_1 Z, & x_1 Z - z_1 X, & y_1 X - x_1 Y, & 0 \end{vmatrix} \dots (1107)$$

и подобное же выраженіе для H_2 ; слѣдовательно, вышесказанныя величины a, b, c, h, e, f суть коэффициенты у $X^2, Y^2, Z^2, 2YZ, 2ZX, 2XY$ въ выраженіи (1105, 3).

Величина S по формулѣ (1105, 3) выражается функціею отъ импульсовъ X, Y, Z , если H_1 и H_2 будутъ выражены опредѣлителями вида (1107); съ другой стороны S можетъ быть выражено функціею приращеній скоростей центровъ инерціи и приращеній угловыхъ скоростей, функціею, не заключающею импульсовъ; для этого надо исключить изъ H_1 и H_2 моменты импульсовъ: изъ H_1 (1106) — при помощи равенствъ

$$n \cos(G, Z) = ab - f^2,$$

$$n = + \sqrt{(fh - eb)^2 + (ef - ha)^2 + (ab - f^2)^2}.$$

Такъ какъ Δ , n и Z суть величины положительныя, и такъ какъ Z непрерывно возрастаетъ во время удара, то равенство (1110) выражаетъ, что проекція скорости u (т. е. геометрической разности между скоростями точекъ O_1 и O_2) на направленье G непрерывно возрастаетъ во время всего процесса удара.

Направленье G составляетъ острый уголъ съ осью Z , такъ какъ косинусъ этого угла равенъ положительной величинѣ $(ab - f^2)$, дѣленной на положительную величину n .

Чтобы отдать себѣ отчетъ въ томъ, какое значеніе имѣетъ направленье G , представимъ себѣ, что импульсъ \mathfrak{Z} , проекція котораго на оси координатъ суть импульсы \mathfrak{X} , \mathfrak{Y} , \mathfrak{Z} , изображенъ длиною, проведенною изъ точки O и рассмотримъ, при какихъ величинахъ и направленіяхъ импульса \mathfrak{Z} проекція скорости u на плоскость XU (т. е. скорость V) можетъ быть равна нулю.

Изъ уравненій (1102) и (1103) слѣдуетъ, что это будетъ при такихъ величинахъ \mathfrak{X} , \mathfrak{Y} , \mathfrak{Z} , которыя удовлетворяютъ одновременно двумъ уравненіямъ:

$$\left. \begin{aligned} a\mathfrak{X} + f\mathfrak{Y} + e\mathfrak{Z} + V_0 \cos \varphi_0 &= 0 \\ f\mathfrak{X} + b\mathfrak{Y} + h\mathfrak{Z} + V_0 \sin \varphi_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1112)$$

Если разсматривать \mathfrak{X} , \mathfrak{Y} , \mathfrak{Z} какъ прямолинейныя ортогональныя координаты точекъ пространства, то совокупность уравненій (1112) будетъ выражать нѣкоторую прямую линію.

На этой прямой находятся оконечности всѣхъ такихъ импульсовъ \mathfrak{Z} , при которыхъ скорость V равна нулю; мы будемъ называть ее «линіею $V=0$ »; нетрудно убѣдиться, что направленье G параллельно этой линіи.

Чтобы опредѣлить результатъ удара, надо знать законъ измѣненія скоростей V , U и угла φ съ теченіемъ времени, или выраженія скоростей V , U и угла φ въ функціи импульса \mathfrak{Z} , который непрерывно возрастаетъ во время процесса удара.

$$\frac{dV}{d\varphi} = e \cos \varphi + h \sin \varphi - kf \sin 2\varphi - ka \cos^3 \varphi - kb \sin^3 \varphi,$$

которое также проинтегрируемъ; получимъ выраженіе для \mathcal{Z} въ функціи отъ φ :

$$\mathcal{Z} = \Phi(\varphi); \dots\dots\dots (1117)$$

отсюда выразимъ φ функціею отъ \mathcal{Z} , затѣмъ, при помощи равенства (1115), получимъ выраженіе для V въ функціи отъ \mathcal{Z} , а наконецъ, изъ равенства (1110), найдемъ выраженіе для U въ функціи отъ \mathcal{Z} :

$$U = \Theta(\mathcal{Z}). \dots\dots\dots (1118)$$

Имѣя выраженія для скоростей U и V въ функціяхъ отъ \mathcal{Z} , будемъ въ состояніи судить объ томъ, которая изъ нихъ раньше обратится въ нуль.

А) Если U раньше обратится въ нуль, чѣмъ V , то, по формуламъ (1118) (1117) (1115), найдемъ значенія \mathcal{Z}_1 , φ_1 и V_1 въ тотъ моментъ τ , когда U обращается въ нуль; затѣмъ, по формуламъ (1102 — 1104), найдемъ значенія \mathcal{X}_1 , \mathcal{Y}_1 въ этотъ моментъ, а по величинамъ \mathcal{X}_1 , \mathcal{Y}_1 , \mathcal{Z}_1 изъ формулъ (1098 — 1101) опредѣлимъ скорости центровъ инерціи и угловыя скорости тѣлъ въ моментъ τ .

В) Если V обратится въ нуль раньше чѣмъ U , то надо узнать, не будетъ ли V оставаться равнымъ нулю во все остальное время удара.

Для этого нужно, чтобы во все остальное время удара импульсы \mathcal{X} , \mathcal{Y} , \mathcal{Z} удовлетворяли уравненіямъ (1112); а потому дифференціалы импульсовъ должны тогда удовлетворять слѣдующимъ равенствамъ:

$$(ab - f^2) d\mathcal{X} = (fh - eb) d\mathcal{Z},$$

$$(ab - f^2) d\mathcal{Y} = (ef - hq) d\mathcal{Z},$$

изъ которыхъ получимъ:

$$(d\mathcal{X})^2 + (d\mathcal{Y})^2 = (d\mathcal{Z})^2 \operatorname{tg}^2(G, Z);$$

(*) II. Если поверхности тѣла вполне шероховатія, то предполагается, что въ моментъ τ скорость V успѣла уже обратиться въ нуль и расчетъ производится такъ, какъ въ случаѣ (B, a).

III. Если разсматривается ударъ твердаго тѣла о неподвижную поверхность, то можно примѣнить предыдущія формулы, предположивъ, что второе тѣло ограничено данною поверхностью и имѣетъ бесконечно-большую массу; тогда изъ уравненій (1098 — 1101) останутся только три уравненія (1098) и три уравненія (1100), и т. д. Точно такъ же можно получить формулы удара твердаго тѣла о неподвижную точку, предположивъ ея массу бесконечно-большою.

Примѣръ 168-й. Ударъ однороднаго твердаго шара радіуса l о неподвижную плоскость; коэффициентъ тренія k , коэффициентъ возстановленія ϵ .

Положительную ось Z^{0*} направимъ изъ точки прикосновенія черезъ центръ шара, плоскость ZX проведемъ черезъ направленіе скорости v_0 паденія центра шара, уголъ паденія означимъ черезъ i (см. черт. 176).

Въ этомъ случаѣ равенства (1098) и (1100) будутъ имѣть слѣдующій видъ:

$$M(x'_e - v_e \sin i) = X, \quad My'_e = Y, \quad M(z'_e + v_e \cos i) = Z,$$

$$\frac{2}{5} M l^2 (P - \mathfrak{P}) = lY, \quad \frac{2}{5} M l^2 (Q - \mathfrak{Q}) = -lX,$$

$$R = \mathfrak{R},$$

а равенства (1102 — 1104) — слѣдующій:

$$V \cos \varphi - V_0 \cos \varphi_0 = \frac{7}{2} \frac{X}{M}, \quad V \sin \varphi - V_0 \sin \varphi_0 = \frac{7}{2} \frac{Y}{M},$$

$$U = -v_e \cos i + \frac{3}{M},$$

гдѣ:

$$V_0 \cos \varphi_0 = v_e \sin i - l\mathfrak{Q}, \quad V_0 \sin \varphi_0 = l\mathfrak{P}.$$

(*) Вычеркнуть въ концѣ предыдущей стр. слова: «такъ что V и φ останутся неизмѣнными во все время удара».

$$y_c' = -\frac{2}{7} \mathfrak{P}, \quad z_c' = \varepsilon v_c \cos i, \quad P = \frac{2}{7} \mathfrak{P}, \quad Q = \frac{z_c'}{l}.$$

Возьмемъ тѣ случаи, когда $\mathfrak{P} = 0$. Тогда $\varphi_0 = 0$, $V_0 = v_c \sin i - k\Omega$; легко убѣдиться, что тангенсъ угла r отраженія будетъ въ случаяхъ a и b выражаться такъ:

$$(a) \dots \varepsilon \operatorname{tg} r = \operatorname{tg} i - k(1 + \varepsilon),$$

$$(b) \dots \varepsilon \operatorname{tg} r = \frac{5}{7} \operatorname{tg} i + \frac{2}{7} \frac{l\Omega}{v_c \cos i}.$$

Примѣръ 169-й. Соудареніе двухъ однородныхъ твердыхъ шаровъ; радіусы l_1 и l_2 , коэффициенты тренія и возстановленія k и ε .

Въ этомъ случаѣ $D_1, E_1, F_1, D_2, E_2, F_2, h, e, f, x_1, y_1, x_2, y_2$, равны нулю, $s_1 = l_1, s_2 = -l_2$, даѣе

$$V \cos \varphi - V_0 \cos \varphi_0 = \frac{7}{2} \mu \mathfrak{X}, \quad V \sin \varphi - V_0 \sin \varphi_0 = \frac{7}{2} \mu \mathfrak{Y},$$

$$U - U_0 = \mu \mathfrak{Z}, \quad \mu = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}, \quad U_0 = \gamma_1 - \gamma_2,$$

$$V_0 \cos \varphi_0 = \alpha_1 - \alpha_2 - l_1 \Omega_1 - l_2 \Omega_2,$$

$$V_0 \sin \varphi_0 = \beta_1 - \beta_2 + l_1 \mathfrak{P}_1 + l_2 \mathfrak{P}_2,$$

$$dV = -\frac{7}{2} \mu k d\mathfrak{Z}, \quad d\varphi = 0, \quad \varphi = \varphi_0,$$

$$V = V_0 - \frac{7}{2} \mu k \mathfrak{Z}.$$

Направленіе G параллельно оси $Z^{\text{овъ}}$. Здѣсь также возможны двѣ разновидности ударовъ:

а) Если

$$V_0 > -\frac{7}{2} k U_0 (1 + \varepsilon),$$

то импульсы въ моментъ окончанія удара будутъ:

$$\mu \mathfrak{X}_2 = k U_0 (1 + \varepsilon) \cos \varphi_0, \quad \mu \mathfrak{Y}_2 = k U_0 (1 + \varepsilon) \sin \varphi_0,$$

$$\mu \mathfrak{Z}_2 = -U_0 (1 + \varepsilon);$$

$$\frac{(a-b)k\beta}{V_0 \sin \varphi_0 \operatorname{tg}^n \varphi_0} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\cotg^n \varphi}{\cos \varphi \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Изъ того, что произведеніе $V \operatorname{tg}^n \varphi \sin \varphi$ остается постояннымъ, слѣдуетъ, что съ уменьшеніемъ V произведеніе $\operatorname{tg}^n \varphi \sin \varphi$ должно увеличиваться, такъ что, если $n > 0$, — уголъ φ увеличивается, а если $n < 0$, то φ уменьшается; V можетъ обратиться въ нуль при уголѣ φ равномъ $\frac{\pi}{2}$ въ первомъ случаѣ и при уголѣ φ равномъ нулю — во второмъ.

Если $a = b$, то уголъ φ остается неизмѣнно равнымъ φ_0 .

Если V обратится въ нуль ранѣе, чѣмъ β достигнетъ величины $—U_0(1+\varepsilon)$, то прочія проекціи импульса будутъ имѣть слѣдующія величины при окончаніи удара:

$$X_2 = -\frac{V_0 \cos \varphi_0}{a}, \quad Y_2 = -\frac{V_0 \sin \varphi_0}{b}.$$

§ 182. Мгновенное измѣненіе живой силы системы матеріальныхъ точекъ вслѣдствіе приложенія къ нимъ мгновенныхъ силъ.

Система, состоящая изъ матеріальныхъ точекъ m_1, m_2, \dots, m_n , связанныхъ удерживающими связями s_1, s_2, \dots, s_p , находится въ движеніи подъ вліяніемъ данныхъ конечныхъ силъ; положимъ, что въ нѣкоторый моментъ t_0 точки системы подвергаются вліянію мгновенныхъ силъ, дѣйствующихъ въ теченіи ничтожно-малаго промежутка времени Δ ; означимъ черезъ $v_{0i}, x'_{0i}, y'_{0i}, z'_{0i}$ скорость точки m_i и проекціи ея на оси координатъ въ моментъ t_0 и черезъ v_i, x'_i, y'_i, z'_i подобныя же величины, относящіяся къ моменту $t_0 + \Delta$; пусть β_i означаетъ импульсъ мгновенной силы, приложенной къ точкѣ m_i , а X_i, Y_i, Z_i — проекціи этого импульса на оси координатъ.

Измѣненія скоростей точекъ вслѣдствіе дѣйствія этихъ мгновенныхъ силъ выразятся формулами:

Изъ этихъ равенствъ получимъ:

$$T_1 - T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{Z}_i \left(v_i \cos(v_i, \mathfrak{Z}_i) + v_{0i} \cos(v_{0i}, \mathfrak{Z}_i) \right) - \\ - x_1 \frac{\partial \mathfrak{B}_1}{\partial t} - x_2 \frac{\partial \mathfrak{B}_2}{\partial t} - \dots - x_p \frac{\partial \mathfrak{B}_p}{\partial t}, \dots (1124)$$

гдѣ T_1 означаетъ величину живой силы системы въ моментъ $t_0 + \mathfrak{Z}$, а T_0 — величину живой силы въ моментъ t_0 .

Изъ равенства (1124) слѣдуетъ, что, если уравненія связей не заключаютъ времени явнымъ образомъ, то *измѣненіе живой силы равняется суммѣ произведеній, составленныхъ для каждой точки такимъ же образомъ, какъ составлена вторая часть равенства (449) на стр. 285-й.*

Живая сила пріобрѣтенныхъ или потерянныхъ скоростей, которую мы условимся обозначать такъ: T_{01} , можетъ быть вычислена слѣдующимъ образомъ:

$$T_{01} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[(x'_i - x_{0i})^2 + (y'_i - y_{0i})^2 + (z'_i - z_{0i})^2 \right] = \\ = T_1 + T_0 - \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i v_{0i} \cos(v_i, v_{0i}),$$

а потому изъ равенствъ (1122), (1123) найдемъ слѣдующее выраженіе для T_{01} :

$$T_{01} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{Z}_i (v_i \cos(v_i, \mathfrak{Z}_i) - v_{0i} \cos(v_{0i}, \mathfrak{Z}_i)); \dots (1125)$$

это равенство выражаетъ, что *живая сила измѣненій скоростей всей системы получится, если возьмемъ проекцію приращенія скорости каждой точки на направленіе приложеннаго къ ней импульса, помножимъ ее на половину импульса и составимъ сумму всѣхъ этихъ произведеній.*

слѣдовательно, если система матеріальныхъ точекъ, связанныхъ удерживающими связями, ударяется о связь неудерживающую и если притомъ все связи таковы, что время не входитъ явнымъ образомъ въ ихъ выраженія, то во время перваго акта удара происходитъ потеря живой силы, равная величинѣ живой силы потерянныхъ скоростей.

На основаніи равенства (1078) величина живой силы потерянныхъ скоростей можетъ быть представлена подѣ слѣдующимъ видомъ:

$$T_{от} = \frac{J^2}{2} \Delta; \dots (1127) \quad \Delta \frac{\partial D}{\partial P_{00}} = D.$$

Равенство (1126 bis) выражаетъ слѣдующую теорему, называемую первой теоремою Карно: *при каждомъ ударѣ системы о неупругую связь происходитъ потеря живой силы*; но къ этому надо прибавить: *если выраженія связей не заключаютъ времени явнымъ образомъ.*

Эта теорема непосредственно примѣняется и къ тому случаю, когда точки системы, связанные между собою какими либо удерживающими связями, вступаютъ на новую связь, обращающуюся въ удерживающую; если въ моментъ встрѣчи точекъ съ новою связью $v > 0$ скорости v_0 , удовлетворяютъ неравенству (1064) стр. 828, то происходитъ ударъ, причемъ скорости v_0 , мгновенно измѣняются въ скорости v , удовлетворяющія равенству (1067 bis). Этотъ ударъ сопровождается потерей живой силы и величина потери равняется живой силѣ потерянныхъ скоростей, если ни старыя связи, ни новая не зависятъ явно отъ времени.

Такъ, напримѣръ, первая теорема Карно примѣняется къ удару, испытываемому твердымъ движущимся тѣломъ при мгновенной остановкѣ одной изъ его точекъ, имѣвшихъ движеніе.

Если система точекъ испытываетъ ударъ на нѣсколькихъ неудерживающихъ связяхъ одновременно и если моментъ окончанія перваго акта удара наступаетъ во всехъ ударяемыхъ связяхъ одновременно, то живая сила скоростей, потерянныхъ системою во время перваго акта удара, выразится формулою болѣе сложною, чѣмъ формула (1127).

$$\mu_1' = \int_{\tau}^t \lambda_1 dt, \quad \mu_2' = \int_{\tau}^t \lambda_2 dt, \dots \mu_p' = \int_{\tau}^t \lambda_p dt,$$

гдѣ $t = t_0 + \Sigma$.

Изъ этихъ двухъ равенствъ получимъ:

$$T_1 - T_{\tau} = T_{\tau_1} - J\epsilon \frac{\partial s}{\partial t} - \mu_1' \frac{\partial s_1}{\partial t} - \mu_2' \frac{\partial s_2}{\partial t} \dots - \mu_p' \frac{\partial s_p}{\partial t} \dots (1130)$$

Если время не входитъ явнымъ образомъ въ выраженія связей, то послѣднее равенство будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$T_1 - T_{\tau} = T_{\tau_1} \dots \dots \dots (1130, bis)$$

Стало быть, если система материальныхъ точекъ, связанныхъ удерживающими связями, ударяется о связь недерживающую и если притомъ все связи таковы, что время не входитъ явнымъ образомъ въ ихъ выраженія, то за время втораго акта удара живая сила системы увеличивается; прибыль живой силы равняется живой силѣ измѣненій скоростей за время втораго акта.

Величина живой силы T_{τ_1} можетъ быть выражена такъ:

$$T_{\tau_1} = \frac{J^2}{2} \epsilon^2 \Delta \dots \dots \dots (1131)$$

Равенство (1131) выражаетъ слѣдующую теорему: при второмъ актѣ удара системы о недерживающую связь является приращеніе живой силы; но къ этому надо прибавить: если въ выраженія связей время не входитъ явнымъ образомъ.

Эта теорема можетъ быть распространена на измѣненіе живой силы, получаемой системой материальныхъ точекъ, связанныхъ удерживающими связями, въ томъ случаѣ, когда какой либо взрывъ разрушаетъ одну изъ связей ($\epsilon = 0$) и мгновенно сообщаетъ точкамъ системы новыя скорости v_i , удовлетворяющія неравенству:

*акта удара, и живою силою скоростей, потерянных въ теченіи
перваго акта.*

Изъ выраженій (1127) и (1131) слѣдуетъ:

$$T_{\tau_1} - T_{\sigma\tau} = -\frac{J^2}{2} \Delta(1 - \epsilon^2) \dots \dots \dots (1135)$$

Изъ (1128) и (1132) слѣдуетъ, что, при ударѣ системы о двѣ связи, разность между живою силою возстановленныхъ скоростей и живою силою потерянныхъ скоростей выразится такъ:

$$-\frac{1}{2} [J_1^2 \Delta_{11}(1 - \epsilon_1^2) + 2J_1 J_2 \Delta_{12}(1 - \epsilon_1 \epsilon_2) + J_2^2 \Delta_{22}(1 - \epsilon_2^2)]. \quad (1136)$$

Если связь $\epsilon > 0$ вполне упруга, такъ что коэффициентъ возстановленія ϵ равенъ единицѣ, то разность между живою силою возстановленныхъ скоростей и живою силою потерянныхъ скоростей равна нулю; отсюда слѣдуетъ третья теорема Карно:

При вполне упругомъ ударѣ, потери живой силы не происходятъ.

Въ дѣйствительности, коэффициенты возстановленія менѣе единицы, а потому можно сказать, что при всякомъ ударѣ происходитъ потеря живой силы.

§ 184. Теорема Уильяма Томсона.

Предположимъ, что система, состоящая изъ n матерьяльныхъ точекъ, связанныхъ между собою p удерживающими связями (гдѣ p не болѣе $3n - 2$), находясь въ покоѣ, подвержена какимъ либо даннымъ мгновеннымъ силамъ. Подъ вліяніемъ импульсовъ этихъ силъ точки системы получаютъ скорости v_1, v_2, \dots, v_n , проэкціи которыхъ на оси координатъ должны удовлетворять такимъ уравненіямъ, какъ три слѣдующія:

$$\left. \begin{aligned} m_i x_i' &= X_i + x_1 \frac{\partial \mathfrak{B}_1}{\partial x_i} + \dots + x_p \frac{\partial \mathfrak{B}_p}{\partial x_i} \\ m_i y_i' &= Y_i + x_1 \frac{\partial \mathfrak{B}_1}{\partial y_i} + \dots + x_p \frac{\partial \mathfrak{B}_p}{\partial y_i} \\ m_i z_i' &= Z_i + x_1 \frac{\partial \mathfrak{B}_1}{\partial z_i} + \dots + x_p \frac{\partial \mathfrak{B}_p}{\partial z_i} \end{aligned} \right\} ; \dots (1137, 1)$$

а, кромѣ того, еще и равенствамъ (493, 1, 2, \dots p) см. стр. 351.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{Z}_i V_i \cos (V_i, \mathfrak{Z}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{Z}_i v_i \cos (v_i, \mathfrak{Z}_i); \dots (1140)$$

таких совокупностей скоростей тоже бесчисленное множество, потому что число равенств (1139) (1140), служащих для определений $3n$ проекций скоростей такой совокупности, меньше $3n$, такъ какъ, по условию, p не болѣе $(3n - 2)$.

При всякой такой совокупности скоростей $V_1, V_2, \dots V_n$, живая сила системы будетъ болѣе той, которую сообщаютъ данныя импульсы въ самомъ дѣлѣ, помноживъ равенства (1187) на соответственные про-

экций скоростей V_1, V_2, \dots, V_n , сложивъ и принявъ во вниманіе, какъ равенства (1139), такъ и равенство (1140), а наконецъ и (1138), получимъ:

$$Q = 2T, \dots \dots \dots (1141)$$

гдѣ

$$Q = \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i V_i \cos (v_i, V_i);$$

но, очевидно, что

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i [(x'_i - X'_i)^2 + (y'_i - Y'_i)^2 + (z'_i - Z'_i)^2] = \\ &= T - Q + T_1, \dots \dots \dots (1142) \end{aligned}$$

гдѣ X'_i, Y'_i, Z'_i означаютъ проекціи на оси координатъ скорости V_i , а T_1 есть живая сила:

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i V_i^2;$$

поэтому изъ равенствъ (1141) и (1142) окажется, что:

$$T_1 - T = K, \dots \dots \dots (1143)$$

гдѣ K есть величина положительная, стало бытъ дѣйствительно T_1 больше T .

Слѣдовательно, если сравнивать между собою величины живыхъ силъ системы при всякъ совокупностяхъ скоростей, удовлетворяющихъ равенствамъ (1139) и (1140), то наименьшею изъ нихъ окажется величина живой силы тѣхъ скоростей v_1, v_2, \dots, v_n , которыя будутъ сообщены данными импульсами $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \dots, \mathfrak{Z}_n$ въ дѣйствительности.

Это — теорема Уильяма Томсона.

Основываясь на этой теоремѣ, можно вычислять дѣйствіе данныхъ импульсовъ на данную покоящуюся систему; для этого должно поступать такимъ образомъ, какъ въ слѣдующемъ примѣрѣ.

Примѣръ 171-й. Два однородные стержня равной длины $2a$, одинаковой толщины и плотности положены на горизонтальной плоскости

Для опредѣленія ω_1 , подставимъ полученныя выраженія въ равенство (1138), т. е., въ $2T = \mathcal{K}(\alpha_1 + a\omega_1)$; изъ него найдемъ:

$$\omega_1 = \frac{\mathcal{K}a}{2Mk^2} \frac{a^2 + 3k^2}{a^2 + k^2}.$$

§ 185. Теорема Бертрана.

Возвратимся снова къ разсмотрѣнiю дѣйствiя мгновенныхъ силъ на движущуюся систему материальныхъ точекъ m_1, m_2, \dots, m_n , связанныхъ удерживающими связями $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_p$, какъ было условлено въ § 182-мъ; но только теперь мы предположимъ, что въ уравненiя связей время явнымъ образомъ не входитъ.

Проекцiи скоростей v_1, v_2, \dots, v_n , которыми точки системы будутъ обладать по окончанiи дѣйствiя мгновенныхъ импульсовъ $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_n$, опредѣлятся по формуламъ (1121) при помощи равенствъ (493, 1, 2, \dots, p) стр. 351-й; пусть T_1 означаетъ живую силу системы при этихъ скоростяхъ, т. е.:

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i^2.$$

Можно заставить систему получить другую совокупность скоростей V_1, V_2, \dots, V_n при дѣйствiи тѣхъ же импульсовъ и при тѣхъ же начальныхъ скоростяхъ $v_{01}, v_{02}, \dots, v_{0n}$, если въ моментъ t_0 присоединить къ существующимъ связямъ $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_p$ еще какую либо новую связь ϑ' или нѣсколько такихъ связей, независимыхъ отъ времени; проекцiи новыхъ скоростей выразятся формулами:

$$m_i X'_i = m_i x'_{0i} + \mathcal{I}_i + x'_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_i} + \dots + x'_p \frac{\partial \vartheta_p}{\partial x_i} + x' \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \dots \quad (1145)$$

и проч., гдѣ X'_i, Y'_i, Z'_i означаютъ проекцiи скорости V_i .

Исключивъ изъ уравненiй (1121) и (1145) данныя импульсы и проекцiи начальныхъ скоростей, получимъ рядъ равенствъ слѣдующаго вида:

$$m_i X'_i = m_i x'_i + x' \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + (x'_1 - x_1) \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_i} + \dots$$

и проч.; изъ этихъ равенствъ составимъ слѣдующее: $2T_2 = Q$, гдѣ:

Для поясненія, приводимъ примѣры.

Примѣръ 172-й. Тяжелая матеріальная точка массы m подвѣшена на двухъ нитяхъ длины l (каждая) къ двумъ неподвижнымъ точкамъ, находящимся на одной горизонтальной линіи въ разстояніи $2a$ одна отъ другой. Если одна изъ этихъ нитей будетъ разрѣзана, то какъ измѣнится черезъ это натяженіе другой нити?

Пока нить не разрѣзана, натяженія обѣихъ нитей одинаковы и равны

$$\frac{mg l}{2 \sqrt{l^2 - a^2}};$$

когда же одна изъ нитей будетъ уничтожена, тогда натяженіе другой опредѣлится по формулѣ (382) стр. 232-й и окажется равнымъ проекціи силы тяжести на продолженіе направленія нити (потому что центробѣжная сила равна нулю), т. е.:

$$mg \frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{l};$$

слѣдовательно, уничтоженіе одной изъ нитей влечетъ за собою уменьшеніе натяженія другой нити въ отношеніи:

$$\frac{2(l^2 - a^2)}{l^2}.$$

Примѣръ 173-й. Тяжелый однородный стержень длины $2a$ (масса $= M$, моментъ инерціи вокругъ центра инерціи $= Mk^2$) подвѣшенъ на двухъ вертикальныхъ нитяхъ длины b , которыя верхними концами прикрѣплены къ двумъ неподвижнымъ точкамъ A и B (черт. 178), находящимся на одной горизонтальной линіи въ разстояніи $2a$ одна отъ другой; нижніе концы нитей AD и BE прикрѣплены къ концамъ стержня, такъ что послѣдній покоится въ горизонтальномъ положеніи, причемъ натяженіе каждой нити равняется половинѣ вѣса стержня. Опредѣлить, какъ измѣнится натяженіе нити AD вслѣдствіе разрыва нити BE ?

Означимъ черезъ λ величину реакціи нити AD послѣ уничтоженія другой нити. Составимъ дифференціальныя уравненія движенія стержня:

$$Mx_c'' = 0, \quad My_c'' = Mg - \lambda, \quad Mk^2\omega'' = \lambda a$$

и уравненіе связи, удерживающей точку D въ неизмѣнномъ разстояніи b отъ точки A :

нулю ($y_0'' = 0$); составимъ выраженія проэкцій на оси $X^{0\omega}$ и $Y^{0\omega}$ ускоренія центра C инерціи и выраженіе проэкціи ускоренія на ось $X^{0\omega}$ точки K (x_K''), причѣмъ примемъ во вниманіе, что угловая скорость равна нулю.

$$x_c'' = x_0'', \quad y_c'' = \frac{3}{8} R\omega'', \quad x_K'' = x_0'' - R\omega''.$$

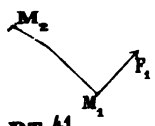
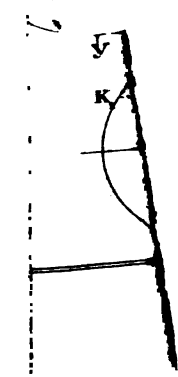
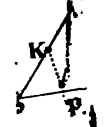
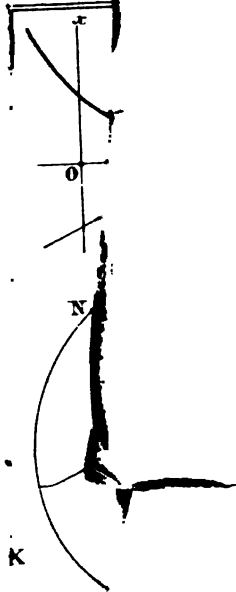
При катаніи безъ скольженія точка K будетъ описывать циклоиду и начальное положеніе K будетъ точкою возврата этой циклоиды, а потому $x_K'' = 0$; поэтому изъ послѣднихъ равенствъ и изъ дифференціальньихъ уравненій получимъ:

$$k - \left(\frac{3}{8} - k \right) \frac{320}{83} = 0, \quad \frac{M}{2} g - \lambda = \frac{3}{8} k\lambda;$$

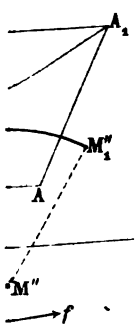
откуда:

$$k = \frac{120}{403}, \quad \lambda = \frac{M}{2} g \frac{408}{448},$$

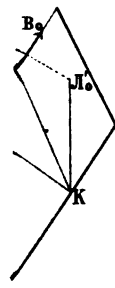
сгѣдовательно, послѣ разрыва нити давленіе уменьшится въ отношеніи (403; 448).



р.т. 41.



Черт. 48.



Черт. 49.

